

Вопросы и задачи к экзамену

2 семестр

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема об общем виде неопределенного интеграла. Основные свойства неопределенного интеграла.
2. Таблица неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования: замена переменной.
3. Основные методы интегрирования, интегрирование по частям:  $\int P(x)a^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \sin kx dx$ ,  $\int P(x) \cos kx dx$ .
4. Основные методы интегрирования, интегрирование по частям:  $\int P(x) \ln(Q(x)) dx$ ,  $\int P(x) \arcsin kx dx$ ,  $\int P(x) \arccos kx dx$ ,  $\int P(x) \arctg kx dx$ ,  $\int P(x) \operatorname{arcctg} kx dx$
5. Возвратные интегралы:  $\int e^{ax} \sin(kx + b) dx$ ,  $\int e^{ax} \cos(kx + b) dx$ ,  $\int \sqrt{a^2 \pm x^2} dx$
6. Интегрирование рациональных дробей:  $\int \frac{A}{x-a} dx$ ,  $\int \frac{A}{(x-a)^s} dx$ ,  $\int \frac{Bx+C}{x^2+px+q} dx$ ,
7. Интегрирование рациональных дробей:  $\int \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^s} dx$ ,
8. Интегрирование иррациональных выражений вида  $\int \frac{Mx+N}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ ,  
 $\int \frac{Mx+N}{(x-k)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ .
9. Интегрирование иррациональных выражений вида  $\int R(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}) dx$ ,  $\int x^m (a+bx^n)^p dx$
10. Интегрирование иррациональных выражений вида  $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$ ,  $\int R(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$ ,
11. Интегрирование тригонометрических выражений.  $\int \sin \alpha x \cos \beta x dx$ ,  $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$ ,  $\int \sin \alpha x \sin \beta x dx$ ,  $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ,  $\int \sin^k x \cos^m x dx$ .
12. Определенный интеграл, геометрический смысл. Теорема о множестве интегрируемых функций. Теорема о свойствах интегрируемых функций.
13. Основные свойства определенного интеграла. Теорема о среднем значении.
14. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема о свойствах интеграла с переменным верхним пределом.
15. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
16. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь криволинейного сектора, вычисление объемов тел вращения.
17. Геометрические приложения определенного интеграла: площадь криволинейной трапеции, длина дуги кривой.
18. Несобственные интегралы. Свойства несобственных интегралов по бесконечному промежутку. Несобственный интеграл от неограниченной функции.

19. Понятие двойного интеграла, его геометрический и физический смысл. Теорема о достаточном условии интегрируемости функции в области  $D$ .
20. Свойства двойного интеграла. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Изменение порядка интегрирования.
21. Замена переменных в двойном интеграле. Криволинейные координаты. Двойные интегралы в полярных координатах. Якобиан.
22. Тройной интеграл. Основные свойства тройного интеграла. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах. Изменение порядка интегрирования.
23. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах.
24. Приложения двойного интеграла к задачам физики и геометрии.
25. Приложение тройного интеграла к задачам физики и геометрии.
26. Понятие криволинейного интеграла и его свойства. Криволинейные интегралы первого рода.
27. Понятие криволинейного интеграла и его свойства. Криволинейные интегралы второго рода.
28. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
29. Числовые ряды. Основные понятия. Теорема о необходимом и достаточном условии сходимости ряда через остатки. Свойства числовых рядов.
30. Теорема об арифметических действиях над рядами. Теорема (необходимый признак сходимости).
31. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признак сравнения и признак Даламбера.
32. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признак Коши и интегральный признак.
33. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница. Свойства сходящихся рядов.
34. Функциональные ряды. Степенные ряды. Интервал и радиус сходимости. Теорема Абеля об интервале сходимости степенного ряда.
35. Формула и ряд Тейлора. Разложение функций ряд Тейлора. Остаточный член формулы Тейлора: в форме Пеано, в форме Лагранжа. Теорема о представлении функции своим рядом Тейлора.
36. Ряд Маклорена. Разложение в ряд Маклорена функций  $f(x)=e^x$ ,  $f(x)=\cos x$ ,  $f(x)=\sin x$ . Формула Эйлера.
37. Применение рядов Тейлора в приближенных вычислениях.
38. Комплексные числа. Теорема о свойствах операций над комплексными числами. Алгебраическая форма комплексных чисел. Действия над комплексными числами в алгебраической форме. Комплексно-сопряженные числа.
39. Комплексные числа. Геометрическая интерпретация и тригонометрическая форма комплексного числа. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Формула Муавра. Корень степени  $n$  из комплексного числа.
40. Понятие дифференциального уравнения. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Уравнение 1-го порядка с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
41. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения Бернулли.
42. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Задача Коши. Метод Эйлера.
43. Дифференциальные уравнения высших порядков. Дифференциальные уравнения высшего порядка:  $F(x, y^{(n)}) = 0$ ;  $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ ;  $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .
44. Линейные дифференциальные уравнения. Теорема о решении линейного однородного дифференциального уравнения. Определитель Вронского. Теорема о линейно зависимых

функциях. Теорема о фундаментальной системе решений линейного однородного дифференциального уравнения.

45. Теорема об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения. Теорема об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения.
46. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Случай различных и кратных действительных корней характеристического уравнения.
47. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами. Случай различных или кратных комплексных корней характеристического уравнения.
48. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью вида  $f(x)=e^{\alpha x}P(x)$ . Метод неопределенных коэффициентов.
49. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами с правой частью вида  $f(x)=e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x+P_2(x)\sin\beta x)$ . Метод неопределенных коэффициентов.
50. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами: метод вариации произвольной постоянной.

## Пример экзаменационного билета 2 семестр

Экзаменационный билет № 00. Часть 1

Найдите дифференциал функции:

(1)  $y = \operatorname{arctg} 9x;$  (2)

$$y = \sqrt[3]{(\sin 3x)^5}.$$

Найдите интеграл:

(3)  $\int \cos 2x dx;$

(4)  $\int (3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) dx;$  (5)

$$\int \frac{x}{(5 + 2x^2)^7} dx.$$

Вычислите определённый интеграл:

(6)  $\int_1^e \frac{dx}{2x}.$

Вычислите интеграл:

(7)  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D$  – прямоугольник:  $\begin{cases} 4 \leq x \leq 8; \\ 1 \leq y \leq 2. \end{cases}$

Решите уравнение:

(8)  $x^2 + 2x + 3 = 0.$

Найдите общее решение дифференциального уравнения:

(9)  $y' \sqrt{1-x^2} - \cos^2 x = 0;$

(10)  $y'' = 3 \cos 2x;$

(11)  $y'' - 4y = 0.$

Исследуйте сходимость ряда

(12)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{5^n};$

(13)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$

Экзаменационный билет № 00. Часть 2

1. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов: признак Коши и интегральный признак.
2. Основные методы интегрирования, интегрирование по частям:  $\int P(x)a^{kx} dx$ ,  $\int P(x) \sin kx dx$ ,  $\int P(x) \cos kx dx$ .
3. Найдите частное решение уравнения  $(1+x^2)dy + ydx = 0$ , если  $x_0=1$ ,  $y_0=1$ .
4. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностью  $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$  и плоскостью  $z = 0$ .

## Критерии и процедура оценивания

К сдаче экзамена допускаются студенты, полностью выполнившие семестровый план работы.

Экзаменационный билет состоит из двух частей: первая часть – практические задания (13 заданий), решение которых является необходимым, но не достаточным условием сдачи экзамена; вторая часть – содержит теоретические вопросы и практические задания (2 теоретических вопроса и 2 задачи), что позволяет определить уровень усвоения материала и определить экзаменационную оценку.

За правильное выполнение задания первой части студент получает 1 балл.

К заданиям второй части билета можно приступить при условии набора не менее 10 баллов.

За правильное выполнение задания второй части студент получает 0–3 балла.

Количество набранных за выполнение заданий второй части баллов определяет оценку за экзамен:

0 – 6 баллов – «неудовлетворительно»;

7 – 8 баллов – «удовлетворительно»;

9 – 10 баллов – «хорошо»;

11 – 12 баллов – «отлично».

При необходимости преподаватель имеет право задавать дополнительные вопросы в рамках учебного материала, изученного в течение семестра.

Оценка **«отлично (5)»** выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

Оценка **«хорошо (4)»** выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка **«удовлетворительно (3)»** выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами дисциплины, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка **«неудовлетворительно (2)»** выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.