Контрольная работа №6

Тема Теория вероятностей

Задача 1. Прибор состоит из трех независимо работающих элементов. Вероятность выхода из строя первого элемента 0,2; второго - 0,3; третьего – 0,2. Найти вероятность того, что:

а) Все три элемента выйдут из строя;
б) Все три элемента будут работать;
в) Выйдут из строя два элемента.

Решение. Вводим и определяем простые события, неразложимые на другие события, вероятности которых известны из условий задачи.

$A_1 - \{\text{первый элемент вышел из строя}\}\ p(A_1) = p_1 = 0{,}2;$

$A_2 - \{\text{второй элемент вышел из строя}\}\ p(A_2) = p_2 = 0{,}3;$

$A_3 - \{\text{третий элемент вышел из строя}\}\ p(A_3) = p_3 = 0{,}2.$

Определяем противоположные события и их вероятности.

$\overline{A_1} - \{\text{первый элемент работает без отказа}\}\ p(\overline{A_1}) = \overline{p_1} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8;$

$\overline{A_2} - \{\text{второй элемент работает без отказа}\}\ p(\overline{A_2}) = \overline{p_2} = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;$

$\overline{A_3} - \{\text{третий элемент работает без отказа}\}\ p(\overline{A_3}) = \overline{p_3} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8.$

События A_1, A_2, A_3 -независимы по условию, значит, независимы и противоположные события $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$.

Используем теорему умножения независимых событий и находим вероятности сложных событий.

а) $p(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}012.$

б) $p(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \overline{A_3}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}448.$

в) $p(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3} + A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3 + \overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(\overline{A_3}) + p(A_1) \cdot p(\overline{A_2}) \cdot p(A_3) + p(\overline{A_1}) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) =$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}124$

Задача 2. Случайная величина X может принимать два возможных значения: x_1 с вероятностью 0,3 и x_2 с вероятностью 0,7, причем $x_2 > x_1$.

Найти x_1 и x_2, если известно, что математическое ожидание $M(X) = 2{,}7$; дисперсия $D(X) = 0{,}21$.

Найти полностью закон распределения случайной величины.

Решение. Закон распределения имеет вид:

X:	x_i	x_1	x_2
	p_i	0.3	0.7

В законе распределения неизвестны возможные значения случайной величины x_1 и x_2. Найдем эти значения, используя числовые характеристики случайной величины, которые известны.

Математическое ожидание случайной величины равно

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 => x_1 \cdot 0{,}3 + x_2 \cdot 0{,}7 = 2{,}7$$

Дисперсия случайной величины равна

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) => x_1^2 \cdot 0{,}3 + x_2^2 \cdot 0{,}7 - 2{,}7^2 = 0{,}21$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0{,}3x_1 + 0{,}7x_2 = 2{,}7 \\ 0{,}3x_1^2 + 0{,}7x_2^2 = 7{,}5 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, получаем $x_1 = 2, \quad x_2 = 3$.

В результате закон распределения дисперсной случайной величины будет иметь вид:

X:	x_i	2	3
	p_i	0.3	0.7

Задача 3. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}(\sin x+1) & \text{при} -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Найти плотность распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Решение. Определяем плотность распределения вероятностей $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$.

$$f(x)=\left(\frac{1}{2}(\sin x+1)\right)'=\frac{1}{2}\cos x$$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le -\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}\cos x & \text{при} -\dfrac{\pi}{2}<x\le\dfrac{\pi}{2}\\ 1 & \text{при } x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$$

Находим математическое ожидание случайной величины.

$$M(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx=0{,}5\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=0{,}5\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=0{,}5\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=0$$

Вычисляем дисперсию случайной величины. В общем случае:

$$D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$$

В нашем примере $M(X)=0$. Поэтому получаем:

$$D(X)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\frac{1}{2}\cos x\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x dx=\begin{bmatrix}\text{интегрируем по частям}\\ u=x^2 \qquad dv=\cos x dx\\ du=2xdx \qquad v=\sin x\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x^2\sin x-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx\right)=\frac{1}{2}x^2\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi^2}{4}\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2}x\sin x dx=$$

$$=\frac{\pi^2}{4}-\begin{bmatrix}u=x & dv=\sin x dx\\ du=dx & v=\cos x\end{bmatrix}=\frac{\pi^2}{4}-\left(-u\cos x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx\right)\approx 0{,}4649$$

Задача 4. Дано математическое ожидание $M(X)=a=3{,}4$ и среднее квадратическое отклонение (СКО) $\sigma(x)=\sigma=1{,}7$ нормальной случайной величины. Необходимо найти вероятность попадания случайной величины в заданный интервал (-0,5;2).

Решение. Вероятность попадания нормальной случайной величины в интервал (x_1,x_2) определяется с помощью функции Лапласа по формуле:

$$P(x_1<x<x_2)=\emptyset\left(\frac{x_2-a}{\sigma}\right)-\emptyset\left(\frac{x_1-a}{\sigma}\right)$$

В нашем примере $x_1=-0{,}5;\quad x_2=2;\quad a=3{,}4;\quad \sigma=1{,}7.$

$$\frac{x_1-a}{\sigma}=\frac{-0{,}5-3{,}4}{1{,}7}=\frac{-3{,}9}{1{,}7}\approx-2{,}29$$

$$\frac{x_2-a}{\sigma}=\frac{2-3{,}4}{1{,}7}=-0{,}82$$

$\left.\begin{matrix}\emptyset(-2{,}29)=-\emptyset(2{,}29)\approx 0{,}4893\\ \emptyset(-0{,}82)=-\emptyset(0{,}82)=0{,}2939\end{matrix}\right\}$ - числовые функции Лапласа находятся по специальным таблицам (см., например, Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, любое издание).

Математическая статистика

Задача 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания $M(X)=a$ нормально распределенной случайной величины с надежностью (доверительной вероятностью) $\gamma=0{,}95$, если известна выборочная средняя $\bar{X} = \bar{x}_{\text{выб}} = 1000$, объем выборки $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 40$.

Решение. Интервальную оценку математического ожидания производят по формуле:

$$x_b - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x_b} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$$

При $n > 30$ для нахождения параметра t используют функцию Лапласа и формулу $2\emptyset(t) = \gamma => \emptyset(t) = \frac{\gamma}{2}$. После определения числового значения $\emptyset(t)$ параметр t определяют по специальным таблицам для $\emptyset(t)$.

В нашем примере, при $\gamma = 0{,}95$ имеем $\frac{\gamma}{2} = \frac{0{,}95}{2} = \emptyset(t)$ и по таблице $\frac{\gamma}{2} = 0{,}475$ получаем $t = 1{,}96$.

После этого вычисляем точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96 \cdot 40}{\sqrt{100}} = 7{,}84 \approx 8$.

Подставляя известные и полученные величины в исходную формулу, находим доверительный интервал для математического ожидания:

$$1000 - 8 < a < 1000 + 8 => a \in (992; 1008)$$

Задача 6. Дана выборка в виде таблицы, в которой x_i – среднее значение варианта в i-ом интервале, n_i - частота наблюдения варианта в -ом интервале.

Необходимо построить гистограмму, выдвинуть статическую гипотезу о нормальном распределении и проверить ее с помощью критерия Пирсона с доверительной вероятностью 0,99 (уровнем значимости 0,01).

Решение. Пусть выборка дана в табличной форме:

Таблица 1

$x_{i\text{ср}}$	5	7	9	11	13	15	17
n_i	3	12	21	45	24	12	4

Объем выборки $\sum n_i = 121$

1. Определяем выборочную среднюю:

$$\bar{x}_b = \frac{\sum x_{icp} \cdot n_i}{n} = \frac{1}{121}(5 \cdot 3 + 7 \cdot 12 + 9 \cdot 21 + 11 \cdot 45 + 13 \cdot 24 +$$
$$+15 \cdot 12 + 17 \cdot 4) = \frac{1343}{121} = 11{,}0992 \approx 11{,}1$$

2. Находим выборочную дисперсию

$$D_b = \frac{\sum x_{icp}^2 \cdot n_i}{n} - [\bar{x}_b]^2 = \cdots = 6{,}7156$$

3. Определяем исправленное среднее квадратическое отклонение

$$S_b = \sqrt{\frac{n}{n-1} D_b} = \sqrt{\frac{121}{120} \cdot 6{,}7156} \approx 2{,}6$$

4. Преобразуем таблицу выборочных данных в интервальный статистический ряд и находим плотность относительной частоты в частичных интервалах.

Таблица 2

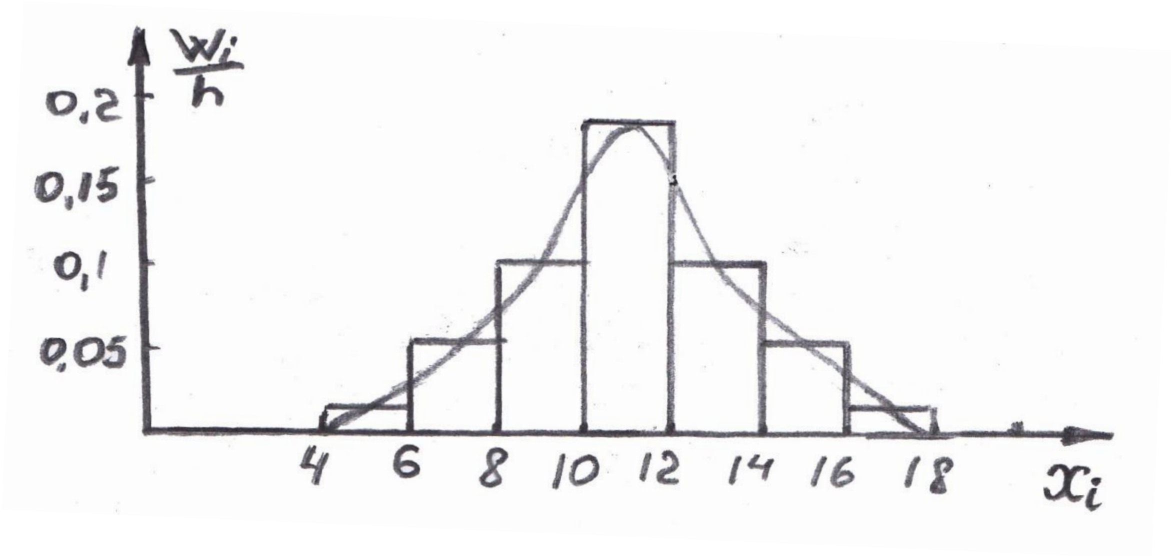
x_{icp}	5	7	9	11	13	15	17
n_i	3	12	21	45	24	12	4
$x_{min}^{(i)} - x_{max}^{(i)}$	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18
$W_i = \frac{n_i}{n}$	0,0248	0,1000	0,1736	0,3719	0,1983	0,1000	0,0331
$\frac{W_i}{h}$	0,0124	0,05	0,0868	0,1859	0,0991	0,0500	0,0165

Где $W_i = \frac{n_i}{n}$ - относительная частота,

h - ширина частичного интервала,

$\frac{w_i}{h}$ - плотность относительно частоты (приближенная точечная оценка плотности распределения возможных значений генерального признака как случайной величины).

5. По данным интервального статического ряда строим его гистограмму.



6. На основе анализа гистограммы выдвигаем основную (нулевую) гипотезу H_0: - исследуемый генеральный признак как случайная величина имеет нормальное распределение с параметрами:

$$a = \bar{x}_b = 11{,}1; \ \sigma = S_b = 2{,}6.$$

Примечание: параметры нормального распределения неизвестны. Принимаем эти параметры равными их точечным оценкам, полученными по выборочным данным.

По условию проверку гипотезы H_0 необходимо провести с уровнем значимости 0,01. Это значит, что считается допустимой ошибка первого рода (отвергнуть правильную нулевую гипотезу H_0) в одном случае из 100.

7. Преобразуем интервальный статический ряд (табл. 2), исходя из того, что при использовании критерия Пирсона частоты наблюдения n_i должны быть не менее 5. Для обеспечения этого условия объединяем крайние частичные интервалы.

Крайние граничные значения в первом и последнем интервалах раздвигаем соответственно до $-\infty$ и $+\infty$, потому что предполагается, что исследуемый генеральный признак имеет нормальное распределение.

В результате преобразованный статистический ряд будет иметь вид:

Таблица 3

$x_i - x_{i+1}$	$-\infty - 8$	$8 - 10$	10-12	12-14	$14-\infty$
n_i	15	21	45	24	16

8. Определяем наблюдаемое значение $\varkappa^2$ – критерия Пирсона ($\varkappa^2$ – хи-квадрат).

$$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

n_i – частота наблюдения (число появления варианта x_i в выборочных данных в i-ом частичном интервале)(см. табл. 3);

S – число частичных интервалов (в табл. 3 $S = 5$);

n – объем выборки (в нашем примере $n = 121$);

p_i – вероятность появления варианта x_i в частичном интервале (x_i, x_{i+1}) определяем по формуле:

$$p_i = P(x_i < X < x_{i+1}) = \emptyset(u_{i+1}) - \emptyset(u_i)$$

$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}_b}{S_b} \qquad u_{i+1} = \frac{x_{i+1} - \bar{x}_b}{S_b}$$

В первом частичном интервале $x_i = -\infty$ (табл.3), поэтому принимаем $\emptyset(-\infty) = -0{,}5$. Правая граница последнего частичного интервала $x_{s+1} = +\infty$, поэтому принимаем $\emptyset(+\infty) = 0{,}5$.

Вычисления проводим в табличной форме.

Таблица 4

№ интервала	$x_i - x_{i+1}$	u_i	u_{i+1}	$\emptyset(u_i)$	$\emptyset(u_{i+1})$	p_i
1	$-\infty$ -8	$-\infty$	-1,19	-0,5	-0,3830	0,1170
2	8-10	-1,19	-0,42	-0,3830	-0,1628	0,2202
3	10-12	-0,42	0,35	0,1628	0,1368	0,2996
4	12-14	0,35	1,12	0,1368	0,3686	0,2318
5	$14-\infty$	1,12	∞	0,3686	0,5	0,1314

Проверка $\sum p_i = 1{,}0094$.

Пример вычислений

$\bar{x}_b = 11{,}1 \qquad S_b = 2{,}6$

$u_8 = \frac{8-11{,}1}{2{,}6} \approx -1{,}19, \qquad u_{10} = \frac{10-11{,}1}{2{,}6} \approx -0{,}42$, и т.п.

При определении u_i и u_{i+1} округление до двух знаков после запятой проводят по следующим правилам:

1) Если первая из отбрасываемых цифр больше 5, то последнюю из сохраняемых чисел увеличивают на единицу;
2) Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последнюю из сохраняемых цифр не изменяют;
3) Если отбрасываемая цифра 5 , то округляют последнюю из значащих цифр до ближайшего четного числа в сторону увеличения. Если указанная цифра четная, то ее не изменяют. Ноль считают условно четным числом.

Наблюдаемое значение $\varkappa^2 -$ критерия Пирсона вычисляем в табличной форме.

Таблица 5

$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$, где $n = 121$

№ интервала	n_i	p_i	np_i	$\frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{np_i}$
1	15	0,1170	14,1570	0,0502	225	15,8993
2	21	0,2202	26,6442	1,1956	441	16,5514
3	45	0,2996	36,2516	2,1112	2025	55,8596
4	24	0,2318	28,0478	0,5842	576	20,5364
5	16	0,1314	15,8994	0,0006	256	16,1012

$\varkappa^2_{\text{набл}} = \sum = 3{,}9418$ $\qquad \sum = 124{,}9418$

Два крайних столбца справа используют для проверки.

Проверка.

$$\sum \left(\frac{n_i^2}{np_i} - n \right) = \varkappa^2_{\text{набл}}$$

$$124{,}9418 - 121 = 3{,}9418 \equiv 3{,}9418 - \textit{верно!}$$

9. Определяем по таблице критическое значение Пирсона

$$\varkappa^2_{\text{кр}} = \varkappa^2(\alpha, m),$$

Где $\alpha = 0{,}01 -$ уровень значимости (задан по условию). В общем случае уровень значимости выбирают из внешних соображений об опасности осуществления альтернативной гипотезы H_1.

$m = 5 - 3 = 2 -$ число степеней свободы (количество независимых частичных интервалов в преобразованном статистическом ряду). При вычислении $\varkappa^2_{\text{набл}}$ используют три уравнения связи: при вычислении объема n, выборочной средней $\bar{x}_b$ и исправленного СКО - S_b.

$\varkappa^2_{\text{набл}}(0{,}01; 2) = 9{,}2 -$ находят по таблице критических значений $\varkappa^2 -$ распределения (см., например, табл. 5 в учебнике Гмурмана В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика – М. Высшая школа, 2000г и более поздние издания).

$\varkappa^2_{\text{набл}} < \varkappa^2_{\text{кр}}$ $(3{,}95 < 9{,}2)$, поэтому нулевую гипотезу принимаем с уровнем доверия 99% (α = 0,001).

Таблица критических точек распределения Пирсона χ^2 .

k /α	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,63490	5,02389	3,84146	0,00393	0,00098	0,00016
2	9,21034	7,37776	5,99146	0,10259	0,05064	0,02010
3	11,34487	9,34840	7,81473	0,35185	0,21580	0,11483
4	13,2767	11,14329	9,48773	0,71072	0,48442	0,29711
5	15,08627	12,8325	11,0705	1,14548	0,83121	0,55430
6	16,81189	14,44938	12,59159	1,63538	1,23734	0,87209
7	18,47531	16,01276	14,06714	2,16735	1,68987	1,23904
8	20,09024	17,53455	15,50731	2,73264	2,17973	1,64650
9	21,66599	19,02277	16,91898	3,32511	2,70039	2,08790
10	23,20925	20,48318	18,30704	3,94030	3,24697	2,55821
11	24,72497	21,92005	19,67514	4,57481	3,81575	3,05348
12	26,21697	23,33666	21,02607	5,22603	4,40379	3,57057
13	27,68825	24,7356	22,36203	5,89186	5,00875	4,10692
14	29,14124	26,11895	23,68479	6,57063	5,62873	4,66043
15	30,57791	27,48839	24,99579	7,26094	6,26214	5,22935

16	31,99993	28,84535	26,29623	7,96165	6,90766	5,81221
17	33,40866	30,19101	27,58711	8,67176	7,56419	6,40776
18	34,80531	31,52638	28,86930	9,39046	8,23075	7,01491
19	36,19087	32,85233	30,14353	10,11701	8,90652	7,63273
20	37,56623	34,16961	31,41043	10,85081	9,59078	8,26040
21	38,93217	35,47888	32,67057	11,59131	10,2829	8,89720
22	40,28936	36,78071	33,92444	12,33801	10,98232	9,54249
23	41,63840	38,07563	35,17246	13,09051	11,68855	10,19572
24	42,97982	39,36408	36,41503	13,84843	12,40115	10,85636
25	44,31410	40,64647	37,65248	14,61141	13,11972	11,52398
26	45,64168	41,92317	38,88514	15,37916	13,84391	12,19815
27	46,96294	43,19451	40,11327	16,15140	14,57338	12,87850
28	48,27824	44,46079	41,33714	16,92788	15,30786	13,56471
29	49,58788	45,72229	42,55697	17,70837	16,04707	14,25645
30	50,89218	46,97924	43,77297	18,49266	16,79077	14,95346
31	52,19139	48,23189	44,98534	19,28057	17,53874	15,65546
32	53,48577	49,48044	46,19426	20,07191	18,29076	16,36222
33	54,77554	50,72508	47,39988	20,86653	19,04666	17,07351
34	56,06091	51,96600	48,60237	21,66428	19,80625	17,78915
35	57,34207	53,20335	49,80185	22,46502	20,56938	18,50893
36	58,61921	54,43729	50,99846	23,26861	21,33588	19,23268
37	59,89250	55,66797	52,19232	24,07494	22,10563	19,96023
38	61,16209	56,89552	53,38354	24,8839	22,87848	20,69144
39	62,42812	58,12006	54,57223	25,69539	23,65432	21,42616
40	63,69074	59,34171	55,75848	26,5093	24,43304	22,16426
41	64,95007	60,56057	56,94239	27,32555	25,21452	22,90561
42	66,20624	61,77676	58,12404	28,14405	25,99866	23,65009
43	67,45935	62,99036	59,30351	28,96472	26,78537	24,39760
44	68,70951	64,20146	60,48089	29,78748	27,57457	25,14803
45	69,95683	65,41016	61,65623	30,61226	28,36615	25,90127
46	71,20140	66,61653	62,82962	31,43900	29,16005	26,65724
47	72,44331	67,82065	64,00111	32,26762	29,95620	27,41585
48	73,68264	69,02259	65,17077	33,09808	30,75451	28,17701
49	74,91947	70,22241	66,33865	33,93031	31,55492	28,94065
50	76,15389	71,42020	67,50481	34,76425	32,35736	29,70668

Обычно такая точность (5 знаков после запятой) не требуется. Достаточно 1-2 знаков после запятой