Примеры решения задач контрольной работы № 1

Пример 1. Решить систему
а) по формулам Крамера;
б) с помощью обратной матрицы

$$\begin{cases} -x+5y+8z=-7 \\ 3x+y+2z=1 \\ 2x+2y-3z=12 \end{cases}$$

Решение:
а) По формулам Крамера
Найдем определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (3+20+48)-(16-4-45)=71-(-33)=104$$

$\Delta \neq 0$, *след. система имеет единственное решение*

Вычислим определители при неизвестных

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -7 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (21+120+16)-(96-28-15)=157-53=104$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -1 & -7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & -3 \end{vmatrix} = (3-28+288)-(16-24+63)=263-55=208$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 12 \end{vmatrix} = (-12+10-42)-(-14-2+180)=-44-164=-208$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{104}{104}=1,\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{208}{104}=2,\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-208}{104}=-2$$

б) решение с помощью обратной матрицы

Запишем систему в матричной форме

$$\begin{pmatrix} -1 & 5 & 8 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-7,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=13,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=4$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=31,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-13,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=12$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=26,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{104}\begin{pmatrix} -7 & 31 & 2 \\ 13 & -13 & 26 \\ 4 & 12 & -16 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}=\frac{1}{104}\begin{pmatrix} 49+31+24 \\ -91-13+312 \\ -28+12-192 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$x=-1,\quad y=2,\ z=-2$$

Пример 2. Выполнить действия над матрицами

$\left(A-2B^{-1}\right)B,$

$$где\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Решение:

$$(A-2B^{-1})B = AB-2\underbrace{B^{-1}B}_{=E} = AB-2E =$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ -1 & 0 & 7\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 2 & -2 & 4\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -7 & 19\\ 1 & 7 & 16\\ 6 & -8 & 46\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & -7 & 19\\ 1 & 5 & 16\\ 6 & -8 & 44\end{pmatrix}$$

Пример3. Решить систему методом Жордано-Гаусса

$$\begin{cases}x_1+x_2+3x_3+2x_4=1\\ 3x_1-x_2-2x_3-x_4=-4\\ 2x_1+3x_2-x_3-x_4=-6\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4=-4\end{cases}$$

Решение: Выпишем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 3 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -2 & -1 & -4\\ 2 & 3 & -1 & -1 & -6\\ 1 & 2 & -1 & 3 & -4\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & -4 & -11 & -7 & -7\\ 0 & 1 & -7 & -5 & -8\\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 7 & 1 & 6\\ 0 & 0 & -27 & -3 & -27\\ 0 & 0 & -3 & -6 & -3\\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 7 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 9 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 9 & 1 & 9\\ 0 & 0 & -17 & 0 & -17\\ 0 & 1 & -13 & 0 & -14\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -2 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 9 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -13 & 0 & -14\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\end{array}\right)\quad x_1=-1,\ x_2=1,\ x_3=1,\ x_4=0$$

Пример 4. Найти решение однородной системы

$$\begin{cases}x_1+3x_2-12x_2+4x_4=0\\ 2x_1-x_2-3x_3-6x_4=0\\ 4x_1+5x_2-27x_3+2x_4=0\end{cases}$$

Решение:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -12 & 4 & 0\\ 2 & -1 & -3 & -6 & 0\\ 4 & 5 & -27 & 2 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -12 & 4 & 0\\ 0 & -7 & 21 & -14 & 0\\ 0 & -7 & 21 & -14 & 0\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 3 & -12 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\end{array}\right)\approx$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\Rightarrow\begin{matrix}x_1=3x_3+2x_4\\ x_2=3x_3-2x_4\end{matrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=3u+2v\\ x_2=3u-2v\\ x_3=u\\ x_4=v\end{cases}\quad \textit{система имеет множество решений}$$

Пример 5. Найти матрицу перехода от старого базиса $e_1,\ e_2,\ e_3$ к новому e_1', e_2', e_3' и найти координаты вектора x в новом базисе, если известно его представление в старом базисе.

$$\begin{cases} e_1' = -e_1 \\ e_2' = 4e_1 + 3e_2 + e_3 \\ e_3' = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases}, \quad x = (4,-1,3).$$

Решение: Векторы старого и нового базисов связаны соотношением $e' = e \cdot T$, где T матрица перехода. Запишем исходное уравнение в матричной форме

$$\begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \Rightarrow e' = A \cdot e \Rightarrow (e_1'\, e_2'\, e_3') = A^T \cdot (e_1\, e_2\, e_3) \Rightarrow T = A^T = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Координаты вектора в новом и старом базисах связаны соотношением $x' = T^{-1} \cdot x$

Найдем матрицу T^{-1}

$$T = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad (T|E) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} -5 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4/5 & -2/5 & -1/5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2/15 & -1/5 & 4/15 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 0 & -1/3 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/10 & -1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{array}\right) \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{20} \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix}$$

Теперь можно найти координаты вектора в новом базисе

$$x' = T^{-1} \cdot x \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \cdot T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 6 & -2 \\ 0 & 10 & -10 \\ 0 & -5 & 15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ -40 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$$x' = -e_1' - 2e_2' + \frac{5}{2} e_3'$$

Пример 6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\tilde{A}$ (матрицы A).

Привести матрицу оператора $\tilde{A}$ к диагональному виду. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: Найдем характеристический многочлен $|A - \lambda E| = 0$

$$|A - \lambda E| = 0 \quad \Rightarrow \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow (3-\lambda)(2-\lambda) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4 -$ собственные значения матрицы A

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \quad \Rightarrow |A - \lambda_1 E| = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 = 4 \quad \Rightarrow |A - \lambda_2 E| = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \left(\begin{array}{cc|c} -1 & -2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow x_1 = -2x_2 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C_2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \text{собственные векторы матрицы } A$$

Собственные векторы матрицы A, принадлежащие различным собственным значениям , линейно независимы.

Так собственные векторы представлены в естественном базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,то из соотношения

$$e' = eT \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot T \quad \Rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу T^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & -1/3 & 1/3 \end{array}\right) \quad \Rightarrow T^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдем матрицу оператора $\tilde{A}$ в базисе собственных векторов

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$