

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1 (МЛ, 1 курс, 1 семестр)

Тема «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Предел и производная функции одной переменной. Функция нескольких переменных. Неопределенный и определенный интегралы»

Задача №1. Вычислить определитель:

- а) разложив его по элементам 2 - ой строки;
б) получив предварительно нули в 1- ом столбце:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. а) $\Delta = a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{24} \cdot A_{24}$, т.е. определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда (например, второй строки) на их алгебраические дополнения.

$$\Delta = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 2 \cdot A_{23} + 3 \cdot A_{24} = 0 + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot$$

$$(-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot$$

$$2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 1) - 2 \cdot (1 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 \cdot 1) + 3 \cdot (1 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 0) = 0 + 4 - 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 28 = 4 + 8 + 84 = 96.$$

б) с помощью элементарных преобразований над строками определителя получим нули на месте элементов a_{31} и a_{41} , для этого элементы первой строки умножим на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки, затем умножим на (-2) и сложим с соответствующими элементами четвертой строки, при этом первая строка останется без изменения. Вторая строка также не изменится, так как элемент a_{21} равен нулю.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -8 & 2 \\ 0 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее разложим определитель по элементам первого столбца как в пункте а), получим:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-8) \cdot 1 + (-6) \cdot (-6) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot (-1) - (-1) \cdot (-8) \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot (-6) - (-6) \cdot 2 \cdot 1 = -8 + 108 - 4 - 24 + 12 + 12 = 96.\end{aligned}$$

Ответ: 96

Задача №2. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

Решение. Дана система линейных алгебраических уравнений, содержащая $n=3$ неизвестных и $m=3$ уравнений. В этом случае система будет невырожденной и иметь единственное решение, если главный определитель системы $\Delta \neq 0$ (совместность данной системы можно проверить и с помощью теоремы Кронекера-Капелли).

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16$ - система совместна и имеет единственное решение.

Решим её по формулам Крамера: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32;$$

$$x_1 = -4; \quad x_2 = 1; \quad x_3 = -2.$$

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем

систему уравнений в матричной форме: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу A^{-1} (она существует, т.к. $\Delta = \det A = -16 \neq 0$):

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11; \\
-A_{12} &= -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1; \\
A_{13} &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6.
\end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид: $X = A^{-1}B$.

$$X = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -45 + 32 + 77 \\ -9 - 7 \\ -42 + 32 + 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из полученной матрицы имеем решение системы: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

Ответ: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований над строками получим нули в первом столбце (в общем случае расширенную матрицу системы приводят к треугольному виду). Для этого первое уравнение умножим на (-2) и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на (-3) и сложим с третьим:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array} \right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array} \right). \text{ Запишем систему, соответствующую}$$

полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ -6x_2 - x_3 = -4; \\ -16x_2 = -16. \end{cases}$$

$$-16x_2 = -16, \text{ тогда } x_2 = 1;$$

$$-6\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = -4, -6 \cdot 1 - \tilde{o}_3 = -4, \text{ тогда } x_3 = -2;$$

$$\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = 3, \tilde{o}_1 + 5 \cdot 1 - 4 = 3, \text{ тогда } x_1 = -4.$$

Таким образом, $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

Ответ: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

Задача №3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$:
 $A_1(2;-1;3)$, $A_2(0;-2;4)$, $A_3(1;-1;1)$, $A_4(3;0;2)$.

Средствами векторной алгебры найти:

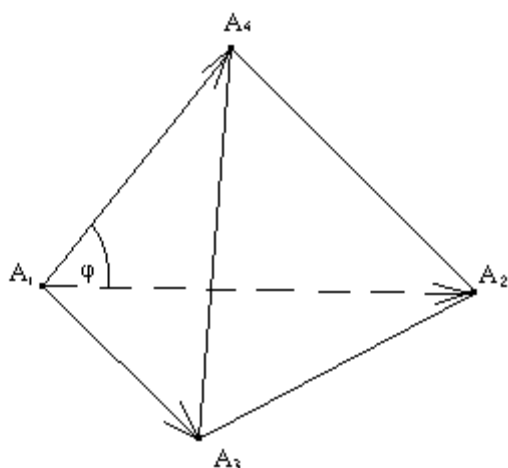
1. угол φ между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$;
2. площадь грани $A_1 A_2 A_3$;
3. точку пересечения медиан треугольника $A_1 A_2 A_3$, используя формулы координат точки, делящей отрезок в данном отношении;
4. объем пирамиды;
5. длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$.

Решение.

1. Угол φ между ребрами $A_1 A_2$ и $A_1 A_4$ равен углу между векторами $\overrightarrow{A_1 A_2}$

и $\overrightarrow{A_1 A_4}$ (рис.2), этот угол вычисляется по

формуле: $\cos \varphi = \frac{\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4}}{|\overrightarrow{A_1 A_2}| \cdot |\overrightarrow{A_1 A_4}|}$.



Найдем координаты векторов $\overrightarrow{A_1 A_2}$ и $\overrightarrow{A_1 A_4}$.

$$\overrightarrow{A_1 A_2} = \{0 - 2; -2 - (-1); 4 - 3\} = \{-2; -1; 1\},$$

$$\overrightarrow{A_1 A_4} = \{3 - 2; 0 - (-1); 2 - 3\} = \{1; 1; -1\}.$$

$$|\overrightarrow{A_1 A_2}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6} \approx 2,45,$$

$$|\overrightarrow{A_1 A_4}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3} \approx 1,73.$$

Найдем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{A_1 A_2} \cdot \overrightarrow{A_1 A_4} = \{-2; -1; 1\} \cdot \{1; 1; -1\} = (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -2 - 1 - 1 = -4.$$

Итак, $\cos \varphi = \frac{-4}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}} \approx \frac{-4}{2,45 \cdot 1,73} \approx -0,943$, т.е. $\varphi \approx \arccos(-0,943) \approx 160,5^\circ$.

2. Площадь S грани $A_1 A_2 A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения: $S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{d}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3}|$, где

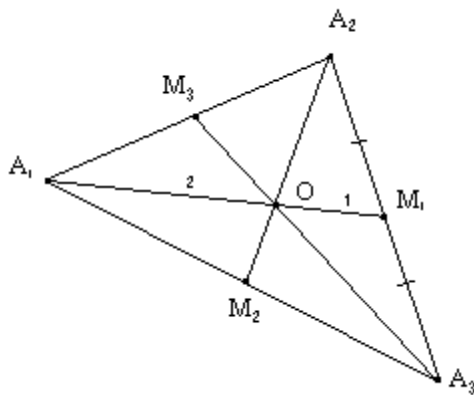
$$\overline{A_1 A_2} = \{-2; -1; 1\}, \quad \overline{A_1 A_3} = \{1-2; -1-(-1); 1-3\} = \{-1; 0; -2\}.$$

$$\vec{d} = \overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} = (2-0) \cdot \vec{i} +$$

$$+ (-1-4) \cdot \vec{j} + (0-1) \cdot \vec{k} = 2 \cdot \vec{i} + (-5) \cdot \vec{j} + (-1) \cdot \vec{k} \Rightarrow \vec{d} = \{2; -5; -1\}.$$

Итак,

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\vec{d}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4 + 25 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30} \approx 2,74 (ед^2).$$



3. Найдем точку пересечения медиан треугольника $A_1 A_2 A_3$.

Рассмотрим одну из медиан (рис.3), например, медиану $A_1 M_1$, $M_1(x'; y'; z')$ - середина стороны $A_2 A_3$. Используем формулы координат середины отрезка:

$$x' = \frac{x_2 + x_3}{2}; y' = \frac{y_2 + y_3}{2}; z' = \frac{z_2 + z_3}{2},$$

где $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$.

$$x' = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}; y' = \frac{-2+(-1)}{2} = -\frac{3}{2}; z' = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow M_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Известно, что в треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины. Точку пересечения медиан

треугольника $O(x_0; y_0; z_0)$ найдем, используя формулы координат точки, делящей направленный отрезок (вектор $\overline{A_1 M_1}$) в данном отношении:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x'}{1 + \lambda}; y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y'}{1 + \lambda}; z_0 = \frac{z_1 + \lambda \cdot z'}{1 + \lambda}.$$

$$\text{Итак, } x_0 = \frac{2 + 2 \cdot \frac{1}{2}}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1; y_0 = \frac{-1 + 2 \cdot (-\frac{3}{2})}{1 + 2} = \frac{-4}{3}; z_0 = \frac{3 + 2 \cdot \frac{5}{2}}{1 + 2} = \frac{8}{3} \Rightarrow O(1; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3}).$$

4. Объем V пирамиды $A_1 A_2 A_3 A_4$ найдем, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов, совпадающих с ребрами пирамиды:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |\overline{A_1 A_2} \quad \overline{A_1 A_3} \quad \overline{A_1 A_4}| = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3}) \cdot \overline{A_1 A_4}|, \text{ где}$$

$$\overline{A_1 A_2} = \{0 - 2; -2 - (-1); 4 - 3\} = \{-2; -1; 1\}, \quad \overline{A_1 A_3} = \{1 - 2; -1 - (-1); 1 - 3\} = \{-1; 0; -2\},$$

$$\overline{A_1 A_4} = \{3 - 2; 0 - (-1); 2 - 3\} = \{1; 1; -1\}.$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\overline{A_1 A_2} \times \overline{A_1 A_3}) \cdot \overline{A_1 A_4}| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot (-2 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) \cdot (-2)) -$$

$$-(1 \cdot 0 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot (-2) \cdot 1) = \frac{1}{6} \cdot |(0 - 1 + 2 - 0 + 1 - 4)| =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot |-2| = \frac{1}{3} \approx 0,33 \text{ (ед}^3\text{)}.$$

5. Длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1 A_2 A_3$, можно найти

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{A_1 A_2 A_3} \cdot H \Rightarrow H = \frac{3 \cdot V}{S}.$$

$$H = \frac{3 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{30}} \approx \frac{1}{2,74} \approx 0,365 \text{ (ед)}.$$

Ответ:

1. $\varphi \approx \arccos(-0,943) \approx 160,5^\circ$;

2. $S \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30} \approx 2,74(e\partial^2)$;

3. $O(1; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3})$ - точка пересечения медиан;

4. $V \approx 0,33(e\partial^3)$;

5. $H \approx 0,365(e\partial)$.

Задача №4.

Даны вершины треугольника ABC : $A(4;3)$, $B(-3;3)$, $C(2;7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CH ;

в) уравнение медианы AM ;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;

е) расстояние от точки C до прямой AB .

Решение. а) Прямая проходит через две точки $A(4;3)$ и $B(-3;3)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{\tilde{o}-x_1}{x_2-x_1} = \frac{\acute{o}-y_1}{y_2-y_1}$, получим

уравнение стороны AB : $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$, откуда $6(x-4) = 7(y-3)$ или $6x - 7y - 3 = 0$

;

б) Угловой коэффициент прямой AB : $k_{AB} = \frac{6}{7}$. С учётом условия перпендикулярности прямых AB и CH угловой коэффициент высоты CH : $k_{CH} = -\frac{7}{6}$.

Составим уравнение высоты CH , проходящей через точку $C(2;7)$ с угловым коэффициентом $-\frac{7}{6}$, воспользуемся формулой $y - y_0 = k(x - x_0)$: $y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2)$ или $7x + 6y - 56 = 0$;

в) Найдём координаты точки M — середины отрезка BC :

$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{-3+7}{2} = 2$, т.е $M\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM :

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0;$$

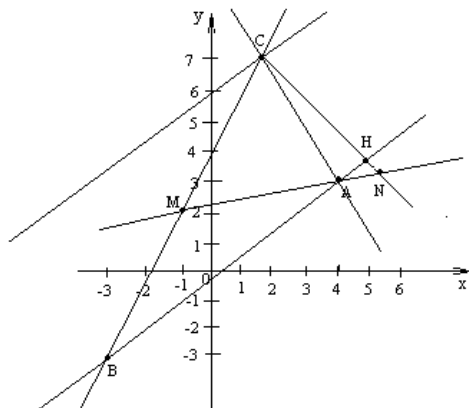
г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений:
$$\begin{cases} 7x+6y-56=0; \\ 2x-9y+19=0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем $x = \frac{26}{5}$, $y = \frac{49}{5}$, т.е. $N\left(\frac{26}{5}; \frac{49}{5}\right)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину $C(2;7)$, параллельна стороне AB , то их угловые коэффициенты равны $k_{CD} = k_{AB} = \frac{6}{7}$. Тогда используя формулу

$y-y_0 = k(x-x_0)$, уравнение прямой CD имеет вид: $y-7 = \frac{6}{7}(x-2)$ или $6x-7y+37=0$;

е) расстояние от точки $C(2;7)$ до прямой AB , заданной уравнением $6x-7y-3=0$, вычисляем по формуле $d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$: $d = |CH| = \frac{6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4,4$ ед.дл.



Решение задачи проиллюстрировано на рисунке.

Задача №5.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип, параметры и расположение линии относительно «старой» и новой систем координат: а) $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$; б) $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение. а) В исходном уравнении $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$, $A = 4$, $C = 5$, тогда $A \cdot C > 0$, т.е. исходное уравнение определяет эллиптический тип линии.

Преобразуем исходное уравнение, сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные, вынесем за скобки числовой множитель перед квадратом переменной, выражения в скобках дополним до полного квадрата:

$$4x^2 + 20x + 5y^2 - 30y + 10 = 0,$$

$$4(x^2 + 5x) + 5(y^2 - 6y) + 10 = 0,$$

$$4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 5\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 9 - 9\right) + 10 = 0,$$

$$4\left(\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right) + 5\left((y - 3)^2 - 9\right) + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 25 + 5(y - 3)^2 - 45 + 10 = 0,$$

$$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y - 3)^2 = 60, \text{ разделим данное выражение на } 60.$$

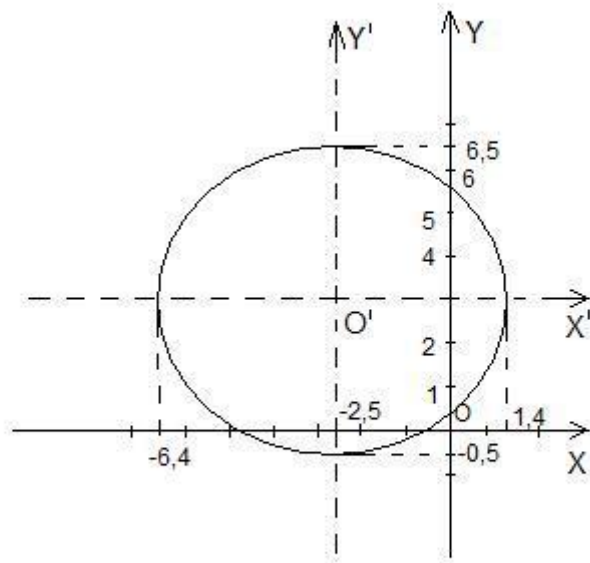
$$\frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y - 3)^2}{12} = 1 \text{ — каноническое уравнение эллипса в «старой» системе}$$

координат, $O'\left(-\frac{5}{2}; 3\right)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики полученной линии: $a^2 = 15$, $a = \sqrt{15}$; $b^2 = 12$, $b = \sqrt{12}$, $a > b$, тогда $c^2 = a^2 - b^2 = 3$, т.е. $F_1(-\sqrt{3}; 0)$, $F_2(\sqrt{3}; 0)$;

$$\text{эксцентриситет эллипса } \varepsilon = \frac{\tilde{a}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{3}{15}} < 1;$$

$$\text{директрисы эллипса } x = \pm \frac{a}{\varepsilon} = \pm \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{3}{15}}} = \pm \sqrt{75}.$$



б) в исходном уравнении $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$, $A=1$, $C=0$, тогда $A \cdot C = 0$, т.е. исходное уравнение определяет параболический тип линии.

Преобразуем исходное уравнение:

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 - 25 - 2y + 11 = 0,$$

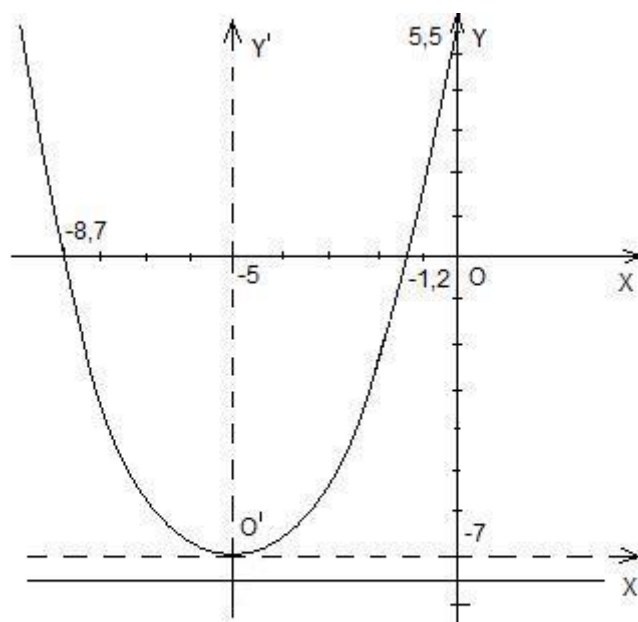
$$(x+5)^2 - 2y - 14 = 0,$$

$(x+5)^2 = 2(y+7)$ — каноническое уравнение параболы в «старой» системе координат, симметричной оси OY , ветви направлены вверх; $O'(-5; -7)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики $2p = 2$, $p = 1$, $F\left(0; \frac{p}{2}\right) = F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ — координаты фокуса;

$y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$ — уравнение директрисы в новой системе координат;

$r = y + \frac{p}{2}$, $r = y + \frac{1}{2}$ — фокальный радиус в новой системе координат.



Задача №6. Найти пределы функций (без правила Лопиталя).

- 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$; 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; 3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5}$; 4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{3x^2 + 5x + 8}$;
 5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17x + 12}{6x^2 + 15x - 8}$; 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$; 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; 9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{2x-7} \right)^x$;
 10) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{2x-1}$.

Решение. 1) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{18}{-2} = -9$;

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+2x}-1} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{(\sqrt{1+2x}-1)(\sqrt{1+2x}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{1+2x}+1)}{1+2x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+2x}+1}{2} = 1$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x + 1}{4x^2 + 2x + 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{4 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}} = \frac{1}{2}$ или степень числителя равна 2, степень

знаменателя также равна двум, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при старших неизвестных;

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 1}{3x^2 + 5x + 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{8}{x^3}} = \left[\frac{7}{0} \right] = \infty$ или, т.к. степень числителя

больше степени знаменателя предел равен бесконечности;

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{17x + 12}{6x^2 + 15x - 8} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{17}{x} + \frac{12}{x^2}}{6 + \frac{15}{x} - \frac{8}{x^2}} = \left[\frac{0}{6} \right] = 0 \quad \text{или, т.к. степень числителя}$$

меньше степени знаменателя предел равен нулю;

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x \cdot \operatorname{tg} 2x}{3x \cdot \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \operatorname{tg} 2x}{3x \cdot 2} = \frac{2}{3};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 2x \cdot \sin 4x}{x \cdot x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 4 \cdot \sin 2x \cdot \sin 4x}{2x \cdot 4x} = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{2x-7} \right)^x = \left| \begin{array}{l} f(x) = \frac{3x+2}{2x-7}; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x-7} = \frac{3}{2} \\ g(x) = x; \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \end{array} \right| = \left[\left(\frac{3}{2} \right)^\infty \right] = \left| \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0, & 0 < a < 1; \\ +\infty, & a > 1. \end{cases} \right| = \infty;$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{2x-1} = \left| \begin{array}{l} f(x) = \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right); \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right) = 1 \\ g(x) = 2x-1; \lim_{x \rightarrow \infty} (2x-1) = \infty \end{array} \right| = [1^\infty] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+5}{3x+7} - 1 \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3x+5-3x-7}{3x+7} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-2}{3x+7} \right)^{2x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 + \frac{-2}{3x+7} \right)^{\frac{3x+7}{-2}} \right)^{\frac{-2}{3x+7} (2x-1)} \right) = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x-1)}{3x+7}} = e^{-\frac{4}{3}}.$$

Задача №7. Найти производные указанных функций.

$$1) f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1); 2) y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$$

$$3) y = (x^2 + 6)\sqrt{x^2 - 3}; 4) y = \sqrt[3]{(x^3 + 1)^2};$$

$$5) y = \operatorname{tg}^3 \sqrt{\ln x}; 6) y = e^{\operatorname{ctg}^4 x}; 7) y = 2^{\sqrt{\operatorname{ctg} \ln \sin x}};$$

$$8) y = \cos^8 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}; 9) x^3 + y^3 = \sin(x - 2y);$$

$$10) y \cdot \ln x - x \cdot \ln y = 1.$$

Решение. 1) Воспользуемся формулой производной произведения

$$[u \cdot v]' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)'$$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u \pm v \pm w]' = u' \pm v' \pm w'$,

производной постоянной $C' = 0$, производная степени $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$= 3x^2(x^2 + x + 1) + (x^3 - 1)(2x + 1)$$

(воспользуемся формулой разность кубов

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$= 3x^2(x^2 + x + 1) + (x - 1)(x^2 + x + 1)(2x + 1) = (x^2 + x + 1)[3x^2 + (2x + 1)(x - 1)] =$$

$$(x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1) = (x^2 + x + 1)(5x^2 - x - 1);$$

2) (воспользуемся формулой производной частного $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$)

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u \pm v \pm w]' = u' \pm v' \pm w'$,

производной постоянной $C' = 0$, производной степени $[x^n]' = n \cdot x^{n-1}$)

$$= \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$$

(преобразуем данное выражение)

$$= \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2};$$

3) (воспользуемся формулой производной произведения $[u \cdot v]' = u'v + uv'$)

$$y' = (x^2 + 6)' \cdot \sqrt{x^2 - 3} + (x^2 + 6) \cdot \sqrt{x^2 - 3}'$$

(найдем производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования)

$$= 2x \cdot \sqrt{x^2 - 3} + \frac{x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2x(\sqrt{x^2 - 3})^2 + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{2x \cdot (x^2 - 3) + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} =$$

$$\frac{2x^3 - 6x + x^3 + 6x}{\sqrt{x^2 - 3}} = \frac{3x^3}{\sqrt{x^2 - 3}};$$

4) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$, заменив кубический корень дробным показателем)

$$y' = \left[(x^3 + 1)^{2/3} \right]' = \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{-1/3} \cdot (x^3 + 1)' = \frac{2}{3} (x^3 + 1)^{-1/3} \cdot 3x^2 = \frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 1}};$$

5) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[tg u]' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$)

$$y' = \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{\ln x}} \cdot [\sqrt[3]{\ln x}]'$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$= \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{\ln x}} \cdot \frac{1}{3} (\ln x)^{-2/3} \cdot [\ln x]'$$

(воспользуемся формулой $[\ln u]' = \frac{1}{u} \cdot u'$)

$$= \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{\ln x}} \cdot \frac{1}{3} (\ln x)^{-2/3} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3x \cdot \sqrt[3]{\ln^2 x} \cdot \cos^2 \sqrt[3]{\ln x}};$$

6) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[e^u]' = e^u \cdot u'$)

$$y' = e^{ctg^4 x} \cdot [ctg^4 x]' =$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x} \cdot 4ctg^3 x \cdot [ctg x]' =$$

(воспользуемся формулой $[ctg u]' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x} \cdot 4ctg^3 x \cdot \frac{-1}{\sin^2 x} = \frac{-4 \cdot e^{ctg^4 x} \cdot ctg^3 x}{\sin^2 x};$$

7) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[a^u]' = a^u \cdot \ln a$)

$$y' = 2^{\sqrt{ctg \ln \sin x}} \cdot \ln 2 \cdot [\sqrt{ctg \ln \sin x}]' =$$

(воспользуемся формулой $[\sqrt{u}]' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg \ln \sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ctg \ln \sin x}} \cdot [ctg \ln \sin x]' =$$

(воспользуемся формулой $[ctg u]' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg \ln \sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ctg \ln \sin x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \ln \sin x} \cdot [\ln \sin x]' =$$

(воспользуемся формулой $[\ln u]' = \frac{1}{u} \cdot u'$)

$$2^{\sqrt{\operatorname{ctg} \ln \sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg} \ln \sin x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \ln \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot [\sin x]' =$$

(воспользуемся формулой $[\sin x]' = \cos x$)

$$2^{\sqrt{\operatorname{ctg} \ln \sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ctg} \ln \sin x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \ln \sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

8) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$y' = 8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot [\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}]' =$$

(воспользуемся формулой $[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$)

$$8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot (-\sin \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}) \cdot [\operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}]' =$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot (-\sin \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}) \cdot 3 \operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot [\operatorname{tg} e^{\sqrt[4]{x}}]' =$$

(воспользуемся формулой $[\operatorname{tg} u]' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$)

$$8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot (-\sin \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}) \cdot 3 \operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot [e^{\sqrt[4]{x}}]' =$$

(воспользуемся формулой $[e^u]' = e^u \cdot u'$)

$$8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot (-\sin \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}) \cdot 3 \operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot e^{\sqrt[4]{x}} \cdot [\sqrt[4]{x}]' =$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$8 \cos^7 \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot (-\sin \operatorname{tg}^3 e^{\sqrt[4]{x}}) \cdot 3 \operatorname{tg}^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}};$$

9) Данная функция задана неявно (Если из уравнения $F(x, y) = 0$ выразить явно переменную y как функцию аргумента x затруднительно, тогда говорят о неявно заданной функции y от аргумента x).

(Для того чтобы найти производную функции, заданной неявно, надо уравнение $F(x, y) = 0$ продифференцировать, считая y функцией от x , и вновь полученное уравнение решить относительно производной y').

Продифференцируем обе части уравнения, учитывая, что y — есть функция от x , получим:

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y) \cdot (1 - 2y') \text{ или}$$

$$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x - 2y) - 2y' \cdot \cos(x - 2y).$$

Отсюда находим y' :

$$3y^2 \cdot y' + 2y' \cdot \cos(x - 2y) = \cos(x - 2y) - 3x^2 \text{ или}$$

$$y'(3y^2 + 2\cos(x - 2y)) = \cos(x - 2y) - 3x^2, \text{ т.е.}$$

$$y' = \frac{\cos(x - 2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x - 2y)};$$

10) Это уравнение определяет y как неявную функцию x . Дифференцируем по x :

$$x_x \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y'_x - \left(y'_x \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x} \right) = 0. \text{ Так как } x'_x = 1, \text{ то}$$

$$\ln y + \frac{x}{y} y'_x - y'_x \ln x - \frac{y}{x} = 0, \text{ откуда}$$

$$y'_x \cdot \left(\frac{x}{y} - \ln x \right) = \frac{y}{x} - \ln y, \text{ т.е. } y'_x = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}.$$

Задача №8. Найти частные производные второго порядка функции

$$z = \arccos \sqrt{\frac{x}{y}} \text{ и доказать, что смешанные производные равны.}$$

Решение.

Найдём первые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{y=C} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{xy - x^2}};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x=C} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2 - xy}}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y , находим вторые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(yx-x^2)^3}} \cdot (y-2x) = -\frac{y-2x}{4\sqrt{(yx-x^2)^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{(yx-x^2)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x}}{2} \left(-\frac{\sqrt{y-x} + \frac{y}{2\sqrt{y-x}}}{y^2(y-x)} \right) = -\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}.$$

Как видно, смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны.

Задача №9. Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

$$1) \int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2} dx; 2) \int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}; 3) \int \frac{3x+10}{6x^2-4} dx;$$

$$4) \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx; 5) \int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})}; 6) \int (x-7) \sin 5x dx;$$

Решение.

$$1). \int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2} dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln(x+2) \\ du = \frac{dx}{x+2} \end{array} \right| = \int u^{3/7} du = \frac{7}{10} u^{10/7} + C = \frac{7}{10} \sqrt[7]{(\ln(x+2))^{10}} + C;$$

$$\text{Проверка: } \left(\frac{7}{10} \sqrt[7]{(\ln(x+2))^{10}} + C \right)' = \frac{7}{10} \cdot \frac{10}{7} \cdot (\ln(x+2))^{\frac{10}{7}-1} \cdot \frac{1}{x+2} = \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}.$$

Что и требовалось доказать.

$$2) \int \frac{\cos 3x dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}} = \left| \begin{array}{l} u = \sin 3x-4 \\ du = 3 \cos 3x dx \\ \cos 3x dx = \frac{du}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{du}{u^{1/5}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} u^{4/5} + C = \frac{5}{12} \sqrt[5]{(\sin 3x-4)^4} + C;$$

Проверка:

$$\left(\frac{5}{12} \sqrt[5]{(\sin 3x - 4)^4} + C\right)' = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{5} \cdot (\sin 3x - 4)^{\frac{4}{5}-1} \cdot 3 \cos 3x = \frac{\cos 3x}{\sqrt[5]{\sin 3x - 4}}.$$

Что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned} 3) \int \frac{3x+10}{6x^2-4} dx &= \int \frac{3x}{6x^2-4} dx + \int \frac{10}{6x^2-4} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 6x^2 - 4 \\ du = 12x dx \\ 3x dx = \frac{du}{4} \end{array} \right| = \frac{1}{4} \int \frac{du}{u} + \frac{10}{\sqrt{6}} \int \frac{dx}{x^2 - \frac{4}{6}} = \\ &= \frac{1}{4} \ln |u| + \frac{10}{\sqrt{6}} \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{\sqrt{6}x - 2}{\sqrt{6}x + 2} \right| + C = \\ &= \frac{1}{4} \ln |6x^2 - 4| + \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}x - 2}{\sqrt{6}x + 2} \right| + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{4} \ln |6x^2 - 4| + \frac{5}{2\sqrt{6}} \ln \left| \frac{\sqrt{6}x - 2}{\sqrt{6}x + 2} \right| + C\right)' \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{12x}{6x^2 - 4} + \frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}x + 2}{\sqrt{6}x - 2} \cdot \frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}x + 2) - \sqrt{6}(\sqrt{6}x - 2)}{(\sqrt{6}x + 2)^2} \\ &= \frac{3x}{6x^2 - 4} + \frac{5}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}x + 2}{\sqrt{6}x - 2} \cdot \frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6}x + 2)^2} \\ &= \frac{3x}{(\sqrt{6}x - 2)(\sqrt{6}x + 2)} + \frac{10}{(\sqrt{6}x - 2)(\sqrt{6}x + 2)} = \frac{3x + 10}{6x^2 - 4}. \end{aligned}$$

Что и требовалось доказать.

$$\begin{aligned} 4) \int \frac{3-7x}{4x^2+5} dx &= \int \frac{3}{4x^2+5} dx - \int \frac{7x}{4x^2+5} dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = 4x^2 + 5 \\ du = 8x dx \\ x dx = \frac{du}{8} \end{array} \right| = \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^2 + \frac{5}{4}} - \frac{7}{8} \int \frac{du}{u} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8} \ln |u| + C = \frac{3}{2\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8} \ln |4x^2 + 5| + C. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{2\sqrt{5}} \arctg \frac{2x}{\sqrt{5}} - \frac{7}{8} \ln|4x^2 + 5| + C\right)' = \frac{3}{2\sqrt{5}} \frac{2}{\sqrt{5}} \frac{1}{1+\frac{4x^2}{5}} - \frac{7}{8} \cdot \frac{8x}{4x^2+5} = \frac{3}{5} \frac{5}{4x^2+5} - \frac{7x}{4x^2+5} = \frac{3-7x}{4x^2+5}.$$

Что и требовалось доказать.

$$5) \int \frac{dx}{e^{3x}(2-e^{-3x})} = \left| \begin{array}{l} u = 2 - e^{-3x} \\ du = \frac{3dx}{e^{3x}} \\ \frac{dx}{e^{3x}} = \frac{du}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{3} \ln |u| + C = \frac{1}{3} \ln |2 - e^{-3x}| + C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3} \ln|2 - e^{-3x}| + C\right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3e^{-3x}}{2 - e^{-3x}} = \frac{1}{e^{3x}(2 - e^{-3x})}.$$

Что и требовалось доказать.

$$6) \int (x - 7) \sin 5x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x - 7 & du = dx \\ dv = \sin 5x \, dx & v = -\frac{1}{5} \cos 5x \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x-7}{5} \cdot \cos 5x + \int \cos 5x \, dx = -\frac{x-7}{5} \cdot \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C.$$

Проверка:

$$\left(-\frac{x-7}{5} \cdot \cos 5x + \frac{1}{25} \sin 5x + C\right)' =$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot \cos 5x - \frac{x-7}{5} \cdot (-5) \sin 5x + \frac{1}{25} \cdot 5 \cos 5x = (x-7) \cdot \sin 5x$$

Что и требовалось доказать.

Задача №10.

Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, вычислить определенные интегралы:

$$1) \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)}; 2) \int_1^e \ln^2 x \, dx; 3) \int_3^4 \frac{9x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx; 4) \int_0^1 \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{x^2 + 1}}; 5) \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x};$$

$$6) \int_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}} dx; 7) \int_{2/3}^{10/3} \frac{x \, dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$$

Решение.

1) Используя формулу Ньютона-Лейбница $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, вычисляем

$$\text{интеграл от дробно-рациональной функции: } \int_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \left. \begin{array}{l} \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} \\ x^2 \quad A+B=0; \quad A=1 \\ x \quad C=0; \quad B=-1 \\ x^0 \quad A=1 \quad C=0 \end{array} \right| =$$

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} - \int_1^2 \frac{x dx}{1+x^2} =$$

$$= \ln |x| \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \Big|_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 = 0,24;$$

2) Дважды применив метод интегрирования по частям, получим

$$\int_1^e \ln^2 x dx = \left. \begin{array}{l} u = \ln^2 x \quad du = \frac{2 \ln x}{x} dx \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = x \ln^2 x \Big|_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = \ln x \quad du = \frac{dx}{x} \\ dv = dx \quad v = x \end{array} \right| = e \ln^2 e - 2(x \ln x - x) \Big|_1^e = e - 2 = 0,72;$$

3) Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложив знаменатель на простые множители, а затем полученную

дробь — на простые дроби имеем: $\int_3^4 \frac{9x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} dx =$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{9x^2 - 14x + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{9x^2 - 14x + 1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-2} \\ 9x^2 - 14x + 1 \equiv A(x-1)(x-2) + B(x+1)((x-2) + C(x+1)(x-1)) \\ x = -1 \quad 24 = 6A \quad A = 4 \\ x = 1 \quad -4 = -2B \quad B = 2 \\ x = 2 \quad 9 = 3C \quad C = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx =$$

$$= (4 \ln |x+1| + 2 \ln |x-1| + 3 \ln |x-2|) \Big|_3^4 = \ln \frac{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}{4^4} = 3,78;$$

$$4) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left. \begin{array}{l} \sqrt{x^2+1} \quad x^2+1=t^2 \quad x dx = t dt \\ t=1; \quad x=0 \quad t=\sqrt{2}; \quad x=1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2 - 1)t}{t} dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2 - 1) dt = \left(\frac{1}{3} t^3 - t \right) \Big|_1^{\sqrt{2}} = 0,2;$$

5) Подынтегральная функция является чётной относительно $\sin x$ и $\cos x$, применим подстановку $t = \operatorname{tg} x$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 - 3 \cos^2 x + 5 \sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg} x \quad dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \\ t = 0; \quad x = 0 \quad t = 1; \quad x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2) \left(4 - \frac{3}{1+t^2} + \frac{5t^2}{1+t^2} \right)} = \int_0^1 \frac{dt}{9t^2 + 1} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 3t \Big|_0^1 = 0,42;$$

6) Разобьём данный интеграл на два интеграла таким образом, чтобы получить в числителе первого производную от квадратного трёхчлена, стоящего под знаком радикала в знаменателе, и проведём необходимые преобразования.

$$\int_0^1 \frac{2x - 11}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx = -4 \int_0^1 \frac{-2x - 2}{\sqrt{3 - 2x - x^2}} dx - 19 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4 - (x+1)^2}} =$$

$$= -8 \sqrt{3 - 2x - x^2} \Big|_0^1 - 19 \arcsin \frac{x+1}{2} \Big|_0^1 = 8\sqrt{3} - \frac{19}{2} \pi + \frac{19}{6} \pi = -6,05;$$

$$7) \int_{2/3}^{10/3} \frac{x dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt{3x-1} = t \quad t = 1 \quad x = 2/3 \\ x = \frac{1}{3}(t^2 + 1) \quad t = 3 \quad x = 10/3 \\ dx = \frac{2}{3} t dt \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^3 \frac{\frac{1}{3}(t^2 + 1) \cdot \frac{2}{3} t dt}{t^2 \cdot t} = \frac{2}{9} \int_1^3 \frac{t^3 + t}{t^3} dt = \frac{2}{9} \left(t - \frac{1}{t} \right) \Big|_1^3 = 0,59.$$