Примеры решения задач контрольной работы № 5

Пример 1. Одновременно брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на них выпали три различные грани.

<u>Решение:</u> Введем событие А – различные грани.

По формуле классической вероятности: $P(A)=\frac{M}{N}$, где N – общее число исходов;

$N=6\cdot6\cdot6=6^3=216$,

М – число исходов, благоприятствующих событию А.

По принципу перемножения: $M=m_1\cdot m_2\cdot m_3$,

где $m_1=6$ - на 1-й кости – любая из 6-ти граней,

$m_2=5$ - на 2-й кости – любая из 5-ти оставшихся,

$m_3=4$ - на 3-й кости – любая из 4–х оставшихся,

т.е., $M=6\cdot5\cdot4=120$.

Теперь, $P(A)=\frac{120}{216}=\frac{5}{9}\approx0.56$.

Пример 2. Вероятность того, что на странице книги имеется опечатка, равна 0,2. Какова вероятность наличия опечаток в главе, содержащей 4 страницы?

Решение: событие A – наличие опечатки на странице,

Здесь реализуется схема Бернулли, где $n=4,\quad p=P(A)=0.2,\quad q=1-p=0.8$.

$P(\text{наличие опечаток на стр.})=1-P(\text{ни одной опечатки})=$

$=1-P(0)=1-C_4^0\cdot p^0\cdot q^{4-0}=1-q^4=1-0,8^4=1-0,4096=0.5904\approx0.591.$

Пример 3. В каждом из 10 ящиков – по 20 одинаковых на вид деталей. В трех ящиках имеется по одной бракованной детали, в четырех – по три, в остальных бракованных деталей нет. Найти вероятность того, что деталь, вынутая из случайно выбранного ящика – бракованная.

Решение: Используем формулу полной вероятности:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{A}P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)$$

где A - вынутая деталь – бракованная,

H_1 - выбран ящик из 1-й группы; $P(H_1)=\frac{3}{10};\ P_{H_1}(A)=\frac{1}{20}$,

H_2 - выбран ящик из 2-й группы; $P(H_2)=\frac{4}{10};\ P_{H_2}(A)=\frac{3}{20}$,

H_3 - выбран ящик из 3-й группы; $P(H_3)=\frac{3}{10};\ P_{H_3}(A)=0$.

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$

$$=\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{20}+\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{20}+\frac{3}{10}\cdot0=\frac{15}{200}=0.075.$$

Пример 4. Среднее число клиентов обращающихся в филиал банка в течение часа 12. Найти закон распределения числа клиентов появившихся в течение 10 минут. Найти математическое ожидание, дисперсию, вероятность того, что в течение 10 мин. Придет хотя бы один клиент.

Решение. t **= 10** мин **= 1/6** часа, интенсивность $\lambda=12$.

Введем случайную величину ξ – число клиентов, эта случайная величина подчиняется закону Пуассона с параметром $a=\lambda\cdot t=12\cdot\frac{1}{6}=2$.

$MX=a=2,\quad DX=a=2$

Возможные значения $\xi = \{0, 1, 2, ...k, ...\}$, соответствующие вероятности находятся по формуле:

x_i	p_i
0	**0,135**
1	**0,271**
2	**0,271**
3	**0,180**
4	**0,090**
…	**…**
…	**…**

$$P(X = K) = \frac{a^k}{k!} \cdot e^{-a} = \frac{2^k}{k!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}1353 \cdot \frac{2^k}{k!}$$

$$p_0 = P(X = 0) = 0{,}1353 \cdot \frac{2^0}{0!} \approx 0{,}135;$$

$$p_1 = P(X = 1) = 0{,}1353 \cdot \frac{2^1}{1!} \approx 0{,}271;$$

$$p_2 = P(X = 2) = 0{,}1353 \cdot \frac{2^2}{2!} \approx 0{,}271;$$

$$p_3 = P(X = 3) = 0{,}1353 \cdot \frac{2^3}{3!} \approx 0{,}180;$$

$$p_4 = P(X = 4) = 0{,}1353 \cdot \frac{2^4}{4!} \approx 0{,}090;$$

$P($хотя бы один клиент$) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - 0{,}0135 = 0{,}865$.

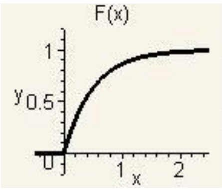
Пример 5. Непрерывная случайная величина ξ задана дифференциальной функцией распределения *f*(*x*). Найти интегральную функцию распределения *F*(*x*), построить их графики. Найти математическое ожидание и дисперсию.

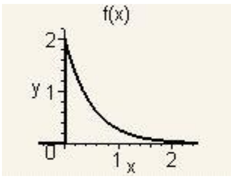
Решение. $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2e^{-2x} & x > 0 \end{cases}$

Здесь случайная величина ξ подчинена показательному закону с параметром $\lambda = 2$.

Математическое ожидание $M\xi = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0{,}5$, дисперсия $D\xi = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Интегральная функция $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-2x}, & x \ge 0 \end{cases}$





Пример 6.. Производится некоторый опыт, в котором случайное событие *A* может появиться с вероятностью p = 0,4. Опыт повторяют в неизменных условиях 500 раз. Найти вероятность того, что в 500 опытах событие *A* появится от 200 до 240 раз.
Решение.
$n = 500, p = 0{,}4, \ q = 1 - p = 0{,}6, k_1 = 200, k_2 = 240;$
m - *частота.*

Так как $n \ge 1$, то используем интегральную теорему Лапласа:

$$P(k_1 < m < k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \phi\left(\frac{240 - 200}{\sqrt{120}}\right) - \phi\left(\frac{200 - 200}{\sqrt{120}}\right) = \phi\left(\frac{40}{10{,}95}\right) - \Phi(0) =$$

$$= \Phi(3{,}65) - \Phi(0) \approx 0{,}5 - 0 = 0{,}5$$