

Контрольная работа №2

Тема: Дифференциальное исчисление функции одной переменной

З а д а ч и № 1-10

Необходимо найти производные первого порядка функций одной переменной, используя правила дифференцирования и формулы дифференцирования основных элементарных функций (табличных производных).

Примеры решения конкретных задач, аналогичных задачам 61-70:

а) $y = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x$

б) $y = \ln^2(1 - \cos x)$

в) $y = \arctg 3^{\sqrt{x}}$

г) $xy + \sin y = 0$

д) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

Пример а) $y' = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2})' + \frac{1}{2}(\arcsin x)' =$
 $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2} + x \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x^2-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}} =$
 $= \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$

Пример б) $y' = (\ln^2(1 - \cos x))' = 2 \ln(1 - \cos x) \cdot (\ln(1 - \cos x))' =$
 $2 \ln(1 - \cos x) \cdot \frac{1}{1 - \cos x} \cdot (1 - \cos x)' = \frac{2 \ln(1 - \cos x) \cdot \sin x}{1 - \cos x}$

Пример в) $y' = (\arctan 3^{\sqrt{x}})' = \frac{1}{1+(3^{\sqrt{x}})^2} \cdot 3^{\sqrt{x}} \ln 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3^{\sqrt{x}} \cdot \ln 3}{2\sqrt{x}(1+3^{2\sqrt{x}})}$

Пример г) $xy + \sin y = 0$

Решение. Дана функция одной переменной в неявной форме. В этом случае при дифференцировании переменной y по x , эту переменную рассматривают как сложную функцию аргумента x (например, $(y^2)'_x = 2yy'$).

В нашем примере получим:

$$(x \cdot y)' + (\sin y)' = 0 \Rightarrow 1y + xy' + \cos y y' = 0$$

$$y'(x + \cos y) = -y \Rightarrow y' = \frac{-y}{x + \cos y}$$

Пример д) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

При дифференцировании функций, содержащих несколько сомножителей в числителе и знаменателе или показательно-степенных функций вида $y=f(x)^{\varphi(x)}$, функции сначала логарифмируют, а затем дифференцируют.

$$\begin{aligned}
 (\ln y)' &= \left(\ln \left(x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1} \right)^{\frac{1}{3}} \right) \right)' = \left(\ln x + \frac{1}{3} (2 \ln x - \ln(x^2+1)) \right)' \\
 \frac{y'}{y} &= \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x \right) \\
 y' &= y \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)} \right) = y \left(\frac{3(x^2+1) + 2(x^2+1) - 2x^2}{3x(x^2+1)} \right) = \\
 &= y \left(\frac{3x^2+3+2x^2+2-2x^2}{3x(x^2+1)} \right) = y \left(\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} \right) = \\
 &= x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}
 \end{aligned}$$

Задачи № 11-20

Найти производные $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций. Часть функций задана в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$.

Производные первого и второго порядков для таких функций определяются по формулам

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

Примеры решения конкретных задач аналогичных задачам №71-80.

а) $y = 5^{2x+4}$

б) $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = \arctan t \end{cases}$

Найти производные y'_x и y''_x

Решение.

Пример а) $y'_x = (5^{2x+4})' = 5^{2x+4} \cdot \ln 5 (2x+4)' = 5^{2x+4} \ln 5 \cdot 2$

$y''_x = (5^{2x+4} \ln 5 \cdot 2)' = (2 \ln 5)^2 \cdot 5^{2x+4}$

Пример б) $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = \arctan t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left[y'_t = \frac{1}{t^2+1}; x'_t = \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t \right] = \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t} = \frac{1}{2t}$$

$$y_x'' = (y_x')'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} \right)'_t \cdot \frac{t^2 + 1}{2t} = -\frac{t^2 + 1}{4t^3}$$

З а д а ч и 21-30

Необходимо построить график функции $y=f(x)$, используя общую схему исследования функции, включающую следующие пункты:

1. Найти область существования (естественного определения функции).
2. Проверить является ли функция симметричной относительно оси Oy (четной) или относительно начала координат (нечетной), или периодической.
3. Найти точки разрыва функции, точки пересечения графиком функции осей координат и определить интервалы знакопостоянства функции способом пробных точек.
4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные); при наличии асимптот определить асимптотическое поведение функции с помощью односторонних пределов; при отсутствии указанных асимптот исследовать поведение функции в граничных точках области существования, включая $x = \pm\infty$.

Замечание. Пункты 1-4 выполняются без использования производных.

5. Находим критические точки первого и второго рода и определяем значения функции в этих точках.

6. Разбить область существования на частичные интервалы, разделенные точками разрыва, нулями функции, критическими точками первого и второго рода.

7. Исследовать монотонность (убывание – возрастание) и выпуклость функции в выделенных интервалах. Определить наличие экстремумов в критических точках первого рода двумя способами. Найти точки перегиба среди критических точек второго рода.

8. Результаты исследования представить в табличной форме и в виде графика.

Пример. Дана функция $y(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$. Необходимо построить график функции, используя общую схему ее исследования.

П-1. Функция не имеет точек разрыва, так как существует при всех значениях аргумента $x \in \infty$. Поэтому область существования – вся числовая ось $x \in (-\infty; +\infty)$.

П-2. Функция не удовлетворяет условиям четности ($y(x) \neq y(-x)$), нечетности ($y(x) \neq -y(x)$) и периодичности ($y(x) \neq y(x + T)$, где $T > 0$). Она

является функцией общего вида и ее необходимо исследовать при всех значениях аргумента.

П-3. Определяем, имеет ли функция асимптоты. Вертикальные асимптоты отсутствуют, так как функция не имеет точек разрыва. Определяем наклонную асимптоту $y=kx+b$. Если хотя бы один из коэффициентов (k, b) равен ∞ , то наклонная асимптота отсутствует. В нашем примере

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \left(x^2 + 2x - 5 - \frac{6}{x} \right)}{x} = \infty$$

Так как угловой коэффициент $k = \infty$, то наклонная и горизонтальные асимптоты отсутствуют.

Исследуем поведение функции при $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3} \right) = [-\infty^3 \cdot 1] = -\infty$$

Аналогично исследуется поведение функции при $x \rightarrow \infty$.

Из проведенных исследований следует, что значения функции при $x = \pm\infty$ неограничены.

П-4. Находим нули функции из уравнения $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = 0$. Из алгебры многочленов известно, что, если многочлен с целыми коэффициентами и единичным коэффициентом при x^3 имеет целые корни, то они являются делителями его свободного члена.

В нашем примере многочлен $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ содержит целые коэффициенты при неизвестных; свободный член равен 6 и имеет следующие делители $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Некоторые из этих делителей будут корнями многочлена.

Методом пробных точек находим один корень.

$$\text{При } x_{\text{пр}} = 1 \quad 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 - 6 \neq 0$$

$$\text{При } x_{\text{пр}} = -1 \quad (-1)^3 + 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) - 6 = 0$$

Таким образом, находим первый корень многочлена $x_1 = -1$. Тогда, разделив исходный многочлен на одночлен $(x + 1)$, получим

$$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

Находим еще два корня многочлена $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$ из решения квадратного уравнения $x^2 + x - 6 = 0$.

Таким образом, график функции пересекает ось Ox в трех точках $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$. Ось Oy график функции пересекает в одной точке (при $x = 0$, $y(0) = -6$).

Область существования функции $(-\infty; +\infty)$ разделяется на интервалы знакопостоянства нулями функции. При этом знаки функции в указанных интервалах определяем методом пробных точек.

Интервал $(-\infty; -3)$. В пробной точке $x_{\text{пр}} = -4$ значения функции $y(-4) = (-4)^3 + 2(-4)^2 - 5(-4) - 6 = -64 + 32 + 20 - 6 = -18 < 0$

Таким образом, во всех точках интервала $(-\infty; -3)$ функция отрицательна.

Аналогично определяем, что во втором интервале $(-3; -1)$ функция положительна; в интервале $(-1; 2)$ функция отрицательна, в интервале $(2; +\infty)$ - положительна. Полученные результаты рекомендуется отразить в графической форме на числовой оси Ох.

П-5. Вычисляем производные функции

$$y' = (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)' = 3x^2 + 4x - 5$$

При $y'(x) = 0$ получаем из $3x^2 + 4x - 5 = 0$ координаты критических точек первого рода (точек стационарности).

$$x_{1\text{кр}} \approx -2,118 \quad x_{2\text{кр}} = 0,786$$

Аналогично из уравнения $y'' = 6x + 4 = 0 \Rightarrow 3x + 2 = 0$ получаем критическую точку второго рода

$$x_{3\text{кр}} = -\frac{2}{3} \approx -0,667$$

Находим значение функции в критических точках.

$$y(-2,118) = (-2,118)^3 + 2(-2,118)^2 - 5(-2,118) - 6 = -9,501 + 8,972 + 10,59 - 6 = 4,06$$

$$y(0,786) = 0,786^3 + 2 \cdot 0,786^2 - 5 \cdot 0,786 - 6 = 0,486 + 1,236 - 3,930 - 6 = -8,208$$

$$y\left(-\frac{2}{3}\right) = (-0,667)^3 + 2(-0,667)^2 - 5(-0,667) - 6 = -2,071$$

П-6. Разбиваем область существования функции на отдельные непересекающиеся интервалы характерными точками: нулями функции $x_1 = -3$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, критическими точками первого рода ($x_{1\text{кр}} \approx -2,118$, $x_{2\text{кр}} = 0,786$) и второго рода ($x_{3\text{кр}} \approx -0,667$).

В результате получаем следующие интервалы:

$$(-\infty; -3); (-3; -2,118); (-2,118; -1); (-1; -0,667); (-0,667; 0,786); (0,786; 2); (2; +\infty).$$

П-7. Определяем свойства функции в интервалах (П-6.)

Первый интервал $(-\infty; -3)$. Функция отрицательна (см. П-4.). Выбираем пробную точку внутри интервала $x_{\text{пр}} = -4$ и определяем знак первой производной

$$y'_{(-4)} = (3x^2 + 4x - 5)|_{x=-4} = 3 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) - 5 > 0$$

Отсюда следует, что функция в данном интервале возрастает.

$$y''_{(-4)} = (3x + 2)|_{x=-4} = 3 \cdot (-4) + 2 < 0 - \text{функция выпукла вверх.}$$

Таким образом, в первом интервале функция отрицательна, возрастает и имеет выпуклость вверх.

Второй интервал $(-3; -2,118)$. Функция положительна (см. П-4.). Выбираем пробную точку $x_{\text{пр}} = -2,5$ и определяем знак первой производной

$$y'_{(-2,5)} = (3x^2 + 4x - 5)|_{x=-2,5} > 0 \quad \text{функция возрастает.}$$

$$y''_{(-2,5)} = (3x + 2)|_{x=-2,5} < 0 \quad \text{функция выпукла вверх.}$$

В правой окрестности второго интервала лежит критическая точка $(x_{1\text{кр}} \approx -2,118)$. Исследуем ее на наличие экстремума первым и вторым способом.

Первый способ. Слева от критической точки $y'_{(-2,5)} > 0$, справа в пробной точке $x_{\text{пр}} = -1,5$

$$y'_{(-1,5)} = (3x^2 + 4x - 5)|_{x=-1,5} < 0$$

Первая производная функции имеет разные знаки слева и справа от критической точки $x_{1\text{кр}} \approx -2,118$. Значит в этой точке экстремум – максимум, потому что слева $f'_{(-2,5)} > 0$, а справа $f'_{(-1,5)} < 0$.

Проверяем наличие экстремума вторым способом с помощью второй производной $y''_{(-2,118)} = (3x + 2)|_{x=-2,118} < 0$ - в критической точке имеем максимум.

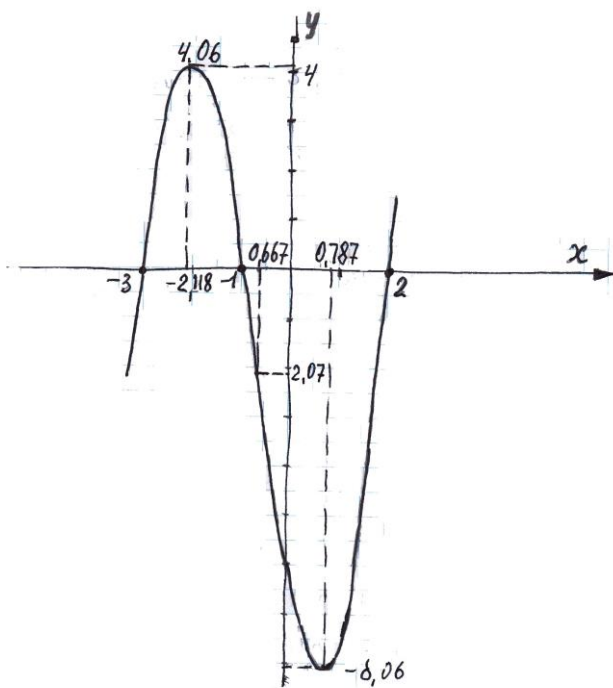
Для остальных интервалов и критических точек проводятся аналогичные исследования. Результаты исследований сводятся в таблицу.

Таблица

Характерные точки и интервалы	Знак и числовые значения функции	Знак первой производной	Знак второй производной	Краткая характеристика поведения функции
$(-\infty; -3)$	< 0	> 0	< 0	Отрицательная, возрастает, выпуклость вверх

$x=-3$	0	-	-	Нуль функции
$(-3; -2,118)$	+	>0	<0	Положительная, возрастает, выпуклость вверх
$x=-2,118$	+4,06	0	<0	Критическая точка первого рода – точка максимума
$(-2,118; -1)$	>0	<0	<0	Положительная, убывает, выпуклость вверх
$x=-1$	0	-	-	Нуль функции
$(-1; -0,667)$	<0	<0	<0	Отрицательная, убывает, выпуклость вверх
$x=-0,667$	-2,071	-	-	Критическая точка второго рода – точка перегиба
$(-0,667; 0,786)$	<0	<0	>0	Отрицательная, убывает, вогнутость
$x=0,786$	-8,06	0	-	Критическая точка первого рода – точка минимума
$(0,786; 2)$	<0	>0	>0	Отрицательная, возрастает, вогнутость
$x=2$	0	-	-	Нуль функции
$(2; +\infty)$	>0	>0	>0	Положительная, возрастает, вогнутость

П-8. Строим график функции, используя табличные данные



Проверяем соответствие графика функции её свойствам, приведенным в таблице.

Тема: Интегральное исчисление

Задачи № 31-40

Задачи № 31-40 посвящены вычислениям нетабличных интегралов различными методами с последующей проверкой дифференцированием.

Используются следующие приемы и методы интегрирования.

1. Введение поправок для обеспечения равенства аргумента подынтегральной функции и переменной интегрирования под знаком дифференциала. При этом дифференциал при необходимости изменяют так: $du = \frac{1}{a} d(au) = \frac{1}{a} d(au + b)$, где a и b — постоянные величины.

2. Подведение части подынтегральной функции под знак дифференциала.

3. Замена переменной интегрирования (прямая $x = \varphi(t)$ и обратная ($t = \psi(x)$) подстановки).

4. Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Примеры выполнения задач, аналогичных задачам № 1-10.

Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$$a) \int \frac{x dx}{\sin^2(2x^2 + 3)};$$

$$б) \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{3-6x-x^2}};$$

$$в) \int x \sin 3x dx.$$

Пример а)

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sin^2(2x^2 + 3)} &= \left[\begin{array}{l} \text{подведение} \\ \text{под знак} \\ \text{дифференциала} \end{array} \quad x dx = d \left(\int x dx \right) = \frac{1}{2} dx^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sin^2(2x^2 + 3)} = \left[\begin{array}{l} \text{введение} \\ \text{поправок} \end{array} \quad dx^2 = \frac{1}{2} (2x^2 + 3) \right] = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2 + 3)}{\sin^2(2x^2 + 3)} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{замена} \\ \text{переменной} \end{array} \quad u = 2x^2 + 3 \right] = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{1}{4} (-\operatorname{ctgu}) + c = \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{ctg}(2x^2 + 3) + c \end{aligned}$$

Проверка

$$\left(-\frac{1}{4} \operatorname{ctg}(2x^2 + 3) + c \right)' = -\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sin^2(2x^2 + 3)} \right) (2x^2 + 3)' = \frac{x}{\sin^2(2x^2 + 3)}$$

Пример б)

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{3-6x-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{выделяем полный квадрат} \\ -(x^2 + 6x - 3) = -(x^2 + 2 \cdot 3x + 9 - 9 - 3) = \\ = 12 - (x+3)^2 \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{(2x+5) dx}{\sqrt{12 - (x+3)^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{производим замену} \\ x+3 = t \Rightarrow x = t-3 \\ dx = dt \end{array} \right] = \int \frac{(2(t-3)+5) dt}{\sqrt{12-t^2}} = \\ &= \int \frac{(2t-1) dt}{\sqrt{12-t^2}} = \int \frac{2t dt}{\sqrt{12-t^2}} - \int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}} = J_1 - J_2 \\ J_1 &= \int \frac{2t dt}{\sqrt{12-t^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{подводим под знак дифференциала} \\ 2t dt = d \left(2 \int 2t dt \right) = d(t^2) \end{array} \right] = \int \frac{d(t^2)}{\sqrt{12-t^2}} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{вводим поправку} \\ d(t^2) = (-1)d(-t^2) = -d(12-t^2) \end{array} \right] = \int \frac{d(12-t^2)}{\sqrt{12-t^2}} = -2\sqrt{12-t^2} + c_1 \\ J_2 &= \int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}} = \left[\begin{array}{l} \text{табличный интеграл} \\ \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin \frac{t}{a} \end{array} \right] = \arcsin \frac{t}{\sqrt{12}} + c_2 \\ I &= J_1 - J_2 = -2\sqrt{12-t^2} + c_1 - \arcsin \frac{t}{\sqrt{12}} + c_2 = \left[\begin{array}{l} t = x+3 \\ c_1 + c_2 = c \end{array} \right] = \end{aligned}$$

$$= -2\sqrt{3-6x-x^2} - \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{12}} + c$$

Проверка

$$\begin{aligned} \left(-2\sqrt{3-6x-x^2} - \arcsin \frac{x+3}{\sqrt{12}} + c \right)' &= \frac{6+2x}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \frac{1}{12\sqrt{1-\frac{(x+3)^2}{12}}} = \\ &= \frac{6+2x}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{12-x^2-6x-9}} = \frac{2x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \text{верно!} \end{aligned}$$

Пример в)

Решение.

$$\begin{aligned} I = \int x \sin 3x dx &= \left. \begin{array}{l} \text{интегрируем по частям} \\ u = x \quad dv = \sin 3x dx \\ du = dx \quad v = \frac{1}{3} \int \sin 3x d3x = -\frac{\cos 3x}{3} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{x \cos 3x}{3} + \frac{1}{3} \int \cos 3x dx \frac{3}{3} = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \int \cos 3x d3x = \\ &= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + c \end{aligned}$$

Проверка

$$\begin{aligned} \left(-\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + c \right)' &= -\frac{1}{3} \cos 3x - \frac{x}{3} (-\sin 3x) \cdot 3 + \frac{1}{9} \cos 3x \cdot 3 = \\ &= x \sin 3x - \text{верно} \end{aligned}$$

В задачах г), д), е) необходимо вычислить неопределенные интегралы с применением специальных методов:

- Разложение подынтегральных функций в виде рациональных дробей на многочлены и элементарные дроби;
- Рационализация подынтегральных функций с помощью специальных подстановок.

Рассмотрим конкретные примеры.

$$\text{г) } \int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx; \quad \text{д) } \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx; \quad \text{е) } \int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x} dx.$$

Пример г) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} dx$

Решение.

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью $\left(\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \text{ где } m \geq n\right)$. Такие интегралы решаются методом разложения, позволяющим представить подынтегральную функцию в виде линейной комбинации элементарных дробей.

В нашем примере, разделив числитель дроби на знаменатель «уголком», получаем

$$\frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x^2 - 5x + 6)} = 1 + \frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)}$$

Разложим правильную рациональную дробь на элементарные дроби с неопределенными коэффициентами и представим ее в виде тождества

$$\frac{5x^2 - 6x + 1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{(x-3)}$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и отбросим знаменатели. Тогда получим

$$5x^2 - 6x + 1 = A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)$$

Тождество должно выполняться при любых значениях x . Выберем значения x , равные корням знаменателя, тогда получим:

$$\text{При } x = 0 \quad 1 = A(0-2)(0-3) + B \cdot 0(0-3) + C \cdot 0(0-2) \Rightarrow A = \frac{1}{6};$$

$$\text{При } x=2 \quad 5 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 1 = 9 = B \cdot 2(2-3) \Rightarrow B = -\frac{9}{2};$$

$$\text{При } x=3 \quad 5 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = 28 = C \cdot 3(3-2) \Rightarrow C = \frac{28}{3}$$

Таким образом, подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x} = 1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)}$$

Тогда исходный интеграл представляется в виде линейной комбинации элементарных дробей

$$\begin{aligned} I &= \int \left(1 + \frac{1}{6x} - \frac{9}{2(x-2)} + \frac{28}{3(x-3)} \right) dx = \\ &= \int 1 dx + \frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} - \frac{9}{2} \int \frac{dx}{(x-2)} + \frac{28}{3} \int \frac{dx}{(x-3)} = \\ &= x + \frac{1}{6} \ln|x| - \frac{9}{2} \ln|x-2| + \frac{28}{3} \ln|x-3| + c \end{aligned}$$

Пример д) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx$

Решение.

Подынтегральные функции таких интегралов, имеющих одинаковые выражения под знаками радикалов разных степеней, приводятся к рациональным функциям (рационализируются) с помощью замен переменной. Затем интегралы вычисляются с новой переменной. После чего в результате возвращаются к исходной переменной.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})} dx = [x-1 = t^{12} \Rightarrow dx = 12t^{11} dt] = \\ &= \int \frac{t^4 + t^3}{t^{12}(1+t^2)} 12t^{11} dt = \int \frac{t^2(t+1)}{(t^2+1)} dt = \int \frac{t^3+1}{t^2+1} dt = \int \left(1 - \frac{t-1}{t^2+1}\right) dt = \\ &= \int dt - \int \frac{t dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln|t^2+1| + \arctan t + c = \\ &= [t = \sqrt[12]{x-1}] = \frac{(\sqrt[6]{x-1})}{2} - \frac{1}{2} \ln|(\sqrt[6]{x-1}) + 1| + \arctan t \sqrt[12]{x-1} + c \end{aligned}$$

Пример е) $\int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx.$

Решение.

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\cos^3 x}{2 + \sin x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{2 + \sin x} = \left[\begin{array}{l} \text{подводим под знак дифференциала} \\ \cos x dx = d \left(\int \cos x dx \right) = d \sin x \end{array} \right] = \\ &= \int \frac{1 - \sin^2 x}{2 + \sin x} d \sin x = \left[\begin{array}{l} \text{рационализируем} \\ \text{заменой переменной} \\ t = \sin x \end{array} \right] = \int \frac{1 - t^2}{2 + t} dt = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{рациональную дробь} \\ \text{заложим на элементарные} \\ \text{дроби и многочлен} \end{array} \right] = \int \left(-t + 2 - \frac{3}{t+2} \right) dt = \\ &= -\frac{t^2}{2} + 2t - 3 \ln|t+2| + c = -\frac{\sin^2 x}{2} + 2 \sin x - 3 \ln(\sin x + 2) + c \end{aligned}$$

Задачи № 41-50

Задачи 41-50 посвящены вычислениям определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx = F(x) + c \right) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Конкретный пример решения задачи, аналогичной задачам №31-40 (КР-3).

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} &= \left[\begin{array}{l} \text{замена переменной} \\ x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt \\ \ln x = \ln e^t = t \ln e = t \end{array} \right] = \int_{t_H}^{t_B} \frac{e^t dt}{e^t(1+t^2)} = \int_{t_H}^{t_B} \frac{dt}{(1+t^2)} = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{замена пределов} \\ x_H = a = 1 = e^{t_H} \Rightarrow t_H = 0 \\ x_B = b = e = e^{t_B} \Rightarrow t_B = 1 \end{array} \right] = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan t \Big|_0^1 = \\ &= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Задачи № 51-60

В задачах № 51-60 необходимо с помощью определенных интегралов найти площади фигур, объемы тел и длины дуг плоских кривых.

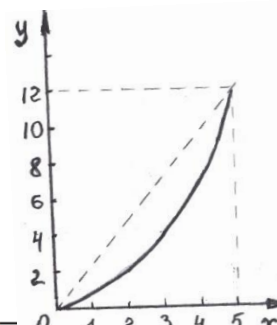
В качестве примера решения рассмотрим задачу определения длины дуги плоской кривой.

Пример.

Найти длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0; 5]$.

Решение. Строим кривую (см. рис.), для вычисления длины дуги используем готовую формулу

$$\begin{aligned} L &= \int_0^5 \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ y' &= \left(x^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{3}{2} \sqrt{x} \\ L &= \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}} dx = \left[\begin{array}{l} u = 1 + \frac{9}{4}x \Rightarrow du = \frac{9}{4}dx \\ x_H = 0 \Rightarrow u_H = 1; x_B = 5 \Rightarrow u_B = 1 + \frac{9}{4}x_B = \frac{49}{4} \end{array} \right] = \end{aligned}$$



$$= \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u} \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{335}{27} \approx 12,4$$

Проверка. Длина отрезка (пунктир), соединяющего концы кривой

$$L^* = \sqrt{5^2 + \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2} \approx 12,25$$

$L^* < L$ ($12,25 < 12,4$) – верно!

Задачи № 61-70

Задачи из 61-70 посвящены вычислению несобственных интегралов или определению их расходимости.

В задачах даны несобственные интегралы первого рода с бесконечным верхним пределом:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

Определяют сходимость так:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} [F(t) - F(a)]$$

Если предел конечен, то интеграл сходится, если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл является расходящимся.

Конкретный пример вычисления несобственного интеграла.

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\int_0^t \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \right) = \\ &= \left[x^2 + 2x + 1 + 1 = (x + 1)^2 + 1; \int_0^t \frac{d(x + 1)}{(x + 1)^2 + 1} = \arctan(x + 1) \right]_0^t \\ &= \arctan(t + 1) - \arctan 1 = \arctan(t + 1) - \frac{\pi}{4} \Bigg| = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \arctan(t + 1) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - \text{интеграл сходится} \end{aligned}$$

Если интеграл вычисляется сложно, то его сходимость можно определить, используя признак сравнения:

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[a; \infty)$ непрерывны и удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$ то из сходимости интеграла $\int_a^\infty g(x)dx$ следует сходимость интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$, из расходимости интеграла $\int_a^\infty f(x)dx$ следует расходимость $\int_a^\infty g(x)dx$.

Основываясь на данном признаке, при необходимости подынтегральную функцию $f(x)$ можно заменить более простой для интегрирования функцией и определить сходимость интеграла.

Конкретный пример аналогичный задачам № 31-40 с использованием признака сравнения.

Пример.

Установить сходимость интеграла $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$

Решение. Воспользуемся признаком сравнения. Для этого найдем функцию $g(x)$, превосходящую исходную подынтегральную функцию $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, но более простую для интегрирования.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{1}{x^4} + 1}} < \frac{1}{x^2}$$

При исследовании сходимости подынтегральную функцию $f(x) = \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ заменяем функцией $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Тогда получим

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_1^t x^{-2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right) = 1 - \text{интеграл сходится}$$

Значит и исходный несобственный интеграл сходится.

Задачи 71-80

В задачах № 71-80 необходимо найти все частные производные 2-го порядка функции нескольких переменных (ФНП) в фиксированной точке А (х,у).

Частные производные вычисляют по тем же правилам, с использованием тех же табличных производных, которые применяются при дифференцировании функций одной переменной. При этом дифференцирование ведут по одной

переменной, а остальные переменные ФНП считают условно постоянными величинами.

Для обозначения частных производных ФНП используют следующие условные обозначения. Например, для функции двух переменных $z = f(x, y)$ частные производные 1-го порядка обозначают так

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv z'_x \equiv f'_x(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv z'_y \equiv f'_y(x, y);$$

Смешанные частные производные 2-го порядка представляют так

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv z''_{xy} \equiv f''_{xy}(x, y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv z''_{yx} \equiv f''_{yx}(x, y);$$

Смешанные частные производные 2-го порядка обладают свойством

$$z''_{xy} = z''_{yx}$$

Частные производные 2-го порядка обозначают так

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv z''_{xx} \equiv f''_{xx}(x, y), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv z''_{yy} \equiv f''_{yy}(x, y);$$

Рассмотрим пример вычисления производных 2-го порядка.

Для функции $z = \sqrt{x^2 - y^2}$ найти все частные производные 2-го порядка в точке $A(5, -3)$.

Решение

1. Находим частные производные 1-го порядка для заданной функции

$$z'_x = \left(\sqrt{x^2 - y^2} \right)'_x \Big|_{y=\text{const}} = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2}} (x^2 - y^2)'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}};$$

$$z'_y = \left(\sqrt{x^2 - y^2} \right)'_y \Big|_{x=\text{const}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}};$$

2. Определяем смешанные частные производные

$$z''_{xy} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)'_y \Big|_{x=\text{const}} = x - \left(\frac{1}{x^2 - y^2} (-2y) \right) = \frac{2xy}{x^2 - y^2};$$

$$z''_{yx} = -\left(\frac{y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)'_x \Big|_{y=\text{const}} = -y \left(-\frac{2x}{x^2 - y^2} \right) = \frac{2xy}{x^2 - y^2}; \quad \text{если } z''_{xy} = z''_{yx}, \text{ то}$$

вычисления выполнены верно.

3. Вычисляем частные производные 2-го порядка

$$z''_{xx} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)'_x \bigg|_{y=const} = \frac{x' \sqrt{x^2 - y^2} - x(\sqrt{x^2 - y^2})'_x}{(\sqrt{x^2 - y^2})^2} = \frac{\sqrt{x^2 - y^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}$$

$$z''_{yy} = \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right)'_y = -\frac{\sqrt{x^2 - y^2} - y \frac{-y}{\sqrt{x^2 - y^2}}}{x^2 - y^2} = \frac{-x^2}{\sqrt{(x^2 - y^2)^3}}.$$

4. Находим числовые значения всех частных производных в фиксированной точке А (5,-3)

$$z''_x(A) = z'_x(5,-3) = \frac{5}{4}; \dots; z''_{yy} = z''_{yy}(5,-3) = -\frac{25}{32}$$