Примеры решения задач контрольной работы № 4

Пример 1. Найти неопределенный интеграл. Результат проверить дифференцированием.

а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{5-\cos x}}dx = \left\{ \begin{matrix} t = 5-2\cos x \\ dt = 2\sin x dx \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{t} + C = \sqrt{5-2\cos x} + C$

$Проверка:\ \left(\sqrt{5-2\cos x}+C\right)' = \frac{1}{2\sqrt{5-2\cos x}}\cdot\left(5-2\cos x\right)' = \frac{(-2)(-\sin x)}{2\sqrt{5-2\cos x}} = \frac{\sin x}{\sqrt{5-2\cos x}}$

б) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-6x+10} = \left\{ \begin{matrix} x^2-6x+10 = (x-3)^2+1 \\ t = x-3 \quad x = t+3 \\ dt = dx \quad 3x-1 = 3t+8 \end{matrix} \right\} = \int \frac{(3t+8)dt}{t^2+1} = \int\left(3\frac{t}{t^2+1}+8\frac{1}{t^2+1}\right)dt = \frac{3}{2}\ln\left(t^2+1\right)+8arctgt+C =$

$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2-6x+10\right)+8arctg\left(x-3\right)+C$

$Проверка:\ \left[\frac{3}{2}\ln\left(x^2-6x+10\right)+8arctg\left(x-3\right)+C\right]' = \frac{3}{2}\cdot\frac{2x-6}{x^2-6x+10}+8\cdot\frac{1}{(x-3)^2+1} =$

$= \frac{3(x-3)}{x^2-6x+10}+\frac{8}{x^2-6x+10} = \frac{3x-1}{x^2-6x+10}$

в) $\int x^3\ln x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x & dv = x^3dx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^4}{4} \end{matrix} \right\} = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}+C$

$Проверка:\ \left(\frac{x^4}{4}\cdot\ln x - \frac{x^4}{16}+C\right)' = \frac{1}{4}\cdot 4x^3\cdot\ln x + \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x} - \frac{4x^3}{16} = x^3\ln x + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} + C = x^3\ln x$

Пример 2.. Найти неопределенные интегралы

$а)\ \int\frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}} = \left\{ \begin{matrix} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{matrix} \right\} = -\int\frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t}+C = -2\sqrt{\cos x}+C$

$б)\ \int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+1} = \left\{ \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right\} = 2\int\frac{t^2}{t+1}dt = 2\int\frac{(t^2-1)+1}{t+1}dt = 2\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt =$

$= 2\left(\frac{t^2}{2}-t+\ln|t+1|\right)+C = x-2\sqrt{x}+\ln\left(\sqrt{x}+1\right)C$

$в)\ \int xe^{-x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & dv = e^{-x}dx \\ du = dx & v = -e^{-x} \end{matrix} \right\} = -xe^{-x}+\int e^{-x}dx = -xe^{-x}-e^{-x}+C = -e^{-x}\left(x+1\right)+C$

Пример 3. Вычислить определенный интеграл

$\int_0^2\ln(x+1)dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x+1) & dv = dx \\ du = \frac{dx}{x+1} & v = x \end{matrix} \right\} = x\ln(x+1)\Big|_0^2 - \int_0^2\frac{x}{x+1}dx = 2\ln 3 - \int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx =$

$= 2\ln 3 - \left(x-\ln(x+1)\right)\Big|_0^2 = 2\ln 3 - \left(2-\ln 3-0\right) = 3\ln 3 - 2 \approx 3\cdot 1.097 - 2 = 1.291$

Пример 4. Вычислить приближенно значение интеграла $\int_{-3}^{7}\sqrt{x^2+1}\,dx$

с помощью формулы Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 равных частей.
Решение.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})]$$

$$(\ y_i = f(x_i),\quad x_i = a+(i-1)h;\quad i=0,1,\ldots n;\quad h=\frac{b-a}{n}\ )$$

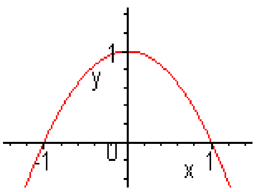
$$a=-3,\quad b=7,\quad n=10,\quad h=\frac{7-(-3)}{10}=1$$

Вычисления сводим в таблицу

i	x_i	x_i^2	$y_i=\sqrt{x_i^2+1}$	$y_0,\,y_{10}$	$y_1,\,y_3,..$	$y_2,\,y_4,..$
0	-3	9	3.1623	3.1623		
1	-2	4	2.2361		2.2361	
2	-1	1	1.4142			1.4142
3	0	0	1.0000		1.0000	
4	1	1	1.4142			1.4142
5	2	4	2.2361		2.2361	
6	3	9	3.1623			3.1623
7	4	16	4.1231		4.1231	
8	5	25	5.0990			5.0990
9	6	36	6.0828		6.0828	
10	7	49	7.0711	7.0711		
			$\sum$	10.2334	15.6780	11.0897

$$\int_{-3}^{7}\sqrt{x^2+1}dx \approx \frac{1}{3}(10.2334+4\cdot 30.339+2\cdot 23.858)=\frac{1}{3}(10.2334+62.7120+22.1794)=\frac{1}{3}95.1248\approx 31.708$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$y=1-x^2,\quad y=0$



$$S=\int_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx;$$

$$\begin{cases} y=1-x^2 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \quad \Rightarrow x_1=-1,\, x_2=1$$

$$f_1(x)=1-x^2,\quad f_2(x)=0,\quad a=-1,\quad b=1$$

$$S=\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)dx=2\cdot\int_0^1\left(1-x^2\right)dx=2\cdot\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=2\left(\left(1-\frac{1}{3}\right)-0\right)=\frac{4}{3}\approx 1.33$$

Пример 6 Найти общее решение дифференциального. уравнения.

$$y'tgx = y+1$$

$$y'=\frac{y+1}{tgx}\quad - \quad \textit{диф.}\quad \textit{ур}-\textit{е}\quad \textit{с}\quad \textit{разд.}\quad \textit{переменными}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+1}{tgx}\quad\Rightarrow \frac{dy}{y+1}=\frac{\cos x}{\sin x}dx\quad\Rightarrow \int\frac{dy}{y+1}=\int\frac{\cos xdx}{\sin x}+C$$

$$\ln\left(y+1\right)=\ln C\sin x\quad\Rightarrow\quad y=C\sin x-1-\textit{общее}\quad\textit{решение}$$

Пример 7. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

$y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)e^{-x}$ *Нач. усл.*: $y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$

$$y = u + v$$

где u – общее решение диф. уравн. $u'' - 5u' + 6u = 0$

v – частное решение исходного диф. уравн.

$u'' - 5u' + 6u = 0$

$k^2 - 5k + 6 = 0$ – характер. уравн.

$k_{1,2} = 2.5 \pm \sqrt{6.25 - 6} = 2.5 \pm 0.5$

$k_1 = 2, \quad k_2 = 3$

$e^{2x}, \quad e^{3x}$ – фунд. сист.

$u = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$

$v = (Ax + B)e^{-x}$

$v' = Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}$

$v'' = -2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x}$

$-2Ae^{-x} + (Ax + B)e^{-x} - 5(Ae^{-x} - (Ax + B)e^{-x}) +$

$+ 6(Ax + B)e^{-x} = (2x - 7)e^{-x}$

$x(A + 5A + 6A) + (-2A + B - 5A + 5B + 6B) = 12x - 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12A = 12, \quad -7A + 12B = -7 \Rightarrow A = 1, \quad B = 0$

$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + xe^{-x}$ – общее решение

$y' = 2C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{3x} + e^{x} - xe^{-x}$

Используем начальные условия

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ 2C_1 + 3C_2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = -1 \end{cases}$$

$y = e^{2x} - e^{3x} + xe^{-x}$ – частное решение

Пример 8.

Найти интервал сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{3^n} = 1 + \frac{2 \cdot x}{3} + \frac{3 \cdot x^2}{3^2} + \frac{4 \cdot x^3}{3^3} + \ldots$$

Используем признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim\left|\frac{(n+2)\cdot x^{n+1}}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{(n+1)\cdot x^n}\right| = \frac{|x|}{3} \cdot \lim \frac{n+2}{n+1} = \frac{|x|}{3}$$

Ряд сходится абсолютно при $\frac{|x|}{3} < 1 \quad \Rightarrow |x| < 3.$

Интервал сходимости $-3 < x < 3.$