

**Направление «Менеджмент», профиль «Логистика»**  
**Контрольная работа №2 (1 курс, 2 семестр)**

Тема «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Числовые и степенные ряды. Теория вероятностей.»

**Задача №1.** Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные).

1. а)  $\operatorname{tg} x dx - y \ln x dx = 0$ ; б)  $xy' \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right)$ ; в)  $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$ .

2. а)  $3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2 + y^2} dx = 0$ ; б)  $2 dx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0$ ; в)  $y' - 2 \frac{y}{x} = 3x^2 - 2x^4$ .

3. а)  $e^x dx - (1 + e^y) y dy = 0$ ; б)  $xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}$ ; в)  $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$ .

4. а)  $y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$ ; б)  $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \frac{y}{x} + 3$ ; в)  $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ .

5. а)  $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}$ ; б)  $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$ ; в)  $y' + y \cos x = e^{\sin x}$ .

6. а)  $y' y \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = 0$ ; б)  $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$ ; в)  $y' \sin x - y \cos x = 1$ .

7. а)  $y' = 2e^x \cos x$ ; б)  $x \cos \frac{y}{x} dy + \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx = 0$ ; в)  $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$ .

8. а)  $y(1 + \ln y) + xy' = 0$ ; б)  $(xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x$ ; в)  $x^2 y' + 2xy = e^x$ .

9. а)  $\sqrt{5 + y^2} + y' y \sqrt{1 - x^2} = 0$ ; б)  $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$ ; в)  $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$ .

10. а)  $(e^{2x} + 5) dy + ye^{2x} dx = 0$ ; б)  $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$ ; в)  $xy' - 2y = 2x^4$ .

**Задача №2.** Найти общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

1. а)  $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$ ; б)  $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$ .

2. а)  $x^2 y'' + xy' = 1$ ; б)  $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$ .

3. а)  $y'' - 2ctgx \cdot y' = \sin^3 x$ ; б)  $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$ .

4. а)  $y'' x \ln x = y'$ ; б)  $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$ .

5. а)  $y y'' - (1+y')y' = 0$ ; б)  $y y'' = y^2 y' + (y')^2$ .

6. а)  $y''' = e^{-2x}$ ; б)  $y''' = x^3 - \sqrt{x}$ .

7. а)  $y''' \sqrt{x} = 3x^2 - \sqrt{x} - 1$ ; б)  $2y y'' + y^2 - y'^2 = 0$ .

8. а)  $2y y'' - 3y'^2 = 4y^2$ ; б)  $2y(y')^3 + y'' = 0$ .

9. а)  $2y y'' = (y')^2 + 1$ ; б)  $y''' = \cos 2x$ .

10. а)  $y'' = x \sin x$ ; б)  $y'' = 4^{2x}$ .

**Задача №3.** Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1.  $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x$ ,  
 $y(0) = y'(0) = 0$

2.  $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$ ,  
 $y(0) = 1; y'(0) = 0$

3.  $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2$ ,  
 $y(0) = 0; y'(0) = 1$

4.  $y'' + 9y = 6e^{3x}$ ,  
 $y(0) = y'(0) = 0$

5.  $y'' - 3y' + 2y = (3-4x)e^{3x}$ ,  
 $y(0) = y'(0) = 0$

6.  $y'' + 4y = 8 \sin 2x$ ,  
 $y(0) = y'(0) = 0$

7.  $y'' - 4y' + 4y = 2(x + \sin x)$ ,  
 $y(0) = 0; y'(0) = 1$

8.  $y'' - y = 9xe^{2x}$ ,  
 $y(0) = 0; y'(0) = -5$

9.  $y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x$ ,  
 $y(0) = 5; y'(0) = 6$

10.  $y'' - 3y' - 4y = 5 \cos x$ ,  
 $y(0) = y'(0) = 0$

**Задача №4.** Исследовать сходимость числовых рядов; знакочередующийся ряд исследовать на абсолютную и условную сходимость.

1. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n+2}{5n+1} \right)^{n^2}$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}$

2. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{\pi}{5n+1} \right)^n$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}$

3. а)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$ ;

б)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 + \sqrt{n}}$

в)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}$

$$\begin{array}{lll}
4. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(n+1)!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^2} \\
5. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^5-1)}{n!}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-2n+5}} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2-1}{3n^3} \\
6. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n+2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{2+3}}{\sqrt{n^5}} \\
7. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}; & \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln^3(3n-1)}} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1}\right)^{n^2} \\
8. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n5^{n-1}}; & \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln(2n+1)}} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n}\right)^n \\
9. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^{n-1}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{3^n} \\
10. \text{ а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4 \cdot 2^n - 3}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)\sqrt{\ln(3n-2)}} & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}
\end{array}$$

**Задача №5.** Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

$$\begin{array}{lll}
1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}. & 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}. & 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}. \\
4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}. & 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}. & 6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}. \\
7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}. & 8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}. & 9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(x+2)^{2n+1}}{(n+1)!}. \\
10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)}. & &
\end{array}$$

**Задача №6.**

1. Из урны, содержащей 4 красных, 5 синих и 1 белый шар, извлекли одновременно четыре шара. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров 1 красный, 2 синих и 1 белый шар?

2. На пригородном вокзале 8 человек случайным образом выбирают один из 6 вагонов электропоезда. Найти вероятность того, что в один из вагонов никто не войдет.
3. В вагоне, содержащем 10 купе по 4 места, оказались двое знакомых. Найти вероятность того, что их места в одном купе.
4. В коробке 10 красных, 6 синих и 4 черных карандаша. Пять из них извлекли наудачу. Какова вероятность того, что среди извлеченных карандашей 1 красный, 2 синих и 2 черных?
5. Шесть шаров случайным образом раскладываются по трем ящикам. Найти вероятность того, что в первом ящике окажется три шара.
6. Компания из 8 человек случайным образом рассаживается за круглым столом. Какова вероятность того, что два определенных человека окажутся рядом?
7. Из урны, содержащей 3 красных, 5 синих и 2 белый шара, наудачу извлекается 5 шаров. Какова вероятность того, что среди извлеченных шаров окажутся 1 красный, 2 синих и 2 белых шара?
8. Поезд состоит из 7 купейных, 5 плацкартных и 3 общих вагонов, составленных в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый и последний вагоны разного типа.
9. Шесть шаров случайным образом раскладываются по трем ящикам. Найти вероятность того, что во всех ящиках будет разное число шаров.
10. В лифт 6-этажного дома на первом этаже вошли 7 человек. Найти вероятность того, что четверо из них выйдут на одном этаже, если каждый пассажир может выйти на любом из этажей, начиная со второго.

### **Задача №7.**

1. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, для второго 0,5. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал второй стрелок.
2. Из первой урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, извлекли одновременно два шара и переложили во вторую, содержащую 2 белых и 3 черных шара. Затем из второй урны наугад извлекли один шар. Найти вероятность того, извлеченный из второй урны шар оказался белым?
3. По цели производится два выстрела с вероятностью попадания при первом выстреле 0,2 и при втором 0,5. Вероятность уничтожения цели при одном попадании 0,6, при двух 0,9. Какова вероятность того, что цель будет уничтожена?
4. Фирма участвует в трех проектах, каждый из которых может оказаться неудачным с вероятностью 0,2. В случае неудачи одного проекта вероятность разорения 20%, двух-50%, трех- 80%. Найти вероятность разорения фирмы.

5. Деталь имеет скрытые дефекты с вероятностью 0,2. В течение гарантийного срока выходит из строя 80% деталей со скрытым дефектом и 10% - без дефектов. Найти вероятность того, что деталь имела скрытый дефект, если она вышла из строя в течение гарантийного срока.
6. Деталь имеет скрытые дефекты с вероятностью 0,2. В течение гарантийного срока выходит из строя 80% деталей со скрытым дефектом и 10% - без дефектов. Найти вероятность того, что деталь имела скрытый дефект, если она вышла из строя в течение гарантийного срока.
7. В каждом из 6 ящиках по 20 одинаковых на вид деталей. В трех ящиках имеется по одной бракованной детали, в двух — по три и в одном бракованных деталей нет. Найти вероятность того, что деталь, вынутая из случайно выбранного ящика — бракованная.
8. Из первой урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, извлекли одновременно два шара и переложили во вторую, содержащую 2 белых и 3 черных шара. Затем из второй урны наугад извлекли один шар. Найти вероятность того, из первой урны во вторую были переложены шары разного цвета, если извлеченный из второй урны шар оказался белым.
9. Для баскетболиста вероятность попадания в кольцо при броске с игры равна 0,4, при штрафном броске — 0,8. Какой процент всех бросков достигает цели, если треть всех бросков производится со штрафного?
10. В трех урнах содержится по 9 белых и 1 черный шар; 7 белых и 3 черных; 5 белых и 5 черных. Какова вероятность извлечь три белых шара одновременно из урны, выбранной наугад?

### **Задача №8.**

1. Вероятность невыхода на линию автобуса равна 0,1. Найти вероятность того, что на линию вышли по меньшей мере, 5 автобусов из 6 имеющихся.
2. Биатлонисту необходимо разбить 5 мишеней. Какова вероятность того, что для этого потребуется ровно 7 патронов, если вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,2?
3. Для зачета на автоматическом тренажере надо правильно ответить на 5 вопросов из 6. Какова вероятность получить зачет, нажимая на клавиши «да» и «нет» наугад?
4. Вероятность своевременного выполнения заказа в химчистке равна 0,8. Какова вероятность из 6 заказов своевременно будут выполнены 4 заказа?
5. Вероятность искажения сигнала при передаче равна 0,002. Найти вероятность того, что при передаче 1000 сигналов хотя бы один будет передан с искажением.
6. При изготовлении переключателей брак составляет 0,3%. Найти вероятность того, что среди 2000 изготовленных переключателей не менее двух бракованных.
7. Вероятность поражения стрелком мишени при одном выстреле равна 0,9. Найти вероятность того, что в серии из пяти выстрелов будет не более трех промахов.

8. При пересадке деревьев вероятность приживаемости равна 0.8. Какова вероятность того что из 200 пересаженных деревьев приживется не менее 120?

9. Система состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа любого из элементов одинакова и равна 0,2. Найти наивероятнейшее число отказавших элементов и соответствующую вероятность.

10. Тест по теории вероятностей состоит из 8 вопросов. На каждый вопрос предлагается 4 варианта ответа, из которых один верный. Тест считается успешно сданным, если число верных ответов не менее 6. Какова вероятность того, что, будучи совершенно не готовым к тесту, выбирая варианты ответов наугад, студент успешно пройдет тестирование?

### Задача №9.

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины  $X$ , заданной рядом распределения.

1.

$x_i$	$p_i$
6	0.1
8	0.3
10	0.3
12	0.2
14	0.1

2.

$x_i$	$p_i$
20	0.2
25	0.2
35	0.3
40	0.2
50	0.1

3.

$x_i$	$p_i$
4	0.1
8	0.2
12	0.3
16	0.3
20	0.1

4.

$x_i$	$p_i$
0.8	0.1
1.2	0.1
1.6	0.2
2.0	0.4
2.4	0.2

5.

$x_i$	$p_i$
1.0	0.1
1.5	0.2
2.0	0.4
2.5	0.2
3.0	0.1

6.

$x_i$	$P_i$
1.2	0.2
1.5	0.2
1.8	0.3
2.1	0.2
2.4	0.1

7.

$x_i$	$p_i$
1.2	0.4
1.5	0.2
2.0	0.2
2.5	0.1
3.0	0.1

8.

$x_i$	$P_i$
2	0.10
4	0.20
6	0.35
8	0.25
10	0.10

9.

$x_i$	$P_i$
15	0.1
20	0.1
24	0.3
29	0.3
30	0.2

10.

$x_i$	$P_i$
1.5	0.1
2.0	0.2
2.5	0.4
3.0	0.1
3.5	0.2

### Задача №10.

1. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \sin x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

a) Найти параметр  $A$ ;

b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и

дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

с) Найти вероятность попадания в промежуток  $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ .

2. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ Ax^2, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

а) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

б) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0, 1/2)$ .

3. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ A \cos^2 x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

а) Найти параметр  $A$ ;

б) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

с) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0, \frac{\pi}{4})$ .

4. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(3x+1), & 0 < x \leq \frac{1}{3}, \\ 0, & x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

а) Найти параметр  $A$ ;

б) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

с) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0, 1/6)$ .



5. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(x^2 + 1), & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

- a) Найти параметр  $A$ ;
- b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;
- c) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0,1)$ .

6. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ A \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & -1 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

- a) Найти параметр  $A$ ;
- b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;
- c) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0,1/2)$ .

7. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -\frac{\pi}{4}, \\ A \cdot \cos 2x, & -\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 0, & x > \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

- a) Найти параметр  $A$ ;
- b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

c) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0, \frac{\pi}{8})$ .

8. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A(x^2 - 1), & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

a) Найти параметр  $A$ ; Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

b) Найти вероятность попадания в промежуток  $(1, 3/2)$ .

9. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1, \\ A(x^3 - x), & 1 < x \leq 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

a) Найти параметр  $A$ ;

b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

c) Найти вероятность попадания в промежуток  $(1, 3/2)$ .

10. Случайная величина  $X$  задана дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ A \sin^2 x, & 0 < x \leq \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

a) Найти параметр  $A$ ;

b) Найти интегральную функцию  $F(x)$ , математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $X$ , построить графики  $F(x)$ ,  $f(x)$ ;

c) Найти вероятность попадания в промежуток  $(0, \frac{\pi}{4})$ .