Примеры решения задач контрольной работы № 2

Пример 1. Даны вершины $A(3;-2),\quad B(-1;-5),\quad C(-6;-7).$ треугольника.

Требуется найти:

1. длину стороны BC;
2. площадь треугольника ;
3. уравнение стороны BC;
4. уравнение высоты проведенной из вершины A;
5. длину высоты проведенной из вершины A;
6. уравнение биссектрисы внутреннего угла B;
7. угол B.в радианах с точностью до 0,01;
8. систему неравенств, определяющую треугольник ABC

Сделать чертеж

Решение:

1. $|BC| =\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2} = \sqrt{(-4-1)^2+(10+2)^2} = \sqrt{25+144} = 13$

2. $S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -4 & 10 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(-10-4+10)-(8+50+1)) = \frac{1}{2}(-4-59) = 31,5(ед)^2$

3. Найдем уравнения сторон

$$AB: \quad \frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A} \Rightarrow \frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+2}{-5+2} \Rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{-3} \Rightarrow y+2 = \frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{17}{4} \Rightarrow 3x-4y-17=0; \quad k_{AB} = 3/4;$$

$$AC: \quad \frac{x-x_A}{x_C-x_A} = \frac{y-y_A}{y_C-y_A} \Rightarrow \frac{x-3}{-6-3} = \frac{y+2}{7+2} \Rightarrow \frac{x-3}{-9} = \frac{y+2}{9} \Rightarrow y+2 = -(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x+y-1 = 0; \quad k_{AC} = -1$$

$$BC: \quad \frac{x-x_B}{x_C-x_B} = \frac{y-y_B}{y_C-y_B} \Rightarrow \frac{x+1}{-6+1} = \frac{y+5}{7+5} \Rightarrow \frac{x+1}{-5} = \frac{y+5}{12} \Rightarrow y+5 = -\frac{12}{5}(x+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = -\frac{12}{5}x + \frac{2}{5} \Rightarrow 12x+5y+37=0; \quad k_{BC} = -12/5;$$

4. Запишем уравнение пучка прямых, проходящих через точку $A(3;-2)$

$$(y-y_A) = k(x-x_A) \quad \Rightarrow \quad (y+2) = k(x-3)$$

Из условия перпендикулярности $k = -\frac{1}{k_{BC}} = \frac{5}{12}$, где $k_{BC} = -\frac{12}{5}$ угловой коэффициент стороны BC

$$y+2 = \frac{5}{12}(x-3) \quad \Rightarrow 5x-12y-39=0$$ – уравнение высоты AD

5. Растояние от точки $M\ (x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ определяется по формуле

$$h = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$h_{AD} = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{|12\cdot 3+5\cdot(-2)+37|}{\sqrt{12^2+5^2}} = \frac{|36-10+37|}{\sqrt{169}} = \frac{63}{13} \approx 4,846$$

6. Биссектриса, проведенная из точки B, делит сторону AC на части пропорционально длинам сторон BA и BC

$$|BA| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3+1)^2 + (-2+5)^2} = \sqrt{16+9} = 5; \quad |BC| = 13; \quad \lambda = \frac{|BA|}{|BC|} = \frac{5}{13}$$

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_C}{1+\lambda} = \frac{3 + \frac{5}{13}\cdot(-6)}{1+\frac{5}{13}} = \frac{39-30}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$y_K = \frac{y_A + \lambda y_C}{1+\lambda} = \frac{-2 + \frac{5}{13}\cdot 7}{1+\frac{5}{13}} = \frac{-26+35}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow K\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$$

Найдем уравнение биссектрисы BK

$$\frac{x - x_B}{x_K - x_B} = \frac{y - y_B}{y_K - y_B} \quad \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{y+5}{\frac{1}{2}+5} \quad \Rightarrow \frac{x+1}{\frac{3}{2}} = \frac{y+5}{\frac{11}{2}} \quad \Rightarrow 3(y+5) = 11(x+1) \Rightarrow$$

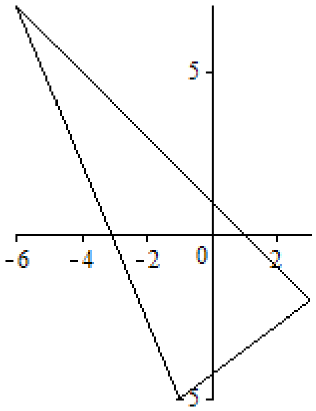
$$\Rightarrow y = \frac{11}{3}x - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow 11x - 3y - 4 = 0$$ – уравнение биссектрисы BK;

7. $$tg\angle B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{AB}\cdot k_{BC}} = \frac{-\frac{12}{5} - \frac{3}{4}}{1 + (-\frac{12}{5})\cdot\frac{3}{4}} = \frac{-\frac{63}{20}}{1 - \frac{36}{20}} = \frac{63}{16} \quad \Rightarrow \angle B = arctg\frac{63}{16} \approx 1.322 \text{ рад.}$$

$AB: \quad 3x - 4y - 17 \le 0;$

8. $AC: x + y - 1 \le 0;$

$BC: 12x + 5y + 37 \ge 0;$



Пример 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(3;1;4)$, $A_2(-1;6;1)$, $A_3(-1,1,6)$, $A_4(0;4;-1)$.
Требуется найти:
1. вектор A_1A_2, его длину и направление;
2. угол между векторами A_1A_2 и A_1A_4 ;
3. уравнение плоскости основания пирамиды (грани $A_1A_2A_3$)
4. площадь грани $A_1A_2A_3$;
5. угол между ребром A_1A_4 и плоскостью основания пирамиды;
6. уравнение высоты, опущенной из вершины A_4 на плоскость основания пирамиды;
7. объем пирамиды.
Сделать чертеж
Решение: Рассмотрим векторы

$$\bar{a} = A_1A_2 = \{\text{-1-3; 6-1; 1-4}\} = \{-4;5;-3\}; \quad |\bar{a}| = \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{50} \approx 7.071$$

$$\bar{b} = A_1A_3 = \{\text{-1-3; 1-1; 6-4}\} = \{-4;0;2\}; \quad |\bar{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 0 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4.472$$

$$\bar{c} = A_1A_4 = \{\text{0-3; 4-1; }-1\text{-4}\} = \{-3;3;-3\}; \quad |\bar{c}| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-3)^2} = \sqrt{27} \approx 5.196$$

Найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$

$$(\bar{a}\cdot\bar{c}) = -4\cdot(-3) + 5\cdot 3 + (-3)\cdot(-3) = 36$$

Векторное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = 10i + 20j + 20k$$

$$|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{10^2 + 20^2 + 20^2} = 30;$$

$$\bar{N} = \frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|} = \left\{\frac{1}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right\}; \quad \bar{c}\cdot\bar{N} = -3\cdot\frac{1}{3} + 3\cdot\frac{2}{3} - 3\cdot\frac{2}{3} = -1$$

Смешанное произведение

$$\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} -4 & 5 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 - 30 + 36 - (0 - 24 + 60) = 6 - 36 = -30$$

1.

$$A_1A_2 = \bar{a} = \{-4;5;-3\}, \quad |A_1A_2| = |\bar{a}| = \sqrt{7.071},$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} \approx \frac{-4}{7.071} = -0.566$$

$$\cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} \approx \frac{5}{7.071} = 0.707$$

направляющие косинусы

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} \approx \frac{-3}{7.071} = -0.424$$

2.

$$\cos(\bar{a}\quad\bar{c}) = \frac{\bar{a}\cdot\bar{c}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{c}|} = \frac{36}{\sqrt{50}\cdot\sqrt{27}} \approx 0.980$$

$$\varphi = \arccos 0.980 \approx 0.20 \ \textit{рад}$$

3.

$$N_x(x - x_1) + N_y(y - y_1) + N_z(z - z_1) = 0$$

$$\frac{1}{3}(x-3) + \frac{2}{3}(y-1) + \frac{2}{3}(z-4) = 0 \quad \Rightarrow x + 2y + 2z - 13 = 0$$ уравнение грани $A_1A_2A_3$

4.

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2}|\bar{a}\times\bar{b}| = \frac{1}{2}\cdot 30 = 15(\textit{ед})^2$$

5.

$$\sin\left(A_1A_2 \quad A_1A_2\,A_3\right) = \cos\left(\bar{c} \quad \bar{N}\right) = \frac{\bar{c}\cdot\bar{N}}{|\bar{c}|\cdot|\bar{N}|} = \frac{-1}{\sqrt{27}\cdot 1} \approx -0.192$$

$$\varphi = \arcsin\left(-0.192\right) \approx -0.193 \text{ } рад$$

6.

$$\frac{x-x_4}{N_x} = \frac{y-y_4}{N_y} = \frac{z-z_4}{N_z} \quad \Rightarrow \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-4}{-1}$$ – уравнение высоты

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1+4t \\ z = 4-t \end{cases}$$ – параметрические уравнения высоты

7.

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}\left|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}\right| = \frac{1}{6}\left|-30\right| = 5\left(ед\right)^3$$