<u>Контрольная работа № 4</u>

Тема: Теория вероятностей

З а д а ч и № 1-10

Задачи № 1-10 посвящены вычислениям вероятности событий с использованием основных теорем теории вероятности и комбинаторики.
Конкретный пример решения аналогичной задачи.

<u>Задача</u>. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя первого элемента 0,2; второго - 0,3; третьего – 0,2. Найти вероятность того, что:

а) Все три элемента выйдут из строя;
б) Все три элемента будут работать;
в) Выйдут из строя два элемента.

Решение. Вводим и определяем простые события, неразложимые на другие события, вероятности которых известны из условий задачи.

$$A_1 - \{\text{первый элемент вышел из строя}\}\; p(A_1) = p_1 = 0{,}2;$$
$$A_2 - \{\text{второй элемент вышел из строя}\}\; p(A_2) = p_2 = 0{,}3;$$
$$A_3 - \{\text{третий элемент вышел из строя}\}\; p(A_3) = p_3 = 0{,}2.$$

Определяем противоположные события и их вероятности.

$$\overline{A_1} - \{\text{первый элемент работает без отказа}\}\; p(\overline{A_1}) = \overline{p_1} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$$
$$\overline{A_2} - \{\text{второй элемент работает без отказа}\}\; p(\overline{A_2}) = \overline{p_2} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$$
$$\overline{A_3} - \{\text{третий элемент работает без отказа}\}\; p(\overline{A_3}) = \overline{p_3} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

События A_1, A_2, A_3 -независимы по условию, значит, независимы и противоположные события $\overline{A_1}$, $\overline{A_2}$, $\overline{A_3}$.

Используем теорему умножения независимых событий и находим вероятности сложных событий.

а) $p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}012.$

б) $p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}448.$

в) $$p(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\overline{A_3}) +$$
$$+ p(A_1) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(A_3) + p(\overline{A_1}) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}124$$

З а д а ч и № 11-20

Пример решения задачи аналогичной задачам № 11-20, посвященным дискретной случайной величине.

<u>Задача.</u> Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$.

Найти x_1 и x_2, если известно, что математическое ожидание $M(X) = 2{,}7$; дисперсия $D(X) = 0{,}21$.

Найти закон распределения случайной величины.

Решение. Закон распределения имеет вид:

X:	x_i	x_1	x_2
	p_i	0.3	0.7

В законе распределения неизвестны возможные значения случайной величины x_1 и x_2. Найдем эти значения, используя числовые характеристики случайной величины, которые известны.

Математическое ожидание случайной величины равно

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 \Rightarrow x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 = 2{,}7$$

Дисперсия случайной величины равна

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) \Rightarrow x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2 = 0{,}21$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 7{,}5 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$.

В результате закон распределения случайной величины будет иметь вид:

X:	x_i	2	3
	p_i	0.3	0.7

З а д а ч и № 21-30

Задачи № 21-30 посвящены исследованиям непрерывной случайной величины, заданной интегральной функцией распределения $F(x)$.

<u>Задача.</u> Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}(\sin x + 1) & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Определяем плотность распределения вероятностей $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}(\sin x + 1)\right)' = \frac{1}{2}\cos x$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le -\dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cos x & \text{при } -\dfrac{\pi}{2} < x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Находим математическое ожидание случайной величины.

$$M(X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} xf(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx = \begin{bmatrix} \text{интегрируем по частям} \\ \mathrm{x = u, \quad dv = cosxdx} \\ \mathrm{dx = du, \quad v = \int cosxdx = sinx} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(x\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right]^3 = 0$$

Вычисляем дисперсию случайной величины. В общем случае:

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

В нашем примере $M(X) = 0$. Поэтому получаем:

$$D(X) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{1}{2}\cos x\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx = \begin{bmatrix} \text{интегрируем по частям} \\ u = x^2 \qquad dv = \cos x dx \\ du = 2xdx \qquad v = \sin x \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2\sin x - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx \right) = \frac{1}{2}x^2\sin x\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2} x\sin x dx =$$

$$= \frac{\pi^2}{4} - \begin{bmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = \cos x \end{bmatrix} = \frac{\pi^2}{4} - \left(-u\cos x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx\right) \approx 0{,}4649$$

З а д а ч и № 31-40

<u>Задача.</u> Дано математическое ожидание $M(X) = a = 3{,}4$ и среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma(X) = \sigma = 1{,}7$ нормальной случайной величины. Необходимо найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (-0,5;2).

Решение. Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал (x_1, x_2) определяется с помощью функции Лапласа по формуле:

$$P(x_1 < x < x_2) = \emptyset\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \emptyset\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)$$

В нашем примере $x_1 = -0{,}5$; $x_2 = 2$; $a = 3{,}4$; $\sigma = 1{,}7$.

$$\frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{-0{,}5 - 3{,}4}{1{,}7} = \frac{-3{,}9}{1{,}7} \approx -2{,}29$$

$$\frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{2 - 3{,}4}{1{,}7} = -0{,}82$$

$\left.\begin{matrix} \Phi(-2{,}29 = -\Phi(2{,}29) \approx -04893 \\ \Phi(-0{,}82 = -\Phi(0{,}82) \approx -0{,}2939 \end{matrix}\right\}$ - числовые функции Лапласа находятся по специальным таблицам (см., например, Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, любое издание).

Тогда P(-0,5< x < 2) = Φ(-0,82) – Φ(-2,29) = -0,2939 + 0,4843 = 0.1954

Тема: Математическая статистика

З а д а ч и № 41-50

<u>Задача.</u> Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $M(X) = a$ нормальной случайной величины с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma = 0{,}95$, если известна выборочная средняя $\overline{X} = \overline{x}_b = 1000$, объем выборки $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 40$.

Решение. Интервальную оценку математического ожидания производят по формуле:

$$x_b - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_b} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

При $n > 30$ для нахождения параметра t используют функцию Лапласа и формулу $2\emptyset(t) = \gamma => \emptyset(t) = \frac{\gamma}{2}$. После определения числового значения $\emptyset(t)$ параметр t определяют по специальным таблицам для $\emptyset(t)$.

В нашем примере, при $\gamma = 0{,}95$ имеем $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = \emptyset(t)$ и по таблице $\frac{\gamma}{2} = 0{,}475$ получаем $t = 1{,}96$.

После этого вычисляем точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 40}{\sqrt{100}} = 7{,}84 \approx 8$.

Подставляя известные и полученные величины в исходную формулу, находим доверительный интервал для математического ожидания:

$$1000 - 8 < a < 1000 + 8 => a \in (992; 1008)$$

З а д а ч и № 51-60

Задача. Дана выборка в виде таблицы, в которой x_i – среднее значение варианты в i-ом интервале, n_i - частота наблюдения варианты в i-ом интервале.

Необходимо построить гистограмму, выдвинуть статическую гипотезу о нормальном распределении и проверить ее с помощью критерия Пирсона с доверительной вероятностью 0,99 (уровнем значимости 0,01).

Решение. Пусть выборка дана в табличной форме:

Таблица 1

$x_{i\text{ср}}$	5	7	9	11	13	15	17
n_i	3	12	21	45	24	12	4

Объем выборки $\sum n_i = 121$

1. Определяем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_b = \frac{\sum x_{i\text{ср}} \cdot n_i}{n} = \frac{1}{121}(5 \cdot 3 + 7 \cdot 12 + 9 \cdot 21 + 11 \cdot 45 + 13 \cdot 24 +$$
$$+15 \cdot 12 + 17 \cdot 4) = \frac{1343}{121} = 11{,}0992 \approx 11{,}1$$

2. Находим выборочную дисперсию

$$D_b = \frac{\sum x_{i\text{ср}}^2 \cdot n_i}{n} - [\bar{x}_b]^2 = \cdots = 6{,}7156$$

3. Определяем исправленное среднее квадратическое отклонение

$$S_b = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_b} = \sqrt{\frac{121}{120} \cdot 6{,}7156} \approx 2{,}6$$

4. Преобразуем таблицу выборочных данных в интервальный статистический ряд и находим плотность относительной частоты в частичных интервалах.

Таблица 2

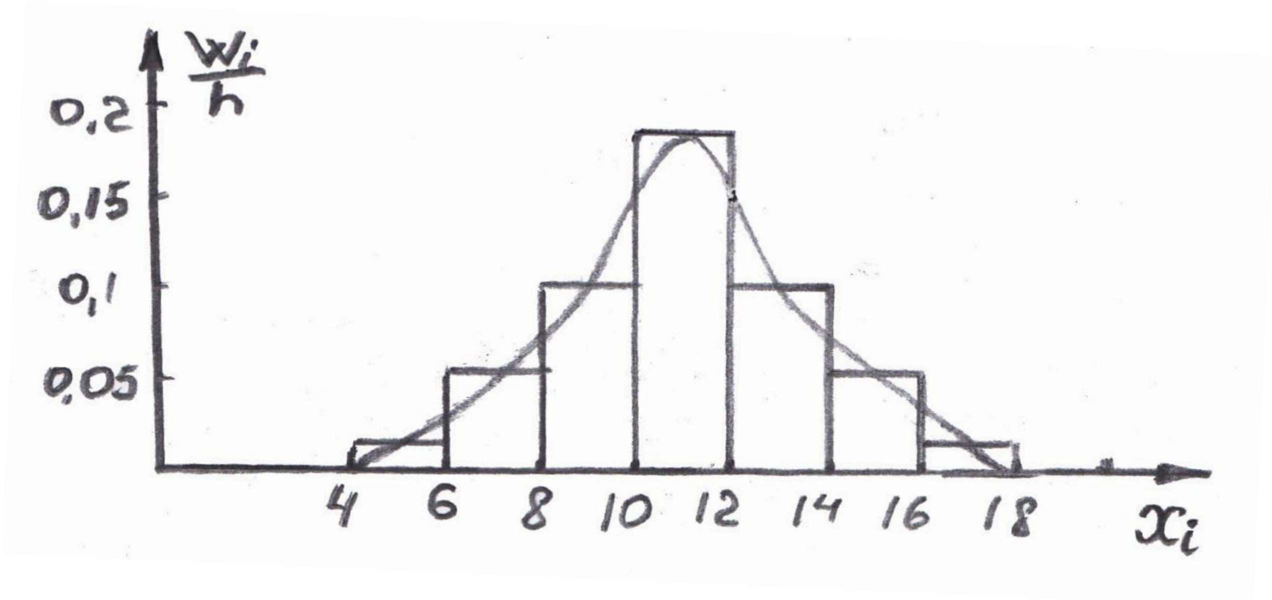
x_{icp}	5	7	9	11	13	15	17
n_i	3	12	21	45	24	12	4
$x_{min}^{(i)} - x_{max}^{(i)}$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
$W_i = \frac{n_i}{n}$	0,0248	0,1000	0,1736	0,3719	0,1983	0,1000	0,0331
$\frac{W_i}{h}$	0,0124	0,05	0,0868	0,1859	0,0991	0,0500	0,0165

$W_i = \frac{n_i}{n}$ - относительная частота,

h - ширина частичного интервала,

$\frac{W_i}{h}$ - плотность относительной частоты (приближенная точечная оценка плотности распределения возможных значений генерального признака как случайной величины).

5. По данным интервального статического ряда строим его гистограмму.



6. На основе анализа гистограммы выдвигаем основную (нулевую) гипотезу H_0: - исследуемый генеральный признак как случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами:

$$a = \bar{x}_b = 11{,}1;\ \sigma = S_b = 2{,}6.$$

Примечание: параметры нормального распределения неизвестны. Принимаем эти параметры равными их точечным оценкам, полученным по выборочным данным.

По заданию проверку гипотезы H_0 необходимо провести с уровнем значимости 0,01. Это значит, что считается допустимой ошибка первого рода (отвергнуть правильную нулевую гипотезу H_0) в одном случае из 100.

7. Преобразуем интервальный статический ряд (табл. 2), исходя из того, что при использовании критерия Пирсона частоты наблюдения n_i должны быть не менее 5. Для обеспечения этого условия объединяем крайние частичные интервалы.

Крайние граничные значения в первом и последнем интервалах раздвигаем соответственно до $-\infty$ и $+\infty$, потому что предполагается, что исследуемый генеральный признак имеет нормальное распределение.

В результате преобразованный статистический ряд будет иметь вид:

Таблица 3

$x_i - x_{i+1}$	$-\infty - 8$	$8 - 10$	10-12	12-14	$14-\infty$
n_i	15	21	45	24	16

8. Определяем наблюдаемое значение $\varkappa^2$ – критерия Пирсона ($\varkappa^2$ – хи- квадрат).

$$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n_i – частота наблюдения (число появлений варианты x_i в выборочных данных в i-ом частичном интервале)(см. табл. 3);

$S -$ число частичных интервалов (в табл. 3 $S = 5$);

$n -$ объем выборки (в нашем примере $n = 121$);

$p_i -$ вероятность появления варианты x_i в частичном интервале (x_i, x_{i+1}) определяем по формуле:

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \emptyset(u_{i+1}) - \emptyset(u_i)$$

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_b}{S_b} \qquad u_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_b}{S_b}$$

В первом частичном интервале $x_i = -\infty$ (табл.3), поэтому принимаем $\emptyset(-\infty) = -0{,}5$. Правая граница последнего частичного интервала $x_{s+1} = +\infty$, поэтому принимаем $\emptyset(+\infty) = 0{,}5$.

Вычисления проводим в табличной форме.

Таблица 4

№ интервала	$x_i - x_{i+1}$	u_i	u_{i+1}	$\emptyset(u_i)$	$\emptyset(u_{i+1})$	p_i
1	$-\infty\ -8$	$-\infty$	-1,19	-0,5	-0,3830	0,1170
2	8-10	-1,19	-0,42	-0,3830	-0,1628	0,2202
3	10-12	-0,42	0,35	0,1628	0,1368	0,2996
4	12-14	0,35	1,12	0,1368	0,3686	0,2318
5	$14-\infty$	1,12	∞	0,3686	0,5	0,1314

Проверка $\sum p_i = 1{,}0094$.

Пример вычислений

$$\bar{x}_b = 11{,}1 \qquad S_b = 2{,}6$$

$u_8 = \frac{8-11{,}1}{2{,}6} \approx -1{,}19$, $\qquad u_{10} = \frac{10-11{,}1}{2{,}6} \approx -0{,}42$, и т.п.

При определении u_i и u_{i+1} округление до двух знаков после запятой проводят по следующим правилам:

1) Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последнюю из сохраняемых чисел увеличивают на единицу;
2) Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последнюю из сохраняемых цифр не изменяют;

3) Если отбрасываемая цифра 5 , то округляют последнюю из значащих цифр до ближайшего четного числа в сторону увеличения. Если указанная цифра четная, то ее не изменяют. Ноль считают условно четным числом.

Наблюдаемое значение $\varkappa^2 -$ критерия Пирсона вычисляем в табличной форме.

$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, где $n = 121$

Таблица 5

№ интервала	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{np_i}$
1	15	0,1170	14,1570	0,0502	225	15,8993
2	21	0,2202	26,6442	1,1956	441	16,5514
3	45	0,2996	36,2516	2,1112	2025	55,8596
4	24	0,2318	28,0478	0,5842	576	20,5364
5	16	0,1314	15,8994	0,0006	256	16,1012

$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum = 3{,}9418 \qquad \sum = 124{,}9418$

Два крайних столбца справа используют для проверки.
Проверка.

$$\sum \left(\frac{n_i^2}{np_i} - n \right) = \varkappa^2_{\text{набл}}$$

$$124{,}9418 - 121 = 3{,}9418 \equiv 3{,}9418 - \textit{верно!}$$

9.Определяем по таблице критическое значение критерия Пирсона

$$\varkappa^2_{\text{кр}} = \varkappa^2(\alpha, m),$$

Где $\alpha = 0{,}01 -$ уровень значимости (определен в задании). В общем случае уровень значимости выбирают из внешних соображений об опасности осуществления альтернативной гипотезы H_1.

$m = 5 - 3 = 2 -$ число степеней свободы (количество независимых частичных интервалов в преобразованном статистическом р яду). При вычислении $\varkappa^2_{\text{набл}}$ используют три уравнения связи: при вычислении объема n, выборочной средней $\bar{x}_b$ и исправленного СКО - S_b.

Критическое значение критерия Пирсона $\chi^2_{кр}(0{,}01{,}2) = 9{,}2$ находят по таблице критических значений $\varkappa^2 -$ распределения (см., например, табл. 5 в учебнике Гмурмана В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М. Высшая школа, 2000г и более поздние издания).

$\varkappa^2_{\text{набл}} < \varkappa^2_{\text{кр}}$ $(3{,}95 < 9{,}2)$, поэтому нулевую гипотезу принимаем с уровнем доверия 99% (α = 0,001).