МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2 (МЛ, 1 курс, 2 семестр)

Тема «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Числовые и степенные ряды. Теория вероятностей.»

Задача №1. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные).

а) $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy=0$; б) $\frac{tg\, y\, dx}{\cos^2 x} + \frac{tg\, x\, dy}{\cos^2 y} = 0$;

в) $y\text{-}x\frac{dy}{dx} = x + y\frac{dy}{dx}$; г) $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0)=\ln 5$.

Решение.

а) $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy=0$. Преобразуем данное уравнение:

$y(1-x^2)dy=-x(y^2+1)dx$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{-x\,dx}{1-x^2}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int\frac{y\,dy}{y^2+1} = -\int\frac{x\,dx}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln C,$$

$y^2+1=C|x^2-1|$,

$y^2=C|x^2-1|-1$.

Следовательно, общим решением исходного уравнения является $y = \pm\sqrt{C|x^2-1|-1}$

б) $\frac{tg\, y\, dx}{\cos^2 x} + \frac{tg\, x\, dy}{\cos^2 y} = 0$.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{dx}{\cos^2 x \cdot tg\, x} + \frac{dy}{\cos^2 y \cdot tg\, y} = 0,$$

$\ln|\mathrm{tg}\, x| + \ln|\mathrm{tg}\, y|=\ln C$.

Общий интеграл исходного уравнения:

tg x tg y=C.

в) $y\text{-}x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$.

Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x + y}.$$

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки y=tx. $y' = t'x + t$. Далее находим:

$$t' x + t = \frac{t\text{-}1}{t + 1},$$

$$t' x = \frac{t\text{-}1}{t + 1} - t,$$

$t' x = -\dfrac{t^2 + 1}{t + 1}$. Данное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{t + 1}{t^2 + 1} dt = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2 + 1} + \int \frac{dt}{t^2 + 1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|t^2 + 1| + arctg\,t = -\ln x + \ln C,$$

$$arctg\ t = \ln\frac{C}{x} - \ln\sqrt{t^2 + 1},$$

$arctg\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{|C|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ — общий интеграл исходного уравнения.

г) $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0)$=ln 5.

Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1 - x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x - 1)}{1 - x} + \frac{e^{-x}}{1 - x},$$

$\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^{-x}}{1 - x}$. Полученное уравнение линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки y=$u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$. Имеем:

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v+u(v'+v)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

1) Найдём $v(x)$ из условия:

$$v'+v=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=-v,$$

$\ln v=-x$,

$v=e^{-x}$.

2) Подставляем

полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*):

$$u'v=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$e^{-x}\frac{du}{dx}=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$du=\frac{dx}{1-x},$$

$u=-\ln|1-x|+\ln C$,

$$u=\ln\frac{C}{|1-x|}$$

Тогда $y=e^{-x}\cdot\ln\frac{C}{|1-x|}$ является общим решением исходного уравнения.

Для нахождения частного решения найдём C, используя начальное условие, т.е.

$\ln 5=e^{0}\cdot\ln\frac{C}{|1-0|}$,

$\ln 5=\ln C$.

Следовательно, $C=5$. Частное решение исходного уравнения имеет вид: $y=e^{-x}\cdot\ln\frac{5}{|1-x|}$.

Задача №2. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

а) $y''(x+2)^5=1$, $y(-1)=\frac{1}{2}$, $y'(-1)=-\frac{1}{4}$; б) $y''(e^x+1)+y'=0$;

в) $y^3 y'' = -1$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Решение.

а) $y''(x+2)^5 = 1$, $y(-1)=\frac{1}{2}$, $y(-1)=-\frac{1}{4}$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к первому типу. Выразим вторую производную и два раза проинтегрируем полученную функцию.

$y' = \int \frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1$;

$y = \int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1\right)dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

Воспользовавшись начальными условиями, определим значения C_1 и C_2:

$y(-1) = \frac{1}{12} - C_1 + C_2 = \frac{1}{12}$; $C_1 - C_2 = 0$;

$y'(-1) = -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4}$;

$C_1=0$; $C_2=0$.

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$y = \frac{1}{12(x+2)^3}$.

б) $y''(e^x+1) + y' = 0$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся ко второму типу (нет явно y). Сделаем замену $y' = p$, $y'' = p'$. Тогда $p'(e^x+1) = -p$. Данное уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{dp}{p} = -\frac{dx}{e^x+1}$;

$\ln|p| = \ln(e^x+1) - \ln e^x + \ln C_1$;

$p = C_1 \frac{e^x+1}{e^x}$.

Возвращаемся к замене, т.е. $\frac{dy}{dx} = C_1\frac{e^x+1}{e^x}$. Из данного уравнения с разделяющимися переменными найдём y.

$y = C_1 \int \frac{e^x+1}{e^x} dx = C_1(x - e^{-x}) + C_2$;

$y = C_1 x - \frac{C_1}{e^x} + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

в) $y^3 y'' = -1$, $y(1)=1$, $y'(1) = 0$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к третьему типу (нет явно x). Сделаем замену $y' = p$, $y'' = p \cdot p'$. Тогда $y^3 \cdot p \cdot p' = -1$. Данное уравнение с разделяющимися переменными.

$$pdp = -\frac{dy}{y^3};$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{y^2} + C_1;$$

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1;$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}.$$

Возвращаемся к замене, т.е. $y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$. Из данного уравнения с разделяющимися переменными найдём y.

$$dx = \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1 y^2}};$$

$$x = \pm\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1 y^2}} + C_2;$$

$x = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+C_1 y^2} + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

Определим значения C_1 и C_2. использовав начальные данные. При x=1, y=1 и $y' = 0$ имеем:

$$1 = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1} + C_2,$$

$$0 = \pm\sqrt{1+2C_1}.$$

Откуда $1+2C_1=0$, $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2=1$.

Следовательно, искомое решение имеет вид

$x = \pm\sqrt{1-y^2} + 1$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Задача №3. Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

а) $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$;   б) $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

Решение.

а) $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$. Данное уравнение — линейное неоднородное. Его решение запишем в виде: $y = \tilde{y} + y^*$.

Найдём $\tilde{y}$ как общее решение однородного линейного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение: $k^2 - 3k - 4 = 0$; k_1=4; k_2= -1.

$\tilde{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x}$.

Составим y^* по функции $f(x)=6xe^{-x}$, стоящей в правой части исходного уравнения. Записываем структуру его частного решения (см. таб.2 II 2. где проверяем α=-1 является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=1)

$y^* = e^{-x} x(Ax + B) = e^{-x}(Ax^2 + Bx)$.

Коэффициенты A и B определим методом неопределённых коэффициентов. Для этого находим:

$(y^*)' = (2Ax + B)e^{-x} - (Ax^2 + Bx)e^{-x}$;

$(y^*)'' = 2Ae^{-x} + (Ax^2 + Bx)e^{-x} - 2(2Ax + B)e^{-x}$.

Подставим найденные выражения для $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение и, разделив обе его части на e^{-x}, приравняем коэффициенты при x^2, x^1 и x^0. Получим систему, из которой найдём коэффициенты A и B. Таким образом, в соответствии с изложенным: $A = -\frac{3}{5}$; $B = -\frac{6}{25}$.

Тогда $y^* = -\left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$.

Общее решение данного неоднородного уравнения:

у=$C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \left(\frac{3}{5}x^2 + \frac{6}{25}x\right)e^{-x}$.

б) $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

Данное уравнение — линейное неоднородное. Его решение запишем в виде: $y = \tilde{y} + y^*$.

Найдём $\tilde{y}$ как общее решение однородного линейного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0$; k_1=0; k_2= -1.

$\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{-x}$.

Составим y^* по функции $f(x)$=5x+cos2x, стоящей в правой части исходного уравнения. Данная функция представляет собой сумму функций $f_1(x)$=5x и $f_2(x)$=cos2x. Им соответсвуют два частных решения:

$y_1^* = (Ax + B)x = Ax^2 + Bx$ (см. таб.2 I 2. где проверяем α=0 является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=1);

$y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x$ (см. таб.2 IV 1. где проверяем α=$\pm 2i$ является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=0).

Т.е. $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax^2 + Bx + M\cos 2x + N\sin 2x$.

Находим $(y^*)' = 2Ax + B - 2M\sin 2x + 2N\cos 2x$;

$(y^*)'' = 2A - 4M\cos 2x - 4N\sin 2x$.

Подставляем выражения для $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты A, B, M, N:

$A = \frac{5}{2}$, B= -5; $M = -\frac{1}{5}$; $N = \frac{1}{10}$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид:

$$y^* = \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x,$$

а его общее решение:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + \frac{5}{2}x^2 - 5x - \frac{1}{5}\cos 2x + \frac{1}{10}\sin 2x.$$

Задача №4. Исследовать сходимость числовых рядов; знакочередующиеся ряды исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot lnn}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; з) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

Решение.

а) Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, т.к. $q=\frac{1}{2}<1$. Имеем $\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}$. Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится.

б) Здесь $u_n=\sqrt[3]{n}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n=\frac{1}{n}$, который расходится, так так это гармонический ряд. Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится.

в) Применим предельный признак сравнения. Так как по первому замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot tg\frac{\pi}{5n}=\frac{\pi}{5}\neq 0,$$

то исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом $v_n=\frac{1}{n}$.

г) Находим:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $l=0<1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

д) Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим признак Коши.

Вычисляем $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд.

е) Воспользуемся интегральным признаком. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x\cdot\ln x}$ удовлетворяет условиям признака. Находим

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\left|\ln x\right|\Big|_2^{+\infty}=+\infty .$$

Значит, ряд с общим членом $u(n)=\dfrac{1}{n\cdot\ln n}$ расходится.

ж) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $1>\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{7}>...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n-1}=0$. Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum\dfrac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\ln(2x-1)\Big|_1^{\beta}=\frac{1}{2}\lim_{\beta\to\infty}\ln(2\beta-1)=\infty$, заключаем, что ряд с положительными членами расходится.

Следовательно, данный ряд сходится условно.

з) Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α – любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum\dfrac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum\dfrac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\dfrac{|\cos n\alpha|}{2^n}\le\dfrac{1}{2^n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения, ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Задача № 5. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Решение.

а) Заданный ряд неполный, поскольку содержит не все степени переменной x (только нечетные). Воспользуемся для данного ряда признаком Даламбера, имеем:

$$|u_n|=\frac{|x^{2n-1}|}{2n-1},\quad |u_{n+1}|=\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|x^{2n-1}|}=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1<x<1$, т.е. $R=1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ имеем ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$, который сходится по признаку Лейбница, так как $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$.

При $x=1$ имеем ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ – это тоже сходящийся по признаку Лейбница ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок [–1; 1];

б) Находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)\cdot 2^n}{1}\right|=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2<x+2<2$, т.е. при $-4<x<0$.

При $x=-4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x=0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуинтервал

[–4; 0).

Задача №6.

В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путём жеребьёвки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

Решение. Число всех равновозможных случаев определения двух соперников из 20 участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е. C_{20}^2. Число групп по 2 человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^2. Число групп, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_6^2. Из 4 мастеров может быть составлено C_4^2 пар. Сумма $C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}$.

Ответ: $\frac{33}{95}$.

Задача№7.

В совхозную ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные — в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается два трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима:

а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

Решение. а) Обозначим через А событие, состоящее в том, что выбранный трактор требует замены двигателя. Согласно условиям задачи, вероятность того, что первым будет отобран трактор, требующий замены двигателя $\mathrm{P(A)} = \frac{6}{15} = 0{,}4$.

Вероятность того, что второй выбранный трактор также потребует замены двигателя, $P(A) = \frac{5}{14} \approx 0{,}36$.

Тогда вероятность события, состоящего в том, что первый и второй отобранные тракторы потребуют замены двигателя $P(A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{14}=\frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

б) Обозначим через *B* событие, состоящее в том, что только один из двух выбранных тракторов требует замены двигателя. Это событие заключается в том, что первый трактор нуждается в замене двигателя, а второй – лишь в замене отдельных узлов либо первый трактор требует замены отдельных узлов, а второй – замены двигателя, тогда $P(B)=\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{14}+\frac{9}{15}\cdot\frac{6}{14}=\frac{18}{35}$;

Ответ: $\frac{18}{35}$.

в) Обозначим через *C* событие, состоящее в том, что ни один трактор не требует замены двигателя. Вероятность того, что первый трактор не потребует замены двигателя, равна $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$. Вероятность того, что второй трактор также потребует замены двигателя, $\frac{8}{14}=\frac{4}{7}$. Тогда вероятность того, что оба трактора потребуют замены двигателя, $P(C)=\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}=\frac{12}{35}$. Вероятность того, что хотя бы для одного трактора потребуется замена двигателя $P=1-P(C)=1-\frac{12}{35}=\frac{23}{35}$.

Ответ: $\frac{23}{35}$.

Задача№8.

При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5% дальтоников, а среди женщин — 0,25%. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

Решение. а) Пусть событие А состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: B_1 — выбранное лицо является мужчиной; B_2 — выбранное лицо является женщиной.

Из условия задачи: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$; $P_{B_1}(A) = 0{,}05$; $P_{B_2}(A) = 0{,}0025$.

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot P_{B_k}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}2625;$$

Ответ: 0,263

б) Условная вероятность произошедшего события А при осуществлении гипотезы B_1 определяется по формуле Байеса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{n} B_k \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} \approx 0{,}952388.$$

Ответ: 0,952

Задача№9.

При измерении окружности груди 25 спортсменов установлено, что у троих этот объём равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. СВ *X* – окружность груди спортсмена. Записать закон распределения СВ *X*.

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найти среднюю величину окружности груди спортсмена и вероятность того, что у случайно отобранного спортсмена окружность груди будет не менее 96 см.

Найти функцию распределения СВ и построить ее график.

Решение. Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди, равной 88 см, p_1=3/25=0,12.

Аналогично вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди 92 см p_2=4/25=0,16 и т.д.

Получаем закон распределения в виде таблицы:

X	88	92	96	98	100
p	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28

Найдём числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$M(X) = 88 \cdot 0{,}12 + 92 \cdot 0{,}16 + 96 \cdot 0{,}2 + 98 \cdot 0{,}24 + 100 \cdot 0{,}28 = 96;$$

$$M(X^2) = 88^2 \cdot 0{,}12 + 92^2 \cdot 0{,}16 + 96^2 \cdot 0{,}2 + 98^2 \cdot 0{,}24 + 100^2 \cdot 0{,}28 =$$

$= 9231{,}68;$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 9231{,}68 - 96^2 = 15{,}68;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}96}.$$

Средняя величина окружности груди спортсмена равна математическому ожиданию, т.е. 96 см.

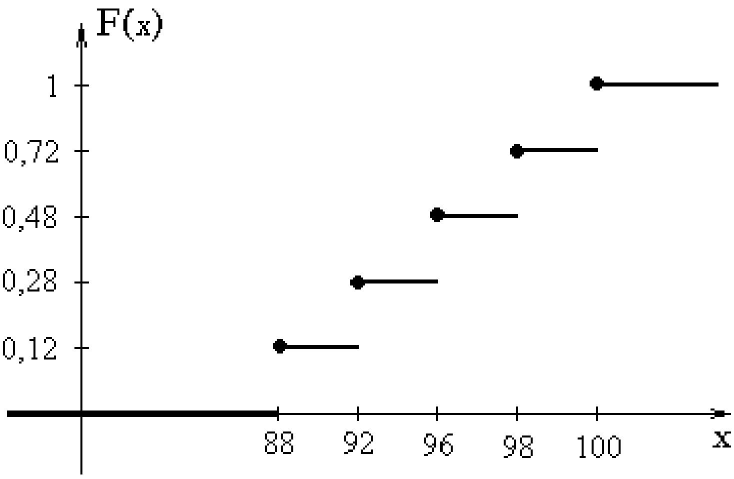
Вероятность того, что у случайно отобранного спортсмена окружность груди будет не менее 96 см найдем следующим образом:

$P(X \geq 96) = 0{,}2 + 0{,}24 + 0{,}28 = 0{,}72.$

Найдём функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 88; \\ 0{,}12; & 88 < x \leq 92; \\ 0{,}28; & 92 < x \leq 96; \\ 0{,}48; & 96 < x \leq 98; \\ 0{,}72; & 98 < x \leq 100; \\ 1; & x > 100. \end{cases}$$

Построим её график:



Задача№ 10.

Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ A\cdot\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$ Требуется:

а) найти коэффициент *A*;

б) найти *M(X), D(X), σ(X)*;

в) найти функцию распределения *F(x)*;

г) построить графики *F(x)* и *f(x)*, рассматривая не менее 5 точек на интервале [-*π*; *π*];

д) найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (-*π*; 0).

Решение. а) найти коэффициент *A*:

Плотность распределения должна удовлетворять третьему свойству, т.е. если все возможные значения СВ принадлежат отрезку [x_1;x_2], то $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=1$, так как *f(x)*=0 вне этого отрезка. Значит:

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A\cdot\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)dx=1$, откуда $A=\dfrac{1}{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right)dx}$;

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi+2\cos\frac{\pi}{2}-\left(-\pi+2\cos\frac{-\pi}{2}\right)=2\pi;$$

Следовательно, $A=\dfrac{1}{2\pi}$. Таким образом, плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \dfrac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: *A*=0,159.

б) найти *M(X), D(X), σ(X)*:

$$M(X)=\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+2x\cos\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{4}{\pi}=-1,273;$$

$$D(X)=\int_{-\pi}^{\pi} x^2\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx-(1,273)^2=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\cos\frac{x}{2}-8x\sin\frac{x}{2}-16\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-(1,273)^2=\frac{\pi^2}{3}-(1,273)^2=1,669;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,669}=1,292.$$

Ответ: $M(X)=-1,273$; $D(X)=1,669$; $\sigma(X)=1,292$.

в) найти функцию распределения $F(x)$:

При

$x<-\pi$ $\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$

$-\pi\le x\le\pi$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-\pi} f(t)dt+\int_{-\pi}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{-\pi}0\cdot dt+\int_{-\pi}^{x}\frac{1}{2\pi}\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=0+\frac{1}{2\pi}\left(t+2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{x}=\frac{1}{2\pi}\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2};$$

$x>\pi$ $\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=1.$

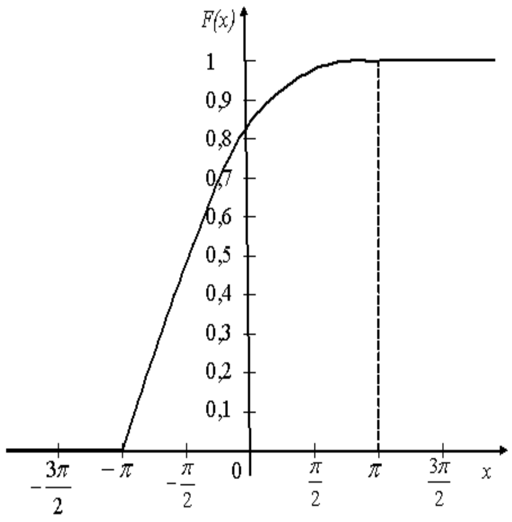
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

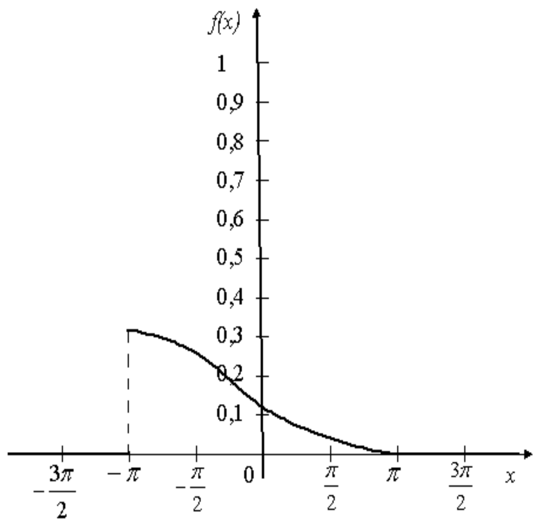
Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$, рассматривая не менее 5 точек на интервале $[-\pi;\pi]$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Изобразим графики *F(x)* и *f(x)* на рисунках:





д) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал ($-\pi$; 0):

1 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

$$P(-\pi < X < 0) = F(0) - F(-\pi) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi + 2\cos\frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi - \pi + 2\cos\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}818;$$

2 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

$$P(-\pi < X < 0) = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} = 0{,}818.$$

Ответ: $P(-\pi < X < 0) = 0{,}818$.