Примеры решения задач контрольной работы № 6

Пример 1. Известно эмпирическое распределение выборки. Найти выборочную среднюю выборочную и исправленную выборочную дисперсии. Построить график эмпирической функции распределения и гистограмму относительных частот.

x_i	3	5	7	9	11	13	15
n_i	5	20	35	75	40	20	5

Решение: Для нахождения выборочных характеристик составим расчетную таблицу.

i	x_i	n_i	$x_i n_i$	$x_i^2 n_i$	n_i/n
1	3	5	15	45	0.025
2	5	20	100	500	0.100
3	7	35	245	1715	0.175
4	9	75	675	6075	0.375
5	11	40	440	4840	0.200
6	13	20	260	3380	0.100
7	15	5	75	1125	0.025
		200	1810	17680	$\Sigma n_i/n = 1$

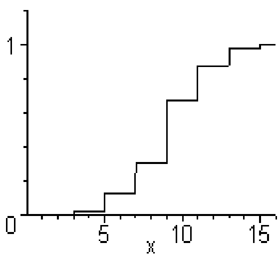
$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\Sigma x_i n_i = \frac{1}{200}\cdot 1810 \approx 9.05$$

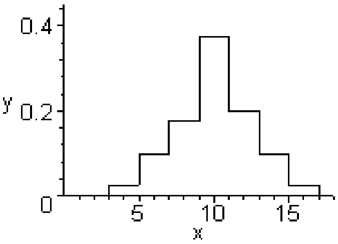
$$S^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_i^2 n_i \quad -\overline{x}_B^2 = \frac{1}{200}\cdot 17680 - 9.05^2 \approx 6.50$$

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot S^2} = \sqrt{\frac{200}{199}\cdot 6.50} = \sqrt{6.533} \approx 2.556$$

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ 0.025 & 3 \le x < 5 \\ 0.125 & 5 \le x < 7 \\ 0.300 & 7 \le x < 9 \\ 0.675 & 9 \le x < 11 \\ 0.875 & 11 \le x < 13 \\ 0.975 & 13 \le x < 15 \\ 1 & x \ge 15 \end{cases}$$

Эмпирическая функция распределения





Гистограмма относительных частот

Пример 2. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью γ, зная выборочную среднюю $\overline{x}_B$, объем выборки n и среднее квадратическое отклонение σ, если $\overline{x}_В = 75.14, \quad n = 81, \quad \sigma = 9, \quad \gamma = 0.95$

Решение: При известном σ доверительный интервал, покрывающий истинное значение параметра a имеет вид:

$$\overline{x}_B - \delta < a < \overline{x}_B + \delta, \quad \text{где} \quad \delta = \frac{t_\gamma \sigma}{\sqrt{n}}.$$

Значение t_γ определяется из равенства: $\Phi(t_\gamma) = \frac{\gamma}{2}$ по таблице значений функции $\Phi(t)$.

При $\gamma = 0.95, \quad t_\gamma = 1.96$. Теперь $\delta = \frac{1.96\cdot 9}{9} = 1.96$;

$75.14 - 1.96 < a < 75.14 + 1.96$

$73.18 < a < 77.10$

Пример 3. В результате семи независимых измерений некоторой величины получены следующие значения: 0.10; 0.20; 0.25; 0.18; 0.12; 0.22; 0.15.

Предполагая, что результаты измерений подчинены нормальному закону, оценить значение величины при помощи доверительного интервала, покрывающего это значение с доверительной вероятностью $\gamma = 0.95$.

Решение: При неизвестном среднем квадратическом отклонении, доверительный интервал, покрывающий истинное значение измеряемой величины имеет вид:

$(\overline{x} - \delta;\ \overline{x} + \delta)$, где $\delta = \frac{t_\gamma \cdot \hat{s}}{\sqrt{n}}$. $\hat{s}$ – исправленное средн. квадр. откл.

Выборочные характеристики $\overline{x}$ и s^2 найдем с помощью расчетной таблицы:

j	x_j	x_j^2
1	0.10	0.0100
2	0.20	0.0400
3	0.25	0.0625
4	0.18	0.0324
5	0.12	0.0144
6	0.22	0.0484
7	0.15	0.0225
$\sum$	1.22	0.2302

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\Sigma x_j = \frac{1}{7}\cdot 1.220 \approx 0.174$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\Sigma x_j^2 - \bar{x}^2 = \frac{1}{7}\cdot 0.2302 - 0.0303 \approx 0.00261.$$

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}\cdot s^2} = \sqrt{\frac{7}{6}.0.00261} \approx 0.0552$$

Значение t_γ определим из табл. $t(\gamma, n)$ (см. Гмурман В.Е.).

При $\gamma = 0.95,\ n = 7 \Rightarrow t_\gamma = 2,45$

Теперь, $\delta = \frac{t_\gamma \cdot \hat{s}}{\sqrt{n}} = \frac{2.45\cdot 0.0552}{\sqrt{7}} \approx 0.051\cdot$

$\bar{x} - \delta = 0.174 - 0.051 = 0.123$

$\bar{x} + \delta = 0.174 + 0.051 = 0.225$

(0.123; 0.225).

Пример 4. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка объемом $n = 45$.
По данным выборки найдены выборочное среднее $x_в = 1,02$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $\hat{s} = 1,05$.

а)Найти доверительный интервал, покрывающий истинное значение дисперсии σ^2
и при уровне значимости $\alpha = 0,10$;

б) проверить гипотезу $H_0: a = a_0 = 0.8$ при конкурирующей $H_1: a > 0.8$.

Решение:

а) Доверительный интервал, покрывающий истинное значение математического дисперсии σ^2 имеет вид

$$\frac{n\cdot \hat{s}^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n)} < \sigma^2 < \frac{n\cdot \hat{s}^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n)}$$

Значения $\chi^2_{n,\frac{1+\gamma}{2}}$, $\chi^2_{n,\frac{1-\gamma}{2}}$ определим по таблице квантилей распределения χ^2

$$\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(n) = \chi^2_{0.95}(45) = 61.7, \quad \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(n) = \chi^2_{0.05}(45) = 30.6$$

$$\frac{45\cdot 1.05^2}{61.7} < \sigma^2 < \frac{45\cdot 1.05^2}{30.6}$$

$$0.804 < \sigma^2 < 1.621$$

б) При уровне значимости $\alpha = 0.1$ проверим гипотезу

$H_0: a = a_0 = 0.8$ при конкурирующей $H_1: a > 0.8$

По условию конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1: a > 0.8$, поэтому критическая область правосторонняя **.**

В качестве критерия выберем статистику. $Z = \frac{\bar{X} - a_0}{\hat{s}}\sqrt{n} \sim t_\alpha(n-1)$

$$z_{кр} = t_{1-0.1}(44) = t_{0.9}(44) \approx 1.30$$

$$z_{набл} = \frac{\bar{x} - a_0}{\hat{s}}\sqrt{n} = \frac{1.02 - 0.8}{1.05}\sqrt{45} \approx 1.41\cdot$$

Т.к. $z_{набл} > z_{кр}$ **,** то основную гипотезу следует отвергнуть.