

## Направление «Менеджмент», профиль «Логистика»

### Контрольная работа №1 (1 курс, 1 семестр)

Тема «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Предел и производная функции одной переменной. Функция нескольких переменных. Неопределенный и определенный интегралы»

**Задача №1.** Вычислить определитель:

- 1) разложив его по элементам  $i$ -ой строки;
- 2) получив предварительно нули в  $j$ -ом столбце.

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad i=3, j=2$$

$$2. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad i=1, j=2$$

$$3. |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad i=4, j=1$$

$$4. |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad i=3, j=1$$

$$5. |A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad i=2, j=4$$

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad i=4, j=1$$

$$7. |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad i=4, j=2$$

$$8. |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad i=1, j=2$$

$$9. |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad i=3, j=3$$

$$10. |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad i=2, j=3$$

**Задача №2.** Решить систему линейных алгебраических уравнений:

- а) по формулам Крамера;
- б) матричным способом;
- в) методом Гаусса:

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

### Задача №3.

Даны координаты вершин пирамиды  $A_1 A_2 A_3 A_4$ . Средствами векторной алгебры найти:

1. угол  $\varphi$  между ребрами  $A_1 A_2$  и  $A_1 A_4$ ;
2. площадь грани  $A_1 A_2 A_3$ ;
3. точку пересечения медиан треугольника  $A_1 A_2 A_3$ , используя формулы координат точки, делящей отрезок в данном отношении;
4. объем пирамиды;
5. длину высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1 A_2 A_3$ .

1.  $A_1 (3;1;4)$ ;  $A_2 (-1;6;1)$ ;  $A_3 (-1;1;6)$ ;  $A_4 (0;4;-1)$ .
2.  $A_1 (3;3;9)$ ;  $A_2 (6;9;1)$ ;  $A_3 (1;7;3)$ ;  $A_4 (8;5;8)$ .
3.  $A_1 (3;5;4)$ ;  $A_2 (5;8;3)$ ;  $A_3 (1;9;9)$ ;  $A_4 (6;4;8)$ .
4.  $A_1 (2;4;3)$ ;  $A_2 (7;6;3)$ ;  $A_3 (4;9;3)$ ;  $A_4 (3;6;7)$ .
5.  $A_1 (9;5;5)$ ;  $A_2 (-3;7;1)$ ;  $A_3 (5;7;8)$ ;  $A_4 (6;9;2)$ .

6.  $A_1(0;7;1)$ ;  $A_2(4;1;5)$ ;  $A_3(4;6;3)$ ;  $A_4(3;9;8)$ .
7.  $A_1(5;5;1)$ ;  $A_2(3;8;4)$ ;  $A_3(3;5;10)$ ;  $A_4(5;8;2)$ .
8.  $A_1(6;1;1)$ ;  $A_2(4;6;6)$ ;  $A_3(4;2;0)$ ;  $A_4(1;2;6)$ .
9.  $A_1(7;5;3)$ ;  $A_2(9;4;4)$ ;  $A_3(4;5;7)$ ;  $A_4(7;9;6)$ .
10.  $A_1(6;6;2)$ ;  $A_2(5;4;7)$ ;  $A_3(2;4;7)$ ;  $A_4(7;3;0)$ .

#### Задача №4.

Дан треугольник  $ABC$  с вершинами  $A, B, C$ . Найти:

- а) уравнение стороны  $AB$ ;
- б) уравнение высоты  $CH$ ;
- в) уравнение медианы  $AM$ ;
- г) точку  $N$  пересечения медианы  $AM$  и высоты  $CH$ ;
- д) уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ;
- е) расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .

1.  $A(1; -1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(3; 1)$ .
2.  $A(1; 1)$ ,  $B(2; 2)$ ,  $C(1; 3)$ .
3.  $A(-1; -1)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(2; 2)$ .
4.  $A(1; -1)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(-1; 3)$ .
5.  $A(0; 5)$ ,  $B(12; 0)$ ,  $C(18; 8)$ .
6.  $A(8; 0)$ ,  $B(-4; 2)$ ,  $C(-8; 2)$ .
7.  $A(1; 5)$ ,  $B(13; 0)$ ,  $C(19; 8)$ .
8.  $A(1; 6)$ ,  $B(-6; -4)$ ,  $C(-10; -1)$ .
9.  $A(-1; 5)$ ,  $B(11; 0)$ ,  $C(17; 8)$ .
10.  $A(6; 5)$ ,  $B(-6; 0)$ ,  $C(-10; 3)$ .

**Задача №5.** Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип, параметры и расположение линии относительно старой и новой систем координат.

1.  $2x^2 + 3y^2 - 10x + 21y - 70 = 0$ ;
2.  $3x^2 - 2y^2 + 15x + 10y - 100 = 0$ ;
3.  $5x^2 + 15x - 2y + 7 = 0$ ;
4.  $4x^2 + 3y^2 + 20x - 15y - 25 = 0$ ;

5.  $2x^2 - 5y^2 - 18x - 10y - 50 = 0$ ;
6.  $3x^2 + 2y^2 - 9y + 14x - 100 = 0$ ;
7.  $2y^2 - 10y + 3x - 15 = 0$ ;
8.  $4x^2 - 20x + 3y - 5 = 0$ ;
9.  $2y^2 - 3x^2 + 10y + 6x - 10 = 0$ ;
10.  $4x^2 - 3y^2 + 4x + 9y - 25 = 0$ .

**Задача №6.** Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{4x-5}$ ; б)  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+z} - \sqrt{4-z}}{5z}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+5}{x-1} \right)^x$ .
2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3}{5x^3 + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x-7}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3x+1} \right)^x$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 + x^3 - 2}{x^4 - 2x^2 + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 - x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{8x+1}{8x} \right)^{2x}$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 6}{2x^3 - x + 3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+3x} - 2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\arctg x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{1}{x}}$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 5x - 1}{5x^4 - 2x + 1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^2+3x^4}{5x^4+6x+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - \sqrt{1-3x}}{x^2+x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)[\ln(x+2) - \ln x]$
7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5 - 3x^4 + x}{x^5 + 3x^2 + 2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}$ ;  
г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)[\ln(x-1) - \ln x]$
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{3x^2 + 4x + 5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{5}}{x-3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$ .

$$9. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4 - 3x^2 + x}{x^4 + 5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2 - 5x}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{1}{x^2 - 4}}.$$

$$10. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^5 - 4x^3 + 3}{x^5 + 2x^3 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{2x} - 2}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x; \quad \text{г) } \lim_{x \rightarrow 3} (3x - 8)^{\frac{1}{x-3}}.$$

**Задача №7.** Найти производные указанных функций:

$$1. \text{ a) } y = \sqrt{2x-3} - \frac{4}{\sqrt{x^3 + x^2 + 1}}; \quad \text{б) } y = (e^{\sin x} + 1)^2; \quad \text{в) } y = \ln[\cos(x+1)]^2; \quad \text{г) } \operatorname{tg} \frac{y}{x} = 5x.$$

$$2. \text{ a) } y = x \cdot \sqrt[3]{1-x}; \quad \text{б) } y = \frac{5 \cos x}{\sin^2 x}; \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg}(e^{x^2}); \quad \text{г) } \operatorname{arctg} y - y + x^2 = 0.$$

$$3. \text{ a) } y = x \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^2 2x; \quad \text{в) } y = \arccos \sqrt{1-x}; \quad \text{г) } y \cos x = \sin(x+y).$$

$$4. \text{ a) } y = \frac{1+x}{\sqrt{x^2 - 4x + 2}}; \quad \text{б) } y = x \sin x - \cos x; \quad \text{в) } y = x^3 \ln x; \quad \text{г) } \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$5. \text{ a) } y = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}; \quad \text{б) } y = \frac{\cos^2 x}{1+5 \sin^2 x}; \quad \text{в) } y = \frac{x^2 \ln x}{x+2}; \quad \text{г) } (e^x + 1)(e^y - 1) + 1 = 0.$$

$$6. \text{ a) } y = \frac{1}{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt[5]{x^2 + 1}}; \quad \text{б) } y = 2 \operatorname{ctg}^2(x^2 + 1); \quad \text{в) } y = 2^{\operatorname{arctg}(x^4)}; \quad \text{г) } y^3 x = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}.$$

$$7. \text{ a) } y = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}; \quad \text{б) } y = \operatorname{tg}^2 x + \ln(\sin x); \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right); \quad \text{г) } x^3 - y^3 + 3xy = 0.$$

$$8. \text{ a) } y = 2 \cdot \sqrt[3]{6x^4 - x^3 + \frac{2}{x}}; \quad \text{б) } y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}; \quad \text{в) } y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x); \quad \text{г) } x + y - a \cdot \cos y = 0.$$

$$9. \text{ a) } y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^3 - 2x + \frac{1}{x}}; \quad \text{б) } y = 3^x \cdot e^{-x^2}; \quad \text{в) } y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad \text{г) } \ln(y+1) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$10. \text{ a) } y = \sqrt{x^3 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 3}; \quad \text{б) } y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{tg} x + x; \quad \text{в) } y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+x}{x-2}}; \quad \text{г) } y + e^y \operatorname{arctg} x = 0.$$

**Задача №8.** Найти частные производные второго порядка следующих функций и доказать, что смешанные производные равны:

1.  $z = x^2 y^3 - 4x^5 y + 2x - 3y;$

2.  $z = \frac{3x - y}{x + 2y};$

3.  $z = x^y;$

4.  $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right);$

5.  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$

6.  $z = \sin x \cdot \sin y;$

7.  $z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy};$

8.  $z = \sin x^{\cos y};$

9.  $z = \operatorname{ctg} \frac{1+xy}{x-y};$

10.  $z = \operatorname{arctg} \sqrt{x^y}.$

**Задача №9.**

Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1. а)  $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5 - 2\cos x}};$  б)  $\int \frac{(3x-1)dx}{10 - 6x + x^2};$  в)  $\int x^3 \ln x dx.$

2. а)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^2}};$  б)  $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}};$  в)  $\int x \cos 5x dx.$

3. а)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};$  б)  $\int \frac{(x+1)dx}{13-12x+4x^2};$  в)  $\int x \operatorname{arctg} x dx$

4. а)  $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}};$  б)  $\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}};$  в)  $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx.$

5. а)  $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$  б)  $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-2x+x^2}};$  в)  $\int \frac{\ln x dx}{x^2}.$

$$6. \text{ а) } \int \frac{\sin 3x dx}{7-5 \cos 3x}; \text{ б) } \int \frac{(x+3)dx}{10-6x+x^2}; \text{ в) } \int \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$7. \text{ а) } \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}; \text{ б) } \int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}; \text{ в) } \int \frac{xdx}{\cos^2 x}.$$

$$8. \text{ а) } \int \frac{dx}{(3+tgx)\cos^2 x}; \text{ б) } \int \frac{(x-2)dx}{1+x+x^2}; \text{ в) } \int \arcsin x dx.$$

$$9. \text{ а) } \int \frac{\ln^2 x dx}{x}; \text{ б) } \int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2+x+x^2}}; \text{ в) } \int x \sin \frac{x}{2} dx.$$

$$10. \text{ а) } \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{8-5x}}; \text{ б) } \int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}; \text{ в) } \int \frac{xdx}{\sin^2 x}.$$

**Задача №10.** Пользуясь формулой Ньютона—Лейбница, вычислить определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$ .

$$1. \int_4^9 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x}-1}. \quad 2. \int_0^3 \ln(x+3) dx. \quad 3. \int_0^1 x e^{-2x} dx. \quad 4. \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx. \quad 5. \int_1^3 \frac{dx}{x^3+x}.$$

$$6. \int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}. \quad 7. \int_0^{\pi/3} tg^3 x dx. \quad 8. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+1}. \quad 9. \int_0^{0.5} \arcsin x dx. \quad 10. \int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$