# <u>**Контрольная работа №1**</u>

## ***Тема 1. Линейная алгебра***

З а д а ч а 1-10

Необходимо решить систему уравнений (СЛАУ), представленную в задании в виде

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (1)$$

СЛАУ необходимо решить тремя способами.

Первый способ – <u>**нахождение неизвестных (корней) СЛАУ с помощью определителей по формулам Крамера**</u>

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - основной определитель из коэффициентов левой части СЛАУ;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ - первый вспомогательный определитель, который получают из основного определителя заменой первого столбца столбцом свободных членов.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ - соответственно, второй и третий вспомогательные определители.

Определители третьего порядка можно вычислить:

а) способом треугольников;

б) способом дополнительных столбцов;

в) способом разложения по элементам строки или столбца определителя;

г) способом приведения определителя к треугольному виду.

Последний способ является наиболее общим и используется при вычислении определителей третьего и более высоких порядков. При этом обнуляются элементы определителя ниже главной диагонали с помощью его свойств. После приведения к треугольному виду определитель вычисляют как произведение его элементов, лежащих на главной диагонали.

Окончательную проверку правильности вычисления неизвестных (корней) производят подстановкой их в любое уравнение из СЛАУ (1). Если корни вычислены правильно, то в результате получим тождество.

Более подробно методика вычисления корней по формулам Крамера приведена в учебном пособии *Вылегжанин Н.А., Пожидаев А.В. и др. Практикум по высшей математике для технических специальностей. Часть 1. – Новосибирск: издательство СГУПСа, 2011 – 228с; с. 40-45.*

Пример решения СЛАУ с помощью определителей по формулам Крамера.
Пусть дана СЛАУ вида:

$$\begin{cases} 17x + 18y + 6z = 4 \\ 10x + 13y + 6z = -4 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

Составляем основной определитель Δ из коэффициентов при неизвестных и вычисляем его согласно заданию разложением по первому столбцу без обнуления элементов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 18 & 6 \\ 10 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17\begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 10\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 13 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = 17(13 \cdot 1 - 2 \cdot 6) - 10(18 \cdot 1 - 2 \cdot 6) + 2(18 \cdot 6 - 13 \cdot 6) = 17$$

Проверяем основной определитель Δ способом треугольников:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 17 & 18 & 6 \\ 10 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 17 \cdot 13 \cdot 1 + 18 \cdot 6 \cdot 2 + 10 \cdot 2 \cdot 6 - 2 \cdot 13 \cdot 6 -$$
$$-2 \cdot 6 \cdot 17 - 10 \cdot 18 \cdot 1 = 17 \cdot 13 + 18 \cdot 12 + 10 \cdot 12 - 13 \cdot 12 -$$
$$-12 \cdot 17 - 10 \cdot 18 = 221 + 216 + 120 - 156 - 204 - 180 = 17$$

Составляем первый вспомогательный определитель и вычисляем его с предварительным приведением к треугольному виду. Равносильные математические преобразования проводим, используя свойства определителя.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 18 & 6 \\ -4 & 13 & 8 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ -1 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 0 & 31 & 12 \\ 0 & -34 & -11 \end{vmatrix} \xrightarrow{\times(\frac{34}{31})} =$$

$$= \left[\frac{34 \cdot 12}{31} - 11 = \frac{67}{31}\right] = 4\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ 0 & 31 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{67}{31} \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 \cdot 13 \cdot \frac{37}{31} = 268$$

Проверяем $\Delta_1$ способом дополнительных столбцов

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 18 & 6 \\ -4 & 13 & 8 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 18 & 6 \\ -1 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 18 \\ -1 & 13 \\ 2 & 2 \end{matrix}\Bigg| =$$

$$= 4(1\cdot 13\cdot 1 + 18\cdot 6\cdot 2 + 6\cdot(-1)\cdot 2 - 2\cdot 13\cdot 6 \overset{+}{-} 2 \overset{+}{\cdot} 6 \cdot \overset{+}{1} - 1\cdot(-1)\cdot 2 -$$
$$2\cdot 13\cdot 6 - 2\cdot 6\cdot 1 - 1\cdot(-1)\cdot 18) = 268$$

Составляем второй вспомогательный определитель и приводим к треугольному виду. Проверку преобразования строк определителя проводим, например, с помощью контрольного столбца.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 17 & 4 & 6 \\ 10 & -4 & 6 \\ 2 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 1 & 17 & 6 \\ -1 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 1 & 17 & 6 \\ -1 & 10 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 24 \\ 15 \\ 5 \end{matrix}\Bigg| \begin{matrix} \times(1)\ \times(-2) \\ \\ \\ \end{matrix} =$$

$$= -4\begin{vmatrix} 1 & 17 & 6 \\ 0 & 27 & 12 \\ 0 & -32 & -11 \end{vmatrix}\begin{matrix} 24 \\ 39 \\ -43 \end{matrix}\Bigg| \times\left(\frac{32}{27}\right) = \left[12\cdot\frac{32}{27} - 11 = \frac{87}{27}\right] = -4\begin{vmatrix} 1 & 17 & 6 \\ 0 & 27 & 12 \\ 0 & 0 & \frac{87}{27} \end{vmatrix} =$$

$$= -4\cdot 1\cdot 27\cdot\frac{87}{27} = -348$$

Аналогично находим $\Delta_3 = 296$

***Замечание.*** С помощью контрольного столбца проверяется правильность выполнения действий при элементарных преобразованиях. Если действия выполнены, верно, то должно выполняться правило суммы: при любых элементарных преобразованиях $i$-ой строки сумма всех изменяемых элементов этой строки слева должна равняться числовому значению изменяемого $i$-го элемента контрольного столбца. Контрольный столбец можно вводить и исключать на любом этапе преобразований, если дальнейшие преобразования простые, и вы уверены в их правильности. Контрольные столбцы используются далее при решении СЛАУ способом Гаусса с расширенной матрицей.

Для окончательной проверки выбираем, например, третье уравнение, в которое подставляем найденные корни. Если в результате получаем тождество (левая и правая части уравнения совпадают), то корни найдены верно.

В нашем примере для проведения проверки выбираем третье уравнение и в него подставляем найденные корни СЛАУ.

$2x + 2y + z = 8$ при $x = \frac{268}{17}$, $y = -\frac{348}{17}$, $z = \frac{296}{17}$ получаем

$$2\frac{268}{17} - 2\frac{348}{17} + \frac{296}{17} = 8$$

$268 - 348 + 148 = 68 \equiv 4\cdot 17$ – верно!

Второй способ - **<u>Решение СЛАУ матричным способом (с помощью обратной матрицы)</u>**

Представляем СЛАУ в матричной форме

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{13}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} => A \cdot X = B, \text{ где}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{ матрица коэффициентов при неизвестных}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{ матрица} - \text{столбец свободных членов,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{ матрица} - \text{столбец неизвестных}$$

Из СЛАУ в матричной форме при $\Delta = |A| \neq 0$ находят матрицу неизвестных по форме $X = A^{-1} \cdot B$, где $A^{-1}$ – обратная матрица, соответствующая матрице А.

Для вычисления обратной матрицы часто используют следующие способы:

а) с помощью присоединённой (союзной) матрицы;

б) с помощью элементарных преобразований объединенной матрицы.

При выполнении второй части задачи воспользуемся первым способом. Методику элементарных преобразований матрицы, применяемую во втором способе, рассмотрим в примере для третьей части задачи.

Алгоритм вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной (союзной) матрицы:

1. Если определитель матрицы коэффициентов СЛАУ не равен нулю ($\Delta = |\mathrm{A}| \neq 0$), то СЛАУ приводим к матричной форме $A \cdot X = B$.
2. Находим алгебраические дополнения (или миноры с соответствующими знаками) для всех элементов матрицы коэффициентов $A$ и формируем из них присоединённую (союзную) матрицу $\tilde{A}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} => \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{13} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

$A_{11}, A_{12}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{33}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{33}$ матрицы $A$;

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ , где $M_{ij}$ – минор элемента $a_{ij}$ матрицы $A$.

Минор $M_{ij}$ является определителем, который получают вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-го столбца матрицы или определителя более высокого порядка.

3. Находим обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

4. Правильность вычислений проверяем, используя равенство $A^{-1} \cdot A = E$ или $\tilde{A} \cdot A = |A| \cdot E$. Применение последнего равенства является предпочтительным, так как матричное умножение при этом производится с целыми числами.

Пример решения конкретной СЛАУ с помощью обратной матрицы

Имеем СЛАУ

$$\begin{cases} 17x + 18y + 6z = 4 \\ 10x + 13y + 6z = -4 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

1. Определитель матрицы коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 6 \\ 10 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ не равен нулю ($|A| = \Delta = 17$, см.1 способ), поэтому СЛАУ можно представить в матричной форме $A \cdot X = B$, где $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Находим миноры матрицы $A$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 13 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 13 - 12 = 1$ $\qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 10 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2$

$M_{13} = \begin{vmatrix} 10 & 13 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 20 - 26 = -6$ $\qquad M_{21} = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 18 - 12 = 6$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 17 - 12 = 5$ $\qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 17 & 18 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 34 - 36 = -2$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 13 & 6 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 18 & 1 \\ 13 & 1 \end{vmatrix} = 6(18 - 13) = 30$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 17 & 6 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = 6(17 - 10) = 42$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 17 & 18 \\ 10 & 13 \end{vmatrix} = 17 \cdot 13 - 180 = 41$$

3. Составляем союзную матрицу.

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{13} & -M_{32} & M_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 30 \\ 2 & 5 & -42 \\ -6 & 2 & 41 \end{pmatrix}$$

4. Проверяем правильность вычисления матрицы $\tilde{A}$

$$\tilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 30 \\ 2 & 5 & -42 \\ -6 & 2 & 41 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 18 & 6 \\ 10 & 13 & 6 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{11} = 1 \cdot 17 - 6 \cdot 10 + 30 \cdot 2 = 17$$

$$C_{12} = 1 \cdot 18 - 6 \cdot 13 + 30 \cdot 2 = 0$$

$$C_{13} = 1 \cdot 6 - 6 \cdot 6 + 30 \cdot 1 = 0$$

$$C_{21} = 2 \cdot 17 + 5 \cdot 10 - 42 \cdot 2 = 34 + 50 - 84 = 0$$

$$C_{22} = 2 \cdot 18 + 5 \cdot 13 - 42 \cdot 2 = 36 + 65 - 84 = 17$$

$$C_{23} = 2 \cdot 6 + 5 \cdot 6 - 42 \cdot 1 = 12 + 30 - 42 = 0$$

$$C_{31} = -6 \cdot 17 + 2 \cdot 10 + 41 \cdot 2 = -102 + 20 + 82 = 0$$

$$C_{32} = -6 \cdot 18 + 2 \cdot 13 + 41 \cdot 2 = -108 + 26 + 82 = 0$$

$$C_{33} = -6 \cdot 6 + 2 \cdot 6 + 41 \cdot 1 = -36 + 12 + 41 = 17$$

В результате получаем:

$$\tilde{A} \cdot A = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 17 \end{pmatrix} = 17 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 17 \cdot E = |A| \cdot E$$

Союзная матрица $\tilde{A}$ найдена верно.

5. Находим обратную матрицу $A^{-1} = \frac{1}{A} \cdot \tilde{A} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 30 \\ 2 & 5 & -42 \\ -6 & 2 & -41 \end{pmatrix}$ и определяем корни СЛАУ:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 & -6 & 30 \\ 2 & 5 & -42 \\ -6 & 2 & 41 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 1 \cdot 4 + (-6) \cdot (-4) + 30 \cdot 8 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot (-4) + (-42) \cdot 8 \\ (-6) \cdot 4 + 2 \cdot (-4) + 41 \cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 268 \\ -348 \\ 296 \end{pmatrix} => \begin{cases} x = \dfrac{268}{17} \\ y = -\dfrac{348}{17} \\ z = \dfrac{296}{17} \end{cases}$$

Корни СЛАУ, найденные первым и вторым способами совпадают.

Третий способ - **<u>Решение СЛАУ методом Гаусса с расширенной матрицей</u>**

Этот метод является наиболее общим и применяется для решения всех типов СЛАУ, имеющих решение.

Для решения неоднородной СЛАУ, представленной в матричной форме $A \cdot X = B$, используем следующий алгоритм:

1. Объединяем матрицу коэффициентов $A$ и матрицу-столбец свободных членов $B$, и получаем расширенную матрицу

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{array}\right)$$

2. С помощью элементарных преобразований расширенную матрицу $A^*$ приводим к ступенчатому виду:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} C_{11} & C_{12} & C_{13} & d_1 \\ 0 & C_{22} & C_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & C_{33} & d_3 \end{array}\right)$$

3. По ступенчатой матрице $A^*$ восстанавливаем эквивалентную систему уравнений, которая легко решается методом подстановки.

   К элементарным преобразованиям относятся:

   - перестановка строк и столбцов;
   - умножение всех элементов любой строки на одно и то же число;
   - прибавление ко всем элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число.

Элементарные преобразования матриц приводят к эквивалентным матрицам, которые могут различаться элементами и количеством строк, то имеют обязательно одинаковые числовые характеристики. Например, эквивалентные квадратные матрицы имеют одинаковые значения определителей. Эквивалентные матрицы соединятся знаком ~

Рекомендуется:

- конкретные виды элементарных преобразований показывать в условной графической форме (см. пример ниже);
- для контроля правильности промежуточных вычислений использовать контрольный столбец;
- при перестановке столбцов учитывать, что переставляются и неизвестные в СЛАУ, восстановленной по ступенчатой матрицы.

Пример решения конкретной СЛАУ способом Гаусса (с расширенной матрицей).

Имеем неоднородную СЛАУ

$$\begin{cases} 17x + 18y + 6z = 4 \\ 10x + 13y + 6z = -4 \\ 2x + 2y + z = 8 \end{cases}$$

1. Записываем расширенную матрицу

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 18 & 6 & 4 \\ 10 & 13 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \text{ поз.1}$$

2. Вводим контрольный столбец, элементы которого равны сумме элементов соответствующей строки (поз.2), затем переставляем строки и столбцы (поз.3 и 4).

*поз.2* *поз.3*

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 17 & 18 & 6 & 4 \\ 10 & 13 & 6 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{c|} 45 \\ 25 \\ 13 \end{array} \sim \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 1 & 8 \\ 10 & 13 & 6 & -4 \\ 17 & 18 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c|} 13 \\ 25 \\ 45 \end{array} \sim$$

*поз.4* *поз.5*

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 6 & 13 & 10 & -4 \\ 6 & 18 & 17 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{c|} 13 \\ 25 \\ 45 \end{array} \times(-6) \sim \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -52 \\ 0 & 6 & 5 & -44 \end{array}\right)\begin{array}{c|} 13 \\ -53 \\ -33 \end{array} \times(-6) \sim$$

*поз.6*

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & -52 \\ 0 & 0 & 17 & 268 \end{array}\right)\begin{array}{c|} 13 \\ -53 \\ 285 \end{array}$$

В 4$^{ой}$ позиции в матрице справа условно показаны операции, которые выполняются, чтобы получить нули в первом столбце (поз.5) и, затем, прийти к ступенчатой матрице (поз.6).

По ступенчатой матрице $A^*$ (поз.6) восстанавливаем эквивалентную СЛАУ

$$\begin{cases} z + 2y + 2x = 8 \\ \quad y - 2x = -52 \\ \quad\quad 17x = 268 \end{cases}$$

Решаем полученную СЛАУ способом подстановки

$$x = \frac{268}{17}, \qquad y = -52 + 2x = -52 + \frac{2 \cdot 268}{17} = -\frac{348}{17}$$

$$z = 8 - 2y - 2x = 8 - 2\left(-\frac{348}{17}\right) - 2 \cdot \frac{268}{17} = \frac{296}{17}$$

Найденные корни совпадают с полученными другими способами, приведёнными выше.

### *Тема 2: Векторная алгебра и аналитическая геометрия*

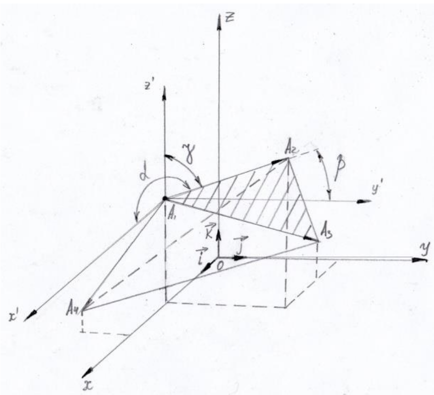
З а д а ч и 11-20

Даны координаты вершин пирамиды:

$A_1(x_1; y_1; z_1);\ A_2(x_2; y_2; z_2);\ A_3(x_3; y_3; z_3);\ A_4(x_4; y_4; z_4)$

Требуется найти:

1) Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ (его длину и направление);
2) Угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{A_1A_4}$;
3) Уравнение грани $A_1A_2A_3$;
4) Площадь грани $A_1A_2A_3$;
5) Угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$;
6) Уравнение прямой $A_1A_2$;
7) Объем пирамиды.



Сделать чертеж.

Пример решения задачи, аналогичной задачам №1-10.

При $A_1(2;0;3)$; $A_2(2;2;4)$; $A_3(1;2;1)$; $A_4(3;-2;1)$

1.1 Изображаем чертеж пирамиды по заданным точкам $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ с указанием векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$

1.2 Находим координаты векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{A_1A_3}$, $\overrightarrow{A_1A_4}$, которые равны проекциям этих векторов на координатные оси:

$$\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \vec{a} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1) = (2-2;\ 2-0;\ 4-3) = (0;2;1) = (a_x; a_y; a_z)$$

Аналогично:

$$\overrightarrow{A_1A_3} \equiv \vec{b} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1) = (1-2;\ 2-0;\ 1-3) = (-1;2;-2) = (b_x; b_y; b_z)$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} \equiv \vec{c} = (x_4 - x_1;\ y_4 - y_1;\ z_4 - z_1) = (3-2;\ -2-0;\ 1-3) = (1;-2;-2) = (c_x; c_y; c_z)$$

1.3 Определяем длины векторов $\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{A_1A_4} = \vec{c}$

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \vec{c} = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$$

1.4 Вычисляем направляющие косинусы углов между вектором $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$ и ортами осей координат. Указанные углы определяют направление вектора $\overrightarrow{A_1A_2}$ в аналитической форме.

$$\cos\alpha = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{i}}) = \frac{a_x}{a} = \frac{0}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\beta = \cos(\widehat{\vec{a},\vec{j}}) = \frac{a_y}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{k}}\right) = \frac{a_z}{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

**Замечание!** На чертеже углы *α, β, γ* показаны относительно осей $A_1x'||0x$, $A_1y'||0y$, $A_1y'||0y$, так как при параллельном переносе осей указанные углы не изменяются

2. Находим угол между векторами $\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \vec{a}$ и $\overrightarrow{A_1A_4} \equiv \vec{c}$, используя скалярное произведение векторов.

В общем случае $\cos(\vec{a},\vec{c}) = \cos\varphi = \frac{a_x c_x + y c_y + z c_z}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}$

В данном примере:

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot 1 + 2\cdot(-2) + 1\cdot(-2)}{\sqrt{5}\cdot 3} = -\frac{6}{3\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

3. Определяем уравнение грани $A_1A_2A_3$. Грань $A_1A_2A_3$ (на чертеже заштрихована) является частью плоскости, проходящей через заданную точку $A_1(x_1, y_1, z_1)$.

Тогда уравнение плоскости в общем виде можно представить так:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

Векторы $\overrightarrow{A_1A_2} \equiv \vec{a}$ и $\overrightarrow{A_1A_3} \equiv \vec{b}$ лежат в указанной плоскости. Вектор нормали к плоскости $\vec{n} = (A, B, C)$ ортогонален плоскости и векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащим в этой плоскости. Поэтому $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$.

В данном примере:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k} \Rightarrow \vec{n} = (2, -1, 2)$$

Тогда уравнение грани $A_1A_2A_3$, как плоскости, проходящей через точку $A_1(2; 0; 3)$ с нормалью $\vec{n} = (A, B, C) = (2, -1, 2)$, будет иметь вид:

$$2(x - 2) - 1(y - 0) + 2(z - 3) = 0$$

$$2x - 4 - y + 2z - 6 = 0 \Rightarrow 2x - y + 2z - 10 = 0.$$

Примечание. Для проверки рекомендуется определить уравнение грани как плоскости, проходящей через три заданные точки $A_1$, $A_2$, $A_3$.

4. Находим площадь грани $A_1A_2A_3$, используя векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Это произведение по модулю равно площади параллелограмма, построенного на этих векторах. Площадь грани $A_1A_2A_3$ составляет половину этой площади $S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -7\vec{i} - 1\vec{j} + 2k$$

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + 1^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{54}}{2} \text{ кв.ед.}$$

5. Находим угол между ребром $A_1A_4$ и гранью $A_1A_2A_3$,поэтому, искомый угол находят по формуле:

$$\sin(\widehat{\vec{c},\vec{n}}) = \frac{c_x n_x + c_y n_y + c_z n_z}{\sqrt{2_1^2 + c_2^2 + c_3^2} \cdot |\vec{c}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) + (-2) \cdot 2}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot 3} =$$

$$= \frac{2 + 2 - 4}{3 \cdot 3} = 0$$

Ребро $A_1A_4$ перпендикулярно грани $A_1A_2A_3$.

6. Определяем уравнение прямой $A_1A_2$. Прямая проходит через точку $A_1(x_1; y_1; z_1)$ и совпадает с линией действия вектора $A_1A_2 = \vec{a}$. Тогда, принимая вектор $\vec{a}$ за направляющий вектор прямой, можно записать каноническое уравнение прямой $A_1A_2$:

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$$

В данном примере $\vec{a} = (0, 2, 1)$, точка $A_1(2, 0, 3)$. Тогда каноническое уравнение прямой $A_1A_2$ имеет вид:

$$\frac{x - 2}{0} = \frac{y - 0}{2} = \frac{z - 3}{1}$$

Общее уравнение прямой в пространстве имеет вид: $\begin{cases} x - 2 \\ y - 2z + 6 = 0 \end{cases}$

7. Находим объем пирамиды $A_1A_2A_3A_4$.

$$V = \frac{1}{6}\left|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right| = \frac{1}{6}|\Delta|$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}$$
$$=$$
$$=(-4-(-2)\cdot 1)+(-4-2)=-8$$
$$V=\frac{1}{6}|\Delta|=\frac{8}{6}\text{ед}^3$$

## З а д а ч и № 21-30

Эти задачи на составление уравнений прямых на плоскости, удовлетворяющих заданным условиям, не имеют общего алгоритма решения.

При их решении необходимо использовать основные расчетные формулы и комбинации известных решений основных задач для прямых на плоскости. (см., например, *Вылегжанин И.А., Пожидаев А.В., Остроменский П.И. и др. Практикум по высшей математике для технических специальностей. Часть 1 – Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2011. – 228с. – с. 146-153.*)

Рассмотрим решения некоторых задач, аналогичных задачам №11-20 КР-1.

Задача 1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x+y-2=0,\ 3x+2y-5=0$ перпендикулярно прямой $3x+4y-12=0$.

*Решение.* Находим координаты точки пересечения прямых из решения системы линейных уравнений (СЛАУ):

$$\begin{cases} x+y-2=0 \\ 3x+2y-5=0 \end{cases} => \begin{cases} x+y=2 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$$

Решаем СЛАУ по формулам Крамера: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2-3=-1$

$\Delta_1=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=4-5=-1$ $\qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=5-6=-1$

$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1$ $\qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-1}{-1}=1$

Точка пересечения прямых – т. $A(1,1)$ принадлежит прямой, уравнение которой необходимо найти. Поэтому уравнение искомой прямой будем искать в виде $y-y_A=k_2(x-x_A)$.

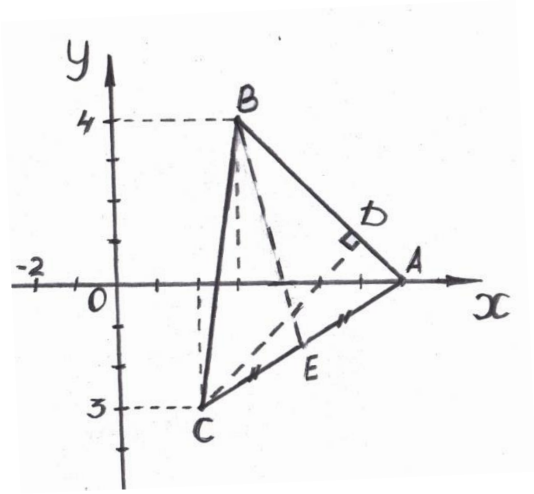
Прямые ортогональны по условию, поэтому, угловой коэффициент $k_2=-\frac{1}{k_1}$, где $k_1$ - угловой коэффициент прямой $3x+2y-5=0$. При этом $k_1=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}$. Тогда $k_2=\frac{4}{3}$ и уравнение искомой прямой будет иметь вид:

$y-1=\frac{4}{3}(x-1) => 3y-3=4x-4 => -4x+3y+1=0$

Задача 2. Дан треугольник с вершинами: $A(7;0), B(3;4\ ), C(2;-3)$.

Необходимо составить уравнения стороны $AB$, высоты $CD$ и медианы $BE$. Показать чертеж.

*Решение.* Строим чертеж треугольника $ABC$.




Коэффициенты точек $A$ и $B$ известны. Уравнение прямой $AB$ найдем как уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}=\frac{x-7}{3-7}=\frac{y-0}{4-0}$$

$y=4\frac{x-7}{(-4)} => y=7-x$ - уравнение стороны $AB$.

Высоту $CD$ как прямую, проходящую через точку $C$, можно представить уравнением $y-y_c=k_{CD}(x-x_c) => y+3=k_{CD}(x-2)$.

Уравнение прямой $AB$ $y=7-x$ известно, поэтому угловой коэффициент этой прямой $k_{AB}=-1$. Прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны ($AB \perp CD$), поэтому $k_{CD}=-\frac{1}{k_{AB}}=1$. Таким образом, уравнение высоты $CD$ будет иметь вид:

$$y+3=1\cdot x-2 => y=x-5.$$

Точка $E$ делит сторону $AB$ пополам. Координаты точки $E$ равны:

$$x_E=\frac{x_A-x_C}{2}=\frac{7+2}{2}=4{,}5 \qquad y_E=\frac{y_A-y_C}{2}=\frac{0-3}{2}=-1{,}5.$$

Уравнение медианы:

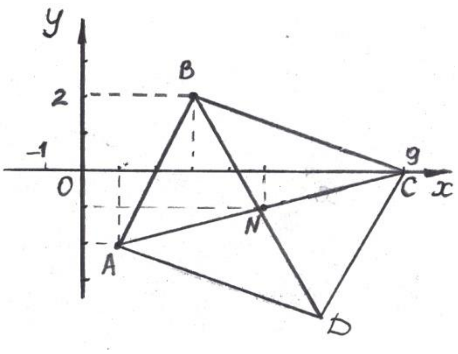
$$\frac{x-x_A}{x_B-x_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A} => \frac{x-7}{4{,}5-7}=\frac{y-0}{-1{,}5+0} => \frac{x-7}{-2{,}5}=\frac{y}{-1{,}5}$$

$2{,}5y=1{,}5x+7\cdot 1{,}5 => 1{,}5x-2{,}5y=-10{,}5 => 3x-5y=-21$

Задача 3. Даны две смежные вершины параллелограмма $A(1;-2), B(3;2)$ и точка $N(5;-1)$ пересечения диагоналей. Найти две другие вершины параллелограмма. Построить параллелограмм.

*Решение.* Точка пересечения диагоналей $N$ делит диагонали пополам.

$$x_N = \frac{x_A - x_C}{2} => x_C = 2x_N - x_A \quad y_N = \frac{y_A - yx_C}{2} => y_C = 2y_N - y_A$$




$x_C = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

$y_C = 2 \cdot (-1) + 2 = 0$

Аналогично $x_D = 2x_N - x_B = 2 \cdot 5 - 3 = 7$

$y_D = 2y_N - y_B = 2 \cdot (-1) - 2 = 4$

Уравнения диагоналей $BD$ и $AC$ можно представить так:

$$\frac{y - y_B}{y_D - y_B} = \frac{x - x_B}{x_D - x_B} = \frac{y - 2}{-4 - 2} = \frac{x + 2}{7 + 2}$$

$$(y - 2) \cdot 9 = -6 \cdot (x + 2)$$

$$9y - 18 = -6x - 12$$

$$6x + 9y - 6 = 0$$

$2x + 3y - 2 = 0$ - уравнение диагонали $BD$

Аналогично найдем уравнение диагонали $AC$.

$$\frac{y - y_A}{y_C - y_A} = \frac{x - x_A}{x_C - x_A} = \frac{y + 2}{0 + 2} = \frac{x - 1}{9 - 1}$$

$$8(y + 2) = 2(x - 1)$$

$$4y + 8 = x - 1$$

Окончательно уравнение диагонали $AC$ будет иметь вид:

$$x - 4y - 7 = 0$$

З а д а ч и № 31-40

В указанных задачах необходимо составить уравнения линий на плоскости (прямых или кривых второго порядка), соответствующих заданным условиям.

В силу большого разнообразия условий, которым должны удовлетворять искомые линии, единый алгоритм решения таких задач отсутствует.

Уравнения линий можно получить из соотношений для расстояний, связывающих заданные фиксированные точки и текущую точку линии.

Рассмотрим решения задач, аналогичных задачам, заданным в КР-1.

Задача 1. Составить уравнение линии, равноудаленной от двух данных точек $M_1(-2;4)$ и $M_2(6;\ 8)$.

*Решение.* Пусть точка $N(x;y)$ текущая точка искомой линии. Определяем расстояния $M_1N$ и $M_2N$ и приравниваем их:

$M_1N = M_2N => \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2} =>$

$\left(\sqrt{(x+2)^2+(y-4)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}\right)^2$

$(x+2)^2+(y-4)^2 = (x-6)^2+(y-8)^2$

$x^2+x+4+y^2-8y+16 = x^2-12x+36+y^2-16y+64$

$4x+20+12x+16y-8y-64-36 = 0$

$16x+8y-80 = 0$

$2x+y-10 = 0$

Таким образом, множество текущих точек $N(x;y)$, удовлетворяющих условиям задачи, является прямой линией.

Задача 2. Составить уравнение линии, каждая точка из которой удалена от точки $M_1(6;0)$ втрое дальше, чем от точки $M_2(\frac{2}{3};0)$.

*Решение.* Пусть точка $N(x;y)$ - текущая точка искомой линии. По условию $M_1N = 3M_2N$.

$M_1N = \sqrt{(x-6)^2+y^2}$ $\qquad$ $M_2N = \sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2}$

$$\left(\sqrt{(x-6)^2+y^2}\right)^2 = \left(3\cdot\sqrt{\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2}\right)^2$$

$$(x-6)^2+y^2 = 9\left(\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+y^2\right)$$

$$x^2-12x+36+y^2 = 9\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{9}+y^2\right)$$

После упрощения полученного равенства получим уравнение окружности $x^2+y^2=4$ с центром в начале координат.

З а д а ч и № 41-50

Задача. Дано алгебраическое уравнение линии

$$25x^2 - 16y^2 + 100x + 32y - 316 = 0$$

Это уравнение необходимо привести к каноническому виду. Затем в старой (исходной) системе координат построить каноническую систему координат и кривую линию по каноническому уравнению.

*Решение.* Используя способ дополнения до полного квадрата, преобразуем заданное уравнение к почти - каноническому виду.

$$25(x^2 + 4x) - 16(y^2 + 2y) - 316 = 0$$

$$25(x^2 + 4x + 4 - 4) - 16(y^2 + 2y + 1 - 1) - 316 = 0$$

$$25(x+2)^2 - 100 - 16(y+1)^2 + 16 - 316 = 0$$

$$25(x+2)^2 - 16(y+1)^2 - 400 = 0$$

$$\frac{(x+2)^2}{16} - \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

Получено почти каноническое уравнение гиперболы в «старой» (исходной) системе координат. Центр симметрии гиперболы в этой системе координат смещен и находится в точке $O(-2;1)$.

Если принять $x + 2 = X,\ y + 1 = Y$, то в новой (канонической) системе координат *XOY* каноническое уравнение гиперболы будет иметь вид

$$\frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{25} = 1$$

Построение гиперболы начинаем с изображения двух систем координат: исходной («старой») *Cxy* и параллельно-смещенной «новой» (канонической) системы координат *OXY*.

В новых осях *OXY* строим прямоугольник со сторонами $2a = 8;\ 2b = 10$, где $a$ и $b$ – длины полуосей гиперболы. $a = \sqrt{16} = 4,\ b = \sqrt{25} = 5$.

Диагонали параллелограмма являются асимптотами для ветвей гиперболы. При $X \to \pm\infty$ ветви гиперболы неограниченно приближаются к асимптотам.

Вершины ветвей гиперболы (точки $A_1$ и $A_2$) лежат в точках пересечения оси *OX* вертикальными сторонами прямоугольника.

Учитывая, что гипербола имеет центр симметрии, находим координаты промежуточных точек:

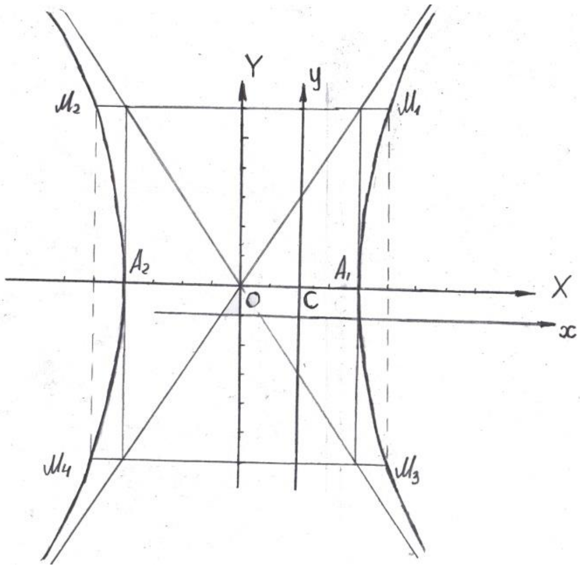
При $Y = 5$ $\quad \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{25} = 1 \Rightarrow X = \pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5{,}64$

В результате имеем точки $M_1(5{,}64;\ 5)$ и $M_2(-5{,}64;\ 5)$

При $Y = -5$ $\quad \frac{X^2}{16} - \frac{Y^2}{25} = 1 \Rightarrow X = \pm 4\sqrt{2} \approx \pm 5{,}64$

Тогда получим точки $M_3(5{,}64;\ 5)$ и $M_4(-5{,}64;\ 5)$

По найденным точкам строим ветви гиперболы, плавно приближая их к наклонным асимптотам после точек $M_1,\ M_2, M_3$ и $M_4$.




***Тема: Введение в математический анализ***

З а д а ч и № 51-60

Необходимо найти пределы нижеследующих функций одной переменной (без правила Лопиталя).

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}$

б) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

<u>Пример а)</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}$

*Решение.* Определяем вид неопределенности. При формальных операциях с бесконечностями обращаемся с ними как с бесконечно большими функциями.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}=\left[\frac{2\infty^3+5\infty}{7\infty^3-1}=\frac{\infty^2\left(\infty+\frac{1}{\infty}\right)}{\infty^3}=\frac{\infty^2\cdot\infty}{\infty^3}=\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(7-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2}{7}$$

Бесконечно малыми функциями $\left(\frac{5}{x^2};\frac{1}{x^3}\right)$ пренебрегаем, так их пределы всегда равны нулю. При формальных операциях с нулями обращаемся с ними как с бесконечно малыми.

<u>Пример б)</u>

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}\cdot\frac{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3+t-3+t}{2t\left(\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{2t\left(\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

<u>Пример в)</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}=\left[\frac{1-1}{0^2}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 6x\cdot\sin(-x)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}\cdot\frac{6}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=12$$

<u>Пример г)</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\leftarrow\begin{matrix}\text{неопределенность}\\ \text{общего вида}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{x+3}=[1^\infty]=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)(x+3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=4\right]=e^4$$