

Контрольная работа №2

Функции двух переменных

1–10. Найти частные производные функции $z = f(x, y)$.

1. $z = \arcsin \frac{x}{y}$;
2. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$;
3. $z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1)$;
4. $z = \sin^2(x - 2ay)$;
5. $z = y\sqrt{\frac{y}{x}}$;
6. $z = \operatorname{tg}^2(3x - 2y)$;
7. $z = \arcsin \frac{x + y}{x - y}$;
8. $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$;
9. $z = \sqrt[3]{2x^2 - y^2}$;
10. $z = x e^{xy}$.

11–20. Даны функция $z = f(x, y)$ и две точки $A(x_0; y_0)$ и $B(x_1; y_1)$.

Требуется:

- 1) вычислить приближенное значение функции в точке B , исходя из значения ее в точке A и заменив приращение функции при переходе от точки A к точке B дифференциалом;
- 2) найти точное значение функции в точке B ;
- 3) оценить в процентах относительную погрешность, возникающую при замене приращения функции дифференциалом.

11. $z = 2x^2 + y^2 + x - 3y$, $A(2; -1)$, $B(2, 02; -0, 99)$;
12. $z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$, $A(3; 2)$, $B(3, 02; 1, 98)$;
13. $z = xy + 4x - 3y$, $A(4; -2)$, $B(3, 98; -3, 03)$;
14. $z = 3y^2 - 9xy + y$, $A(1; 3)$, $B(1, 07; 2, 94)$;
15. $z = 3x^2 + 3xy + y^2$, $A(1; 3)$, $B(0, 96; 2, 95)$;
16. $z = xy + 2x - y$, $A(2; 2)$, $B(1, 93; 2, 05)$;
17. $z = 2x^2 + 3xy + y^2$, $A(1; 2)$, $B(0, 96; 1, 95)$;
18. $z = 2y^2 + 9xy + y$, $A(3; 1)$, $B(2, 94; 1, 07)$;
19. $z = xy + 2y^2 - 2x$, $A(1; 2)$, $B(0, 97; 2, 03)$;
20. $z = x^2 + y^2 + y$, $A(-2; 2)$, $B(-2, 03; 2, 04)$;

Неопределенный и определенный интегралы

21–30. Найти неопределенные интегралы. В первом примере [п. а)] результат проверить дифференцированием.

- | | | | | | | |
|-----|----|---|----|---|----|--|
| 21. | a) | $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-2\cos x}}$; | b) | $\int \frac{(2x-1) dx}{x^2-6x+10}$; | c) | $\int x^3 \ln x dx$; |
| 22. | a) | $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^2}}$; | b) | $\int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{3+2x-3x^2}}$; | c) | $\int x \cos 2x dx$; |
| 23. | a) | $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{\sin x}}$; | b) | $\int \frac{x+1}{x^2-4x+5}$; | c) | $\int x \operatorname{arctg} x dx$; |
| 24. | a) | $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$; | b) | $\int \frac{(2x+3) dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; | c) | $\int \operatorname{arctg} \frac{1}{x} dx$; |
| 25. | a) | $\int \frac{x dx}{\sqrt{4+x^2}}$; | b) | $\int \frac{(x+1) dx}{x^2-2x+5}$; | c) | $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$; |
| 26. | a) | $\int \frac{\sin 2x dx}{1-2\cos 2x}$; | b) | $\int \frac{(x+5) dx}{x^2+6x+13}$; | c) | $\int \sqrt{x} \ln x dx$; |
| 27. | a) | $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; | b) | $\int \frac{(3x-1) dx}{x^2+2x+2}$; | c) | $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$; |
| 28. | a) | $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^2 x}$; | b) | $\int \frac{(x-2) dx}{x^2+x+\frac{5}{4}}$; | c) | $\int \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}} dx$; |
| 29. | a) | $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; | b) | $\int \frac{(x+4) dx}{x^2-6x+10}$; | c) | $\int x^2 \ln x dx$; |
| 30. | a) | $\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}$; | b) | $\int \frac{(2x-8) dx}{2-x-x^2}$; | c) | $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$. |

31 – 40. Вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$

- | | | | |
|-----|--|-----|--|
| 31. | $\int_0^5 \frac{\sqrt{x+4} dx}{\sqrt{x+4}-1}$; | 36. | $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\cos^2 x}$; |
| 32. | $\int_1^3 \ln(x+1) dx$; | 37. | $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^3 x dx$; |
| 33. | $\int_0^1 x e^{-2x} dx$; | 38. | $\int_0^3 \frac{2\sqrt{x+1} dx}{(x+1)^2 \sqrt{x}}$; |
| 34. | $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2} dx}{x^2}$; | 39. | $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$; |
| 35. | $\int_{-2}^2 \frac{\sqrt{x+2} dx}{1+\sqrt{x+2}}$; | 40. | $\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4-x^2} dx$. |

Геометрические приложения определенного интеграла, квадратурные формулы

41. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = 4x$;
42. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{x^2 + 1}$ и $y = 4x$;
43. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$ и $x + y - 5 = 0$;
44. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x$ и $y^2 = 24x + 48$;
45. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $y = \frac{x}{2}$;
46. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{6x}$ и $y = \sqrt{16 - x^2}$ и $x = 0$;
47. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линией $x^2 + (y - 5)^2 = 9$;
48. Найти длину дуги линии $y = x\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 4$;
49. Найти длину дуги линии $y = \frac{x^2}{2}$ от $x = 0$ до $x = 1$;
50. Найти длину дуги линии $2y = e^x + e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.
- 51–60. Вычислить приближенное значение определенного интеграла $\int_b^a \sqrt{x^2 + q} dx$ по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на 10 частей. Все вычисления производить с округлением до третьего десятичного знака.
- | | |
|--|--|
| 51. $a = 0, \quad b = 10, \quad q = 9;$ | 56. $a = -7, \quad b = 3, \quad q = 17;$ |
| 52. $a = -3, \quad b = 7, \quad q = 1;$ | 57. $a = -8, \quad b = 2, \quad q = 14;$ |
| 53. $a = -2, \quad b = 8, \quad q = 3;$ | 58. $a = -1, \quad b = 9, \quad q = 13;$ |
| 54. $a = -4, \quad b = 6, \quad q = 18;$ | 59. $a = -9, \quad b = 1, \quad q = 19;$ |
| 55. $a = -5, \quad b = 5, \quad q = 11;$ | 60. $a = -6, \quad b = 4, \quad q = 15.$ |

Дифференциальные уравнения

61–70. Найти общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

61. $xy' + 2y = \cos x$; 66. $(xy - x^2)y' - y^2 = 0$;
62. $x^2 y' + (y^2 - xy) = 0$; 67. $y' - y \operatorname{tg} x = \sin 2x$;
63. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 1$; 68. $x^2 y' - (2x + y) = 0$;
64. $(x^2 - y^2) - 2xyy' = 0$; 69. $x^2 y' - (2x + y)y = 0$;
65. $xy' - 2y = x + 1$; 70. $xy^2 y' = x^3 + y^3$.

71–80. Найти частное решение дифференциального уравнения 2-го порядка $y'' + py' + qy = f(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

71. $y'' + 4y' + 4y = 25e^{3x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$;
72. $y'' - 5y' + 6y = 6x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
73. $y'' - y' - 6y = 52 \cos 2x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$;
74. $y'' + 2y' + y = 4e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
75. $y'' - 10y' - 24y = 145 \cos x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
76. $y'' - 10y' + 24y = 24x - 10$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
77. $y'' - 4y' - 5y = 5x - 1$, $y(0) = 7$, $y'(0) = -1$;
78. $y'' - 2y' + -3y = 3e^{2x}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;
79. $y'' - 4y' + 3y = 65 \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$;
80. $y'' - 3y' + 2y = 2x^2 - 7$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Ряды

81–90. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

81. $u_n(x) = \frac{x^n}{4^n(n+1)}$; 86. $u_n(x) = \frac{nx^n}{2^n(n+1)}$;
82. $u_n(x) = \frac{x^n}{2^n \sqrt{n^2+1}}$; 87. $u_n(x) = \frac{(n+1)x^n}{3^n}$;
83. $u_n(x) = \frac{3^n x^n}{\sqrt[3]{n+1}}$; 88. $u_n(x) = \frac{x^n}{3^n(2n+1)}$;
84. $u_n(x) = \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n}$; 89. $u_n(x) = \frac{n^2 x^n}{n+1}$;
85. $u_n(x) = \frac{(n+2)x^n}{(n+3)3^n}$; 90. $u_n(x) = \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$.