МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

Контрольная работа №5

Тема «Дифференциальные уравнения», «Ряды»

Задание 1. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения

1. $(xy^2+x)dx + (y-x^2y)dy=0$.

Решение. Преобразуем данное уравнение: $y(1-x^2)dy=-x(y^2+1)dx$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{-x\,dx}{1-x^2}.$$

Интегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{y\,dy}{y^2+1} = -\int \frac{x\,dx}{1-x^2},$$

$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln C,$$

$y^2+1=C|x^2-1|$,

$y^2=C|x^2-1|-1$.

Следовательно, общим решением исходного уравнения является $y = \pm\sqrt{C|x^2-1|-1}$.

2. $\dfrac{tg\,y\,dx}{\cos^2 x} + \dfrac{tg\,x\,dy}{\cos^2 y} = 0$.

Решение. Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{dx}{\cos^2 x \cdot tg\,x} + \frac{dy}{\cos^2 y \cdot tg\,y} = 0,$$

$\ln|\mathrm{tg}\,x| + \ln|\mathrm{tg}\,y|=\ln C$.

Общий интеграл исходного уравнения: $\mathrm{tg}\,x\;\mathrm{tg}\,y=C$.

3. $y-x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$.

Решение. Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=tx$. $y' = t'x + t$. Далее находим:

$$t'x + t = \frac{t-1}{t+1},$$

$$t'x = \frac{t-1}{t+1} - t,$$

$t'x = -\dfrac{t^2+1}{t+1}$. Данное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{t+1}{t^2+1}dt = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+1| + arctg\,t = -\ln x + \ln C,$$

$arctg\ t = \ln\frac{C}{x} - \ln\sqrt{t^2+1}$,

$arctg\,\frac{y}{x} = \ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — общий интеграл исходного уравнения.

4. $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0)$=ln 5.

Решение. Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x}$,

$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{1-x} + \frac{e^{-x}}{1-x}$,

$\frac{dy}{dx} + y = \frac{e^{-x}}{1-x}$. Полученное уравнение линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$. Имеем:

$u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

$u'v + u(v'+v) = \frac{e^{-x}}{1-x}$. (*)

1) Найдём $v(x)$ из условия:

$v' + v = 0$,

$\frac{dv}{dx} = -v$,

$\ln v=-x$,

$v=e^{-x}$.

2) Подставляем

полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*):

$u'v = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

$e^{-x}\frac{du}{dx} = \frac{e^{-x}}{1-x}$,

$du = \frac{dx}{1-x}$,

$u=-\ln|1-x| + \ln C$,

$u = \ln\frac{C}{|1-x|}$

Тогда $y= e^{-x}\cdot\ln\frac{C}{|1-x|}$ является общим решением исходного уравнения.

Для нахождения частного решения найдём C, используя начальное условие, т.е.

$\ln 5= e^0\cdot\ln\frac{C}{|1-0|}$,

$\ln 5=\ln C$.

Следовательно, C=5. Частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = e^{-x}\cdot\ln\frac{5}{|1-x|}$.

5. $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx} = xy + x^2y^2$.

Решение. Преобразуем данное уравнение для того, чтобы определить его тип. Получим

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + x^2 y^2}{1 + x^2};$$

$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1+x^2} y = \frac{x^2}{1+x^2} y^2$. Данное уравнение является уравнением Бернулли. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$.

$$u'v + uv' - \frac{xuv}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} u^2 v^2;$$

$$u'v + u\left(v' - \frac{xv}{1+x^2}\right) = \frac{x^2}{1+x^2} u^2 v^2. \quad (*)$$

1) Найдём $v(x)$ из условия $\frac{dv}{dx} - \frac{xv}{1+x^2} = 0$,

которое является ДУ с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{xv}{1+x^2};$$

$$\frac{dv}{v} = \frac{x\,dx}{1+x^2};$$

$$\ln|v| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2);$$

$$v = \sqrt{1+x^2}.$$

2) Полученное выражение для $v(x)$ подставляем в уравнение (*):

$$\frac{du}{dx}\sqrt{1+x^2} = \frac{x^2 u^2 (1+x^2)}{1+x^2}.$$

Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Найдём $u(x)$ из данного уравнения.

$$\frac{du}{u^2} = \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$-\frac{1}{u} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - C \quad \frac{1}{u} = \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| + C$$

$$u = \frac{1}{\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}$$

Окончательно находим, что общее решение исходного уравнения определяется выражением

$$y = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{1+x^2}| - \frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2} + C}.$$

Задача 3

Исследовать сходимость числовых рядов.

Теория: Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$-бесконечная последовательность чисел, тогда выражение $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ называется *числовым рядом*, а числа $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются *членами ряда*. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-ой *частичной суммой ряда*: $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Если существует конечный предел $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, то его называют *суммой* указанного *числового ряда* и говорят, что *ряд сходится*. Если $\lim_{n\to\infty} s_n$ не существует (например, $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$), то говорят, что *числовой ряд расходится и суммы не имеет*.

Необходимый признак сходимости ряда – если ряд сходится, то его n-ый член стремится к нулю при неограниченном возрастании n. Таким образом, если n-ый член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$, то ряд расходится.
Признаки сходимости числовых рядов:

Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ (1),

$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ (2)

два ряда с положительными членами.
1) *Признак сравнения*- если члены ряда (1) не больше соответствующих членов ряда (2), то есть $u_n \le v_n \ (n = 1,2,\ldots)$ и ряд (2) сходится, то сходится и ряд (1). Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2);
Сравниваем с рядом $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ - геометрическая прогрессия, который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1,$ а также с гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$ который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1.$
2) *Предельный признак сравнения* - если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$, то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно;
3) *Признак Даламбера* - если в ряде (1) отношение $(n+1)$-го члена к n-му при $n \to \infty$ имеет (конечный) предел l, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l,$ то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1.$ В случае $l = 1,$ используем другие признаки;
4) *Признак Коши* – если для ряда (1) величина $\sqrt[n]{u_n}$ имеет конечный предел l при $n \to \infty$, l, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l,$ то ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$;
5) *Интегральный признак* – пусть члены ряда (1) не возрастают, то есть $u_1 \ge u_2 \ge u_3 \ge \ldots$ и $f(x)$- непрерывная невозрастающая функция такая, что $f(1) = u_1, f(2) = u_2, \ldots, f(n) = u_n$. Тогда, если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1), а если интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

Теория*: *Знакочередующийся ряд – это ряд вида $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots,$ где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ положительные члены.
Теорема Лейбница: Если в знакочередующемся ряде $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \quad (u_n > 0)$ члены таковы, что $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0,$ то знакочередующийся ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.
Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ называется *знакопеременным*, если среди его членов $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ имеются как положительные, так и отрицательные.
Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда- если ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ таков, что ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots,$ сходится, то и данный ряд также сходится.

Знакопеременный ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$, если же ряд $u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots$ - сходится, а ряд $|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots$ - расходится, то данный знакопеременный ряд называется *условно сходящимся* рядом.

Пример: Исследовать сходимость числовых рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3+2^n}$	в) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$	д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$	г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$	е) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n}$

Решение:

а) Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, который сходится, т.к. $q=\frac{1}{2}<1$. Имеем $\frac{1}{3+2^n}<\frac{1}{2^n}$. Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится.

б) Здесь $u_n=\sqrt[3]{n}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n=\frac{1}{n}$, который расходится, так так -это гармонический ряд. Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\geq\frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится.

в) Применим предельный признак сравнения. Так как по первому замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot tg\frac{\pi}{5n}=\frac{\pi}{5}\neq 0,$$

то исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом $v_n=\frac{1}{n}$.

г) Находим

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Так как $l=0<1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

д) Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим признак Коши.

Вычисляем $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд.

е) Воспользуемся интегральным признаком. Функция $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$ удовлетворяет условиям признака. Находим

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\left|\ln x\right|\Big|_2^{+\infty}=+\infty.$$

Значит, ряд с общим членом $u(n)=\frac{1}{n\cdot\ln n}$ расходится.

Пример: Исследовать ряды на абсолютную и условную сходимость: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{2^n}$

Решение: а) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>...$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$. Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum\frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$\int_1^{\infty}\frac{1}{2x-1}dx=\frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\int_1^{\beta}\frac{d(2x-1)}{2x-1}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\ln(2x-1)\Big|_1^{\beta}=\frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\ln(2\beta-1)=\infty$ Заключаем, что ряд с положительными членами расходится.

Следовательно, данный ряд сходится условно;

б) Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α – любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum\frac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n}\le\frac{1}{2^n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения, ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Задача 3

Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

Теория: *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$, где $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$- постоянные числа, называемые *коэффициентами ряда*. *Областью сходимости* степенного ряда является интервал с центром в начале координат. *Интервалом сходимости* степенного ряда называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда. На концах интервала (то есть при $x=R$ и при $x=-R$) вопрос о сходимости или расходимости данного ряда решается индивидуально для каждого конкретного ряда.

Способ определения радиуса сходимости:

Для ряда $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots$ рассмотрим ряд из абсолютных величин его членов: $|a_0|+|a_1||x|+|a_2||x^2|+\ldots+|a_n||x^n|+\ldots$. Для определения сходимости последнего ряда (с положительными членами) применим признак Даламбера. Пусть существует предел:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|=l|x|$, тогда ряд сходится абсолютно при $l|x|<1$, то есть $|x|<\dfrac{1}{l}$ и расходится при $|x|>\dfrac{1}{l}$. Тогда интервал $\left(-\dfrac{1}{l},\dfrac{1}{l}\right)$ - интервал сходимости данного степенного ряда, то есть $R=\dfrac{1}{l}=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Аналогичным образом для определения интервала сходимости можно пользоваться признаком Коши, и тогда $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Пример: Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Решение: а) Заданный ряд неполный, поскольку содержит не все степени переменной x (только нечетные). Воспользуемся для данного ряда признаком Даламбера, имеем:

$$|u_n|=\frac{|x^{2n-1}|}{2n-1},\quad |u_{n+1}|=\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|x^{2n-1}|}=x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1<x<1$, т.е. $R=1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ имеем ряд $-1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\ldots$, который сходится по признаку Лейбница, так как $1>\dfrac{1}{3}>\dfrac{1}{5}>\dfrac{1}{7}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$.

При $x=1$ имеем ряд $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\ldots$ – это тоже сходящийся по признаку Лейбница ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1;1]$;

б) Находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)\cdot 2^n}{1}\right|=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2<x+2<2$, т.е. при $-4<x<0$.

При $x= -4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x=0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}} = 2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуинтервал [–4; 0).

Задача 4

Найти общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

***Теория*:**

Дифференциальное уравнение n*-го порядка* – это уравнение вида $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ или, если его можно разрешить относительно n-ой производной, $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$ и удовлетворяющая дифференциальному уравнению при любых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Равенство вида $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$, неявно определяющее общее решение, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Простейшим уравнением n-го порядка является уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$. Решение такого уравнения получаем после n интегрирований, то есть

$$y = \int\ldots\int f(x)\,dx\ldots dx + C_1\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n.$$

***Пример1*:** Найти общее решение дифференциального уравнения $y''' = x + \cos 3x$.

***Решение*:** Данное уравнение имеет вид $y''' = f(x)$. Его общее решение можно найти путём трёхкратного последовательного интегрирования. После первого интегрирования получаем:

$$y'' = \int(x + \cos 3x)dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1.$$

Интегрируя полученное выражение, находим y':

$$y' = \int\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}\sin 3x + C_1\right)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2.$$

Определяем общее решение данного уравнения, интегрируя полученное выражение:

$$y = \int\left(\frac{x^3}{6} - \frac{1}{9}\cos 3x + C_1 x + C_2\right)dx = \frac{x^4}{24} - \frac{1}{27}\sin 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Ответ: $y = \frac{x^4}{24} - \frac{1}{27}\sin 3x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$

Дифференциальное уравнение второго порядка – это уравнение вида $F(x, y, y', y'') = 0$ или, если это уравнение можно разрешить относительно y'', то уравнение вида $y'' = f(x, y, y')$.

Уравнение 2-го порядка: $F(x, y', y'') = 0$,
не содержащее явно функции y, преобразуется в уравнения 1-го порядка посредством подстановки $y' = p$*, откуда* $y'' = \frac{dp}{dx}$.

Пример2: Найти общее решение уравнения $xy'' = y' \ln\left(\frac{y'}{x}\right)$.

Решение: Полагая $y' = p$, преобразуем уравнение к виду

$xp' = p \ln\left(\frac{p}{x}\right)$, или $p' = \left(\frac{p}{x}\right) \ln\left(\frac{p}{x}\right)$.

Это однородное уравнение первого порядка. Полагая $\frac{p}{x} = t$, откуда $p = tx,\ p' = t'x + t$, получим уравнение

$t'x + t = t \ln t$, или $\frac{dt}{t(\ln t - 1)} = \frac{dx}{x}$.

Интегрируя, находим

$\ln(\ln t - 1) = \ln x + \ln C_1$, или $\ln t - 1 = C_1 x$,

откуда $t = e^{1+C_1 x}$; возвращаясь к переменной у, приходим к уравнению $y' = xe^{1+C_1 x}$. Интегрируя по частям, получим:

$$y = \int xe^{1+C_1 x} dx = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2$$

Ответ: $y = \frac{1}{C_1} xe^{1+C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1+C_1 x} + C_2$.

Уравнение 2-го порядка: $F(y, y', y'') = 0$*, не содержащее явно аргумента x, преобразуется в уравнения 1-го порядка посредством подстановки* $y' = p$*, откуда* $y'' = p\frac{dp}{dy}$.

Пример3: Найти общее решение уравнения $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Решение: Так как уравнение не содержит явно независимую переменную, то вводим новую искомую функцию $p = p(y)$ по формуле $p = y'$. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$, и уравнение принимает вид $2p^2 = (y-1)p\frac{dp}{dy}$ или после разделения переменных $\frac{dp}{2p} = \frac{dy}{y-1}$. Интегрируя последнее уравнение, получаем: $\frac{1}{2}\ln|p| = \ln|y-1| + \ln|C_1|$ или после преобразования с использованием свойств логарифма, $p = C_1^2 (y-1)^2$.

Возвращаясь к функции *y*, получаем дифференциальное уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными: $\frac{dy}{dx} = C_1^2 (y-1)^2$. Разделяем переменные и находим общий интеграл уравнения: $\frac{dy}{(y-1)^2} = C_1^2 dx; \quad -\frac{1}{y-1} = C_1^2 x + C_2$.

Откуда общее решение исходного уравнения: $y = 1 - \frac{1}{C_1^2 x + C_2}$.

Ответ: $y = 1 - \frac{1}{C_1^2 x + C_2}$.

Задача 5

Найти частное решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Теория: *Дифференциальное уравнение* n*-го порядка называется линейным*, если оно первой степени относительно искомой функции y и её производных $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, то есть имеет вид $a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ и $f(x)$ - заданные функции от x или постоянные, причем $a_0 \neq 0$ для всех значений x из той области, в которой рассматривается уравнение. Функция $f(x)$, стоящая в правой части уравнения, называется *правой частью уравнения*. Если $f(x) \neq 0,$ то уравнение называется *линейным неоднородным* или *уравнением с правой частью*. Если же $f(x) \equiv 0,$ то уравнение называется *линейным однородным* или *уравнением без правой части*.
Линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами будем называть уравнение вида $y'' + py' + qy = f(x),$ где p, q - действительные числа.
Для нахождения частного решения такого уравнения составляем характеристическое уравнение вида $k^2 + pk + q = 0$ и находим его корни k_1 и k_2. Далее выбираем в таблице вид частного решения, с учетом найденных корней, и определяем неизвестные коэффициенты.

Таблица 1

№	***правая часть –*** $f(x)$	***корни характер. уравнения***	***вид частного решения***
1	$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x^0$	нуль не является корнем	$Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + N x^0$
		нуль - корень кратности s	$(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + N x^0)x^s$
2	$(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n x^0)e^{\alpha x}$, $\alpha \in R$	α не является корнем	$(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + N x^0)e^{\alpha x}$
		α - корень кратности s	$(Ax^n + Bx^{n-1} + \ldots + N x^0)e^{\alpha x} x^s$
3	$a \cdot e^{\alpha x}; a, \alpha \in R$	α не является корнем	$A \cdot e^{\alpha x}$
		α - корень кратности s	$A \cdot e^{\alpha x} x^s$
4	$a\cos\beta x + b\sin\beta x,$ $a, b, \alpha \in R,$ в частности a или b могут быть равны нулю	$\pm\beta i$ не является корнем	$A\cos\beta x + B\sin\beta x$
		$\pm\beta i$ - корень кратности s	$A\cos\beta x + B\sin\beta x,$

Если правая часть уравнения есть сумма двух функций $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$, *то есть уравнение имеет вид* $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x),$ *то частное решение будем искать в виде суммы двух частных решений.*

Пример: Найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:
а) $y'' + 3y' + 2y = 2x^2 - 4x - 17$ б) $y'' - 2y' + 10y = 37\cos 3x$
в) $y'' - 6y' + 9y = 3x - 8e^x$

Решение:

Составляем характеристическое уравнение $k^2+3k+2=0$ и находим его корни: $k_1=-1;\ k_2=-2.$

Определяем вид частного решения исходного уравнения в соответствии с видом его правой части. В нашем случае правая часть уравнения имеет вид $f(x)=2x^2-4x-17$ (случай 1 в таблице и нуль не является корнем характеристического уравнения), поэтому частное решение будем искать в виде $y_ч=Ax^2+Bx+C$.

Находим производные функции $y_ч$: $y_ч'=2Ax+B$; $y_ч''=2A$.

Для нахождения значений коэффициентов A, B, C подставляем выражения $y_ч,\ y_ч',\ y_ч''$ в исходное уравнение:

$$2A+3(2Ax+B)+2\left(Ax^2+Bx+C\right)=2x^2-4x-17 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2Ax^2+(6A+2B)x+(2A+3B+2C)=2x^2-4x-17$$

Приравнивая коэффициенты при x в одинаковых степенях в левой и правой частях тождества, получаем систему линейных уравнений для определения неизвестных коэффициентов A, B, C:

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x^1: \\ x^0: \end{array} \begin{cases} 2A=2 \\ 6A+2B=-4 \\ 2A+3B+2C=-17 \end{cases}$$

Решая систему уравнений, находим: $A=1,\ B=-5,\ C=-2$.

Подставляя найденные значения коэффициентов, получаем частное решение уравнения: $y_ч=x^2-5x-2$;

б) Составляем характеристическое уравнение $r^2-2r+10=0$, определяем его корни $r_{1,2}=1\pm 3i$. Частное решение $y_ч$ данного неоднородного уравнения по его правой части $f(x)=37\cos 3x$ (случай 4 в таблице, где $b=0$ и числа $\pm\beta i=\pm 3i$ не являются корнями характеристического уравнения), будет функция вида $y_ч=A\cos 3x+B\sin 3x$.

Подставляя функцию $y_ч$ и её производные

$$y_ч'=-3A\sin 3x+3B\cos 3x$$

$$y_ч''=-9A\cos 3x-9B\sin 3x$$

в данное неоднородное уравнение, получим равенство $(A-6B)\cos 3x+(B+6A)\sin 3x=37\cos 3x$, которое будет тождеством только при равенстве коэффициентов у подобных членов $(y\cos 3x\ и\ y\sin 3x)$ в обеих его частях:

$$\begin{array}{l} \cos 3x: \\ \sin 3x: \end{array} \begin{cases} A-6B=37 \\ B+6A=0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, найдём $A=1;\ B=-6$. Следовательно, $y_ч=\cos 3x-6\sin 3x.$

в) Характеристическое уравнение имеет вид $r^2-6r+9=0$ и его корни $r_{1,2}=3$.

Правая часть данного уравнения есть сумма многочлена первой степени $3x$ и показательной функции $-8e^x$ (случаи 1 и 3 в таблице, где 0 и 1 не являются корнями в соответствующих случаях). Поэтому частный интеграл этого уравнения $y_ч=Ax+B+Ce^x$.

Подставляя $y_ч,\ y_ч'=A+Ce^x,\ y_ч''=Ce^x$ в заданное уравнение $9Ax+(9B-6A)+4Ce^x=3x-8e^x$ и приравнивая коэффициенты у подобных членов из обеих частей полученного равенства, имеем систему: $\begin{cases} 9A=3 \\ 9B-6A=0 \\ 4C=-8 \end{cases}$ из которой находим

$\begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=\frac{2}{9} \\ C=-2 \end{cases}$. Следовательно, $y_ч=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x$.

Ответ: а) $y_ч=x^2-5x-2$; б) $y_ч=\cos 3x-6\sin 3x$;
в) $y_ч=\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}-2e^x$.

Задача 6

Пример: Вычислить с точностью до 0,001 значение интеграла: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x}}$; б) $\int\limits_0^{0,5} \frac{\sin x}{x}dx$.

Решение:

а) Преобразуем подынтегральную функцию, разложим её в степенной ряд и почленно проинтегрируем:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x}}=\int\limits_0^1 (8+x)^{-1/3}dx=\int\limits_0^1 \left(8\left(1+\frac{x}{8}\right)\right)^{-1/3}dx=2^{-1}\int\limits_0^1 \left(1+\frac{x}{8}\right)^{-1/3}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(1+\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right)\left(\frac{x}{8}\right)^2+\ldots\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^2}{48}+\frac{x^3}{864}-\ldots\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{96}+\frac{1}{1728}-\ldots$$

Получился знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница. Так как $\frac{1}{1728}<0,001$, то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{8+x}}\approx 0,5-0,0104\approx 0,490.$$

б) Заменяя функцию $\sin x$ её степенным рядом и почленно интегрируя, находим:

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^{0,5}\frac{1}{x}\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...\right)dx=\int\limits_0^{0,5}\left(1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-...\right)dx=$$

$$=\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-...\right)\Bigg|_0^{0,5}=0,5-\frac{0,125}{18}+\frac{0,03125}{600}-...$$

Получился знакочередующийся ряд, который сходится по признаку Лейбница. Так как $\frac{0,03125}{600}<0,001$, то для получения нужной точности достаточно взять первые два члена ряда:

$$\int\limits_0^{0,5}\frac{\sin x}{x}dx\approx 0,5-\frac{0,125}{18}\approx 0,493.$$

Задача 7

Приближенное вычисление определенных интегралов

Бесконечные ряды применяются также для приближенного вычисления неопределенных и определенных интегралов в случаях, когда первообразная не выражается в конечном виде через элементарные функции, либо нахождение первообразной сложно.

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$ с точностью до $\varepsilon > 0$. Если подынтегральную функцию f(x) можно разложить в ряд по степеням x и интервал сходимости (—R; R) включит в себя отрезок [a; b], то для вычисления заданного интеграла можно воспользоваться свойством почленного интегрирования этого ряда. Ошибку вычислений определяют так же, как и при вычислении значений функций.

Пример . Вычислить интеграл $\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на $(-x^2)$ в формуле (12.4):

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots,\ x \in (-\infty, +\infty). \qquad (13.1)$$

Интегрируя обе части равенства (13.1) на отрезке [0; ¼] , лежащем внутри интервала сходимости (—∞; +∞), получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{1!\cdot 3} + \frac{x^5}{2!\cdot 5} - \frac{x^7}{3!\cdot 7} + \ldots\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1!\cdot 3\cdot 4^3} + \frac{1}{2!\cdot 5\cdot 4^5} - \frac{1}{3!\cdot 7\cdot 4^7} + \ldots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $1/(1!\cdot 3\cdot 4^3) \approx 0{,}0052 > 0{,}001$, а $1/(2!\cdot 5\cdot 4^5) < 0{,}001$, то с точностью до 0,001 имеем:

$$\int_0^{1/4} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0.245.$$

•

Замечание. Первообразную F(x) для функции f(x) = e^(-x^2) легко найти в виде степенного ряда, проинтегрировав равенство (13.1) в пределах от 0 до x:

$$F(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt=\int_0^x\left(1-\frac{t^2}{1!}+\frac{t^4}{2!}-\ldots\right)dt=x-\frac{x^3}{1!\cdot 3}+\frac{x^5}{2!\cdot 5}-\frac{x^7}{3!\cdot 7}+\ldots,\ x\in(-\infty,+\infty).$$

Функции f(x) = 1/√(2π) exp(-x^2/2) и F(x) = ∫ f(t)dt играют очень важную роль в теории вероятностей. Первая является плотностью нормального распределения вероятностей, вторая есть функция Лапласа $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ (или *интеграл вероятностей*). Мы получили, что функция Лапласа представляется рядом

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^2\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^3\cdot 3!\cdot 7}+\ldots\right)$$

который сходится на всей числовой оси.