Контрольная работа №4

Тема. Неопределенные интегралы

Для вычисления интегралов используются следующие приемы и методы интегрирования.

1. Введение поправок для обеспечения равенства аргумента подынтегральной функции и переменной интегрирования под знаком дифференциала. При этом дифференциал при необходимости изменяют так: $du = \frac{1}{a} d(au) = \frac{1}{a} d(au + b)$, где a и b − постоянные величины.

2. Подведение части подынтегральной функции под знак дифференциала.

3. Замена переменной интегрирования (прямая $x = \varphi(t)$ и обратная $(t = \psi(x))$ подстановки).

4. Интегрирование по частям

$$\int u dv = uv - \int v du$$

а) Найти неопределенные интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1) $\int \frac{x dx}{\sin^2(2x^2+3)}$; 2) $\int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}}$; 3) $\int x \sin 3x \, dx$.

Решение. Пример 1

$$\int \frac{x dx}{\sin^2(2x^2+3)} = \left[\begin{matrix}\text{подведение} \\ \text{под знак} \\ \text{дифференциала}\end{matrix} \quad x dx = d\left(\int x dx\right) = \frac{1}{2} dx^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{\sin^2(2x^2+3)} = \left[\begin{matrix}\text{введение} \\ \text{поправок}\end{matrix} \quad dx^2 = \frac{1}{2}(2x^2+3)\right] = \frac{1}{4} \int \frac{d(2x^2+3)}{\sin^2(2x^2+3)} =$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{замена} \\ \text{переменной}\end{matrix} \quad u = 2x^2+3\right] = \frac{1}{4} \int \frac{du}{\sin^2 u} = \frac{1}{4}(-\mathrm{ctg} u) + c =$$

$$= -\frac{1}{4} \mathrm{ctg}(2x^2+3) + c$$

<u>Проверка</u>

$$\left(-\frac{1}{4} \mathrm{ctg}(2x^2+3) + c\right)' = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sin^2(2x^2+3)}\right)(2x^2+3)' = \frac{x}{\sin^2(2x^2+3)}$$

Решение. Пример 2

$$J = \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{3-6x-x^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{выделяем полный квадрат} \\ -(x^2+6x-3) = -(x^2+2\cdot 3x+9-9-3) = \\ = 12-(x+3)^2 \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{12-(x+3)^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{производим замену} \\ x+3 = t => x = t-3 \\ dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{(2(t-3)+5)dt}{\sqrt{12-t^2}} =$$

$$\int \frac{(2t-1)dt}{\sqrt{12-t^2}} = \int \frac{2tdt}{\sqrt{12-t^2}} - \int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}} = J_1 - J_2$$

$$J_1 = \int \frac{2tdt}{\sqrt{12-t^2}} = \left| \begin{array}{c} \text{подводим под знак дифференциала} \\ 2tdt = d\left(2\int 2tdt\right) = d(t^2) \end{array} \right| = \int \frac{d(t^2)}{\sqrt{12-t^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \text{вводим поправку} \\ d(t^2) = (-1)d(-t^2) = -d(12-t^2) \end{array} \right| = \int \frac{d(12-t^2)}{\sqrt{12-t^2}} = -2\sqrt{12-t^2} + c_1$$

$$J_2 = \int \frac{dt}{\sqrt{12-t^2}} = \left| \begin{array}{l} \text{табличный интеграл} \\ \int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} = arc\sin\frac{t}{a} \end{array} \right| = arc\sin\frac{t}{\sqrt{12}} + c_2$$

$$J = J_1 - J_2 = -2\sqrt{12-t^2} + c_1 - arc\sin\frac{t}{\sqrt{12}} + c_2 = \left| \begin{array}{l} t = x+3 \\ c_1 + c_2 = c \end{array} \right| =$$

$$= -2\sqrt{3-6x-x^2} - arc\sin\frac{x+3}{\sqrt{12}} + c$$

<u>Проверка</u>

$$\left(-2\sqrt{3-6x-x^2} - arc\sin\frac{x+3}{\sqrt{12}} + c\right)' = \frac{6+2x}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \frac{1}{12\sqrt{1-\frac{(x+3)^2}{12}}} =$$

$$= \frac{6+2x}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{12-x^2-6x-9}} = \frac{2x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}} - \text{ верно!}$$

Решение. Пример 3

$$J=\int x\sin 3x\,dx=\left|\begin{array}{l}\text{интегрируем по частям}\\ u=x \qquad dv=\sin 3x\,dx\\ du=dx \quad v=\frac{1}{3}\int \sin 3x\,d3x=-\frac{\cos 3x}{3}\end{array}\right|=$$

$$=-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{1}{3}\int \cos 3x\,dx\frac{3}{3}=-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\int \cos 3x\,d3x=$$

$$=-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c$$

<u>Проверка</u>

$$\left(-\frac{x}{3}\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+c\right)'=-\frac{1}{3}\cos 3x-\frac{x}{3}(-\sin 3x)\cdot 3+\frac{1}{9}\cos 3x\cdot 3=$$

$=x\sin 3x-$ верно

В задачах необходимо вычислить неопределенные интегралы с применением специальных методов:

- Разложение подынтегральных функций в виде рациональных дробей на многочлены и элементарные дроби;
- Рационализация подынтегральных функций с помощью специальных подстановок.

Рассмотрим конкретные примеры, аналогичные задачам №21-30

а) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)(1+\sqrt[6]{x-1})}dx$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx$.

г) $\int \frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)(x^2-2x+5)}dx$

Решение. Пример. а) $\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$

Подынтегральная функция является неправильной рациональной дробью $\left(\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \text{где } m\geq n\right)$. Такие интегралы решаются методом разложения, позволяющим представить подынтегральную функцию в виде линейной комбинации элементарных дробей.

В нашем примере, разделив числитель дроби на знаменатель «уголком», получаем

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x^2-5x+6)}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}$$

Разложим правильную рациональную дробь на элементарные дроби с неопределенными коэффициентами и представим ее в виде тождества

$$\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-3)}$$

Приведем дроби в правой части к общему знаменателю и отбросим знаменатели. Тогда получим

$$5x^2-6x+1=A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)$$

Тождество должно выполняться при любых значениях x. Выберем значения x, равные корням знаменателя, тогда получим:

При $x=0$ $\quad A(0-2)(0-3)+B\cdot 0(0-3)+C\cdot 0(0-2)=>A=\frac{1}{6};$

При $x=2$ $\quad A(2-2)(2-3)+B\cdot 2(2-3)+C\cdot 2(2-2)=>B=-\frac{9}{2};$

При $x=3$ $\quad A(3-2)(3-3)+B\cdot 3(3-3)+C\cdot 3(3-2)=>C=\frac{28}{3}.$

Таким образом, подынтегральную функцию можно представить в виде

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}$$

Тогда исходный интеграл представляется в виде линейной комбинации элементарных дробей

$$J=\int\left(1+\frac{1}{6x}-\frac{9}{2(x-2)}+\frac{28}{3(x-3)}\right)dx=$$

$$=\int 1dx+\frac{1}{6}\int\frac{dx}{x}-\frac{9}{2}\int\frac{dx}{(x-2)}+\frac{28}{3}\int\frac{dx}{(x-3)}=$$

$$=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+c$$

Решение. Пример б.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx$$

Подынтегральные функции таких интегралов, имеющих одинаковые выражения под знаками радикалов разных степеней, приводятся к рациональным функциям (рационализируются) с помощью замен переменной. Затем интегралы вычисляются с новой переменной. После чего в результате возвращаются к исходной переменной.

$$J=\int \frac{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1+\sqrt[6]{x-1}\right)}dx=[x-1=t^{12}=>dx=12t^{11}dt]=$$

$$=\int \frac{t^4+t^3}{t^{12}(1+t^2)}12t^{11}dt=\int \frac{t^2(t+1)}{(t^2+1)}dt=\int \frac{t^3+1}{t^2+1}dt=\int \left(1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=$$

$$=\int dt-\int \frac{tdt}{t^2+1}+\int \frac{dt}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\ln|t^2+1|+arc\tan t+c=$$

$$=[t=\sqrt[12]{x-1}]=\frac{\left(\sqrt[6]{x-1}\right)}{2}-\frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt[6]{x-1}\right)+1\right|+arc\tan t\sqrt[12]{x-1}+c$$

Решение. Пример в.

$$J=\int \frac{\cos^3 x}{2+\sin x}dx=\int \frac{\cos^2 x\cos x\,dx}{2+\sin x}=\begin{bmatrix}\text{подводим под знак дифференциала}\\ \cos x\,dx=d\left(\int \cos x\,dx\right)=d\sin x\end{bmatrix}=$$

$$=\int \frac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}d\sin x=\begin{bmatrix}\text{рацианализируем}\\ \text{заменой переменной}\\ t=\sin x\end{bmatrix}=\int \frac{1-t^2}{2+t}dt=$$

$$=\begin{bmatrix}\text{рациональную дробь}\\ \text{зазложим на элементарные}\\ \text{дроби и многочлен}\end{bmatrix}=\int \left(-t+2-\frac{3}{t+2}\right)dt=$$

$$=-\frac{t^2}{2}+2t-3\ln|t+2|+c=-\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x-3\ln(\sin x+2)+c$$

Решение. Пример г.

$$\int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27}{(x-2)(x^2-2x+5)}\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27 = x - 4 + \dfrac{-2x^2 + 3x - 13}{(x-2)(x^2-2x+5)}; \\ \dfrac{-2x^2 + 3x - 13}{(x-2)(x^2-2x+5)} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{Bx + C}{x^2 - 2x + 5} \\ -2x^2 + 3x - 13 \equiv A(x^2 - 2x + 5) + (Bx + C)(x-2) \\ \begin{array}{l|lr} x^2 & -2 = A + B & A = -3 \\ x^1 & 3 = -2A - 2B + C & B = 1 \\ x^0 & -13 = 5A - 2C & C = -1 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= \int x\,dx - 4\int dx - 3\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x-1}{x^2-2x+5}\,dx = \int x\,dx - 4\int dx - 3\int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{x}{(x-1)^2+4}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x - 3\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln|x^2 - 2x + 5| + C;$$

Тема Определенные интегралы

Вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ с помощью формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx = F(x) + c\right)\Bigg|_a^b = F(b) - F(a)$$

b) Вычислить

$$\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{bmatrix} \text{замена переменной} \\ x = e^t \ => dx = e^t dt \\ \ln x = \ln e^t \ = t\ln e \ = t \end{bmatrix} = \int_{t_н}^{t_в} \frac{e^t dt}{e^t(1+t^2)} = \int_{t_н}^{t_в} \frac{dt}{(1+t^2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{замена пределов} \\ x_н = a = 1 = e^{t_н} => t_н = 0 \\ x_в = b = e = e^{t_в} => t_в = 1 \end{bmatrix} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)} = arc\tan t \Bigg|_0^1 =$$

$$= arc\tan 1 - arc\tan 0 = \frac{\pi}{4}$$

3.

а) Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 6x + 5$ и прямой $y = x - 1$. Сделать чертеж.

Построим параболу и прямую.

1. Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Вершина параболы является точкой экстремума, поэтому для ее отыскания найдем производную и приравняем ее к нулю: $y' = \left(x^2 - 6x + 5\right)' = 2x - 6$; $2x - 6 = 0$; $x = 3$.

   Тогда $y(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$. Итак, вершина параболы в точке $(3;-4)$.

   Точки пересечения параболы с осью OX: $y = 0$, тогда $x^2 - 6x + 5 = 0$, откуда $x_1 = 1$; $x_2 = 5$, то есть точки $(1;0)$и $(5;0)$.

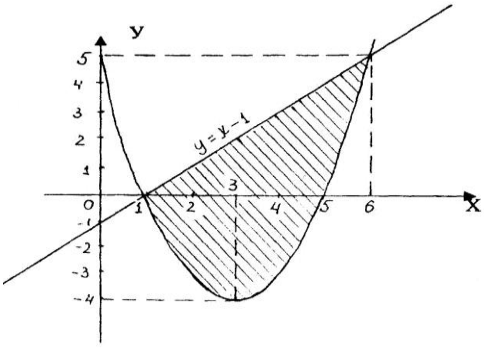
   Точка пересечения с осью OН: $x = 0$, тогда $y = 5$; то есть точка $(0;5)$.

   Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх.

2. Прямую $y = x - 1$ строим по двум точкам:

   $\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$

   Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой.



3.

3. Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 6.$$

4. Для отыскания искомой площади воспользуемся формулой: $S=\int\limits_a^b\left[f_2(x)-f_1(x)\right]\cdot dx$,

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x)>f_1(x)$ при $x\in[a;b]$.

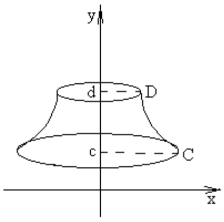
В нашей задаче $f_1(x)=x^2-6x+5$ а $f_2(x)=x-1$; $x\in[1;6]$, поэтому

$$S=\int\limits_1^6\left[(x-1)-\left(x^2-6x+5\right)\right]\cdot dx=\int\limits_1^6\left(-x^2+7x-6\right)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-6x\right]\Bigg|_1^6$$
$$=\left(-\frac{216}{3}+7\cdot\frac{36}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}.$$

b) Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, лежащей в плоскости *xOy* и ограниченной линиями $y^2=4-x$, x=0;

Решение. Для вычисления объёма воспользуемся соответствующей формулой

(Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *CcdD,* ограниченной дугой *CD* кривой y=φ(y) ($\varphi(y)\geq 0$) и прямыми y=c и



y=d,

вычисляется по формуле: $\mathbf{V_y}=\boldsymbol{\pi}\int\limits_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}\mathbf{x^2dy}=\boldsymbol{\pi}\int\limits_{\mathbf{c}}^{\mathbf{d}}\boldsymbol{\varphi}^{\mathbf{2}}\mathbf{dy}$)

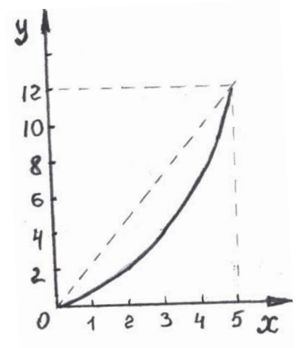
$$V_y=\pi\int\limits_c^d x^2dy=\pi\int\limits_{-2}^{2}(4-y^2)^2\,dy=2\pi\int\limits_0^2(4-y^2)^2\,dy=2\pi\int\limits_0^2(16-8y^2+y^4)\,dy=$$

$$=2\pi\left(16y-\frac{8}{3}y^3+\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2=2\pi\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)=\frac{512\pi}{15}\approx 107{,}23$$

c) рассмотрим задачу определения длины дуги плоской кривой.

Найти длину дуги полукубической параболы $y=x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0;5]$.

Решение. Строим кривую (см. рис.) для вычисления длины дуги используем готовую формулу



$$L = \int_0^5 \sqrt{1+(y')^2}dx$$

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

$$L = \int_0^5 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx = \begin{bmatrix} u = 1+\frac{9}{4}x => du = \frac{9}{4}dx => dx = \frac{4}{9}du \\ x_н = 0 => u_н = 1;\ x_в = 5 => u_в = 1+\frac{9}{4}x_в = \frac{49}{4} \end{bmatrix} =$$

$$= \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u}\frac{4}{9}du = \frac{4}{9}\int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u}du = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{27}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{335}{27} \approx 12{,}4$$

<u>Проверка.</u> Длина отрезка (пунктир), соединяющего концы кривой

$$L^* = \sqrt{5^2 + \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2} \approx 12{,}25$$

$L^* < L$ $(12{,}25 < 12{,}4)$ – верно!

Тема Несобственные интегралы

В задачах даны несобственные интегралы первого рода с бесконечным верхним пределом:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx$$

Определяют сходимость так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty}[F(b)-F(a)]$$

Если предел конечен, то интеграл сходится, если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл является расходящимся.

Конкретный пример вычисления несобственного интеграла.

Исследовать на сходимость несобственный интеграл 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение.

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{a}^{0}+\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{0}^{b}=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{a+2}{\sqrt{5}}\right)+$$

$$\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{b+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

$$2)\ \int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\lim_{b\to0-}\int\limits_{-1}^{b}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim_{a\to0+}\int\limits_{a}^{1}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to0-}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{b}+\lim_{a\to0+}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{a}^{1}=157{,}43.$$