Примеры решения задач контрольной работы № 3

Пример 1. Вычислить пределы.

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\dfrac{(x-1)(3x-1)}{(x-1)(x+1)}=\lim\dfrac{(3x-1)}{(x+1)}=\dfrac{2}{2}=1$

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+7n^2\text{-}1}{5n^3\text{-}4n^2+3n}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\dfrac{n^3\left(2+7/n-1/n^2\right)}{n^3\left(5-4/n+3/n^2\right)}=\dfrac{2}{5}$

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1\text{-}\cos 2x}{3x^2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\dfrac{2\sin^2 x}{3x^2}=\lim\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2=\dfrac{2}{3}$

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{\text{x}}\right)^{3x}=\left(1^\infty\right)=\lim\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}\cdot\frac{6x}{2}}=e^3$

Пример 2. Найти y'

а) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2-4x+2}}$

$$y'=\frac{(1+x)\cdot'\sqrt{x^2-4x+2}+(1+x)(\sqrt{x^2-4x+2})'}{x^2-4x+2}=\frac{\sqrt{x^2-4x+2}-(1+x)\cdot\dfrac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+2}}}{x^2-4x+2}=$$

$$=\frac{x^2-4x+2-(1+x)\cdot(x-2)}{(x^2-4x+2)\sqrt{x^2-4x+2}}=\frac{x^2-4x+2-(x^2-x-2)}{(x^2-4x+2)\sqrt{x^2-4x+2}}=\frac{-3x+4}{(x^2-4x+2)\sqrt{x^2-4x+2}}$$

б) $y=x\sin x-\cos x$

$$y'=x'\cdot\sin x+x(\sin x)'-(\cos x)'=\sin x+x\cdot\cos x-(-\sin x)=2\sin x+x\cdot\cos x$$

в) $y=x^3\ln x$

$$y'=(x^3)'\cdot\ln x+x^3\cdot\left(\ln x\right)'=3x^2\cdot\ln x+x^3\cdot\frac{1}{x}=3x^2\ln x+x^2=x^2(1+3\ln x)$$

Пример 3. Найти $\dfrac{dy}{dx}$ неявно заданной функции

$$\frac{y}{x}=arctg\,\frac{x}{y}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)_x'=\left(arctg\,\frac{x}{y}\right)_x'\quad\Rightarrow\quad\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{1+\left(x/y\right)^2}\cdot\frac{y-xy'}{y^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{y-xy'}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\quad y'\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{y}{x^2}+\frac{y}{x^2+y^2}\quad\Rightarrow\quad y'(x(x^2+y^2)+x^3)=y(x^2+y^2+x^2)\quad\Rightarrow\quad y'=\frac{y}{x}$$

Пример 4. Найти $\dfrac{dy}{dx};\dfrac{d^2y}{dx^2}$ параметрически заданной функции

$$\begin{cases}x=\ln t\\ y=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\end{cases}\qquad\qquad y_x'=\frac{y_t'}{x_t'},\quad y_x''=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}$$

$$y_x'=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)_t'}{(\ln t)_t'}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right);$$

$$y_x''=\frac{(y_x')_t'}{x_t'}=\frac{\left(\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)_t'}{(\ln t)_t'}=\frac{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)}{\frac{1}{t}}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)$$

Пример 5. Найти частные производные функции $z = \arcsin {}^{x}\!/_{y}$.

Решение:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(\arcsin {}^{x}\!/_{y}) = \frac{1}{\sqrt{1-\left({}^{x}\!/_{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\arcsin {}^{x}\!/_{y}) = \frac{1}{\sqrt{1-\left({}^{x}\!/_{y}\right)^2}} \cdot (-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{y \cdot \sqrt{y^2 - x^2}}$$

Пример 6. Дана функция $z = 2x^2 + y^2 + x - 3y$ и две точки $A(2,-1)$, и $B(2.02,-0.99)$.

Требуется:

1) вычислить приближенное значение функции в точке B с помощью дифференциала;
2) вычислить точное значение функции в точке B;
3) оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции дифференциалом.

Решение:

$$\Delta z \approx dz \quad \Rightarrow \quad z_B \approx z_A + dz = z_A + (\frac{\partial z}{\partial x})_A \Delta x + (\frac{\partial z}{\partial y})_A \Delta y$$

1) $z_A = (2x^2 + y^2 + x - 3y)_A = 2 \cdot 2^2 + (-1)^2 + 2 - 3(-1) = 14.0$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2 + y^2 + x - 3y) = 4x + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y^2 + x - 3y) = 2y - 3$$

$$(\frac{\partial z}{\partial x})_A = (4x+1)_A = 8 + 1 = 9, \quad (\frac{\partial z}{\partial y})_A = (2y-3)_A = -2 - 3 = -5$$

$$\Delta x = x - x_0 = 2.02 - 2.0 = 0.02, \quad \Delta y = y - y_0 = -0.99 + 1.0 = 0.01$$

$$dz = (\frac{\partial z}{\partial x})_A \Delta x + (\frac{\partial z}{\partial y})_A \Delta y = 9 \cdot 0.02 + (-5) \cdot 0.01 = 018 - 0.05 = 0.13$$

$$\tilde{z}_B \approx 14.0 + 0.13 = 14.13$$

2) $z_B = (2x^2 + y^2 + x - 3y)_B = 2 \cdot 2.02^2 + (-0.99)^2 + 2.02 - 3 \cdot (-0.99) = 8.1608 + 0.9801 + 2.02 + 2.97 = 14.1309$

3) $\delta = \left|\frac{\tilde{z}_B - z_B}{\tilde{z}_B}\right| \cdot 100\% = \left|\frac{14.13 - 14.1309}{14.13}\right| \cdot 100\% \approx 0.006\%$