Контрольная работа 3

Тема 3. Пределы и производные функций

1. Найти пределы нижеследующих функций одной переменной (без правила Лопиталя).

а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}$

б) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}$

в) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}$

г) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}$

Пример а) $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}$

Решение. Определяем вид неопределенности. При формальных операциях с бесконечностями обращаемся с ними как с бесконечно большими функциями.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}=\left[\frac{2\infty^3+5\infty}{7\infty^3-1}=\frac{\infty^2\left(\infty+\frac{1}{\infty}\right)}{\infty^3}=\frac{\infty^2\cdot\infty}{\infty^3}=\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x}{7x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{5}{x^2}\right)}{x^3\left(7-\frac{1}{x^3}\right)}=\frac{2}{7}$$

Бесконечно малыми функциями $\left(\frac{5}{x^2};\ \frac{1}{x^3}\right)$ пренебрегаем, так их пределы всегда равны нулю. При формальных операциях с нулями обращаемся с ними как с бесконечно малыми.

Пример б)

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{3+t}-\sqrt{3-t}}{2t}\cdot\frac{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}{\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{3+t-3+t}{2t\left(\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{2t}{2t\left(\sqrt{3+t}+\sqrt{3-t}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Пример в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 5x-\cos 7x}{x^2}=\left[\frac{1-1}{0^2}=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 6x\cdot\sin(-x)}{x^2}=$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}\cdot\frac{6}{6}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=12$$

Пример г)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+3}=\left[\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\leftarrow\begin{matrix}\text{неопределенность}\\ \text{общего вида}\end{matrix}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3}{x-1}-1\right)^{x+3}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+3-x+1}{x-1}\right)^{x+3}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{x+3}=[1^{\infty}]=$$

$$=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x-1}{4}}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)(x+3)}=$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{4(x+3)}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}=4\right]=e^4$$

Проверка с помощью правила Лопиталя двух пределов (производится после выполнения нижеследующих задач №11-20 (КР-2).

Правило Лопиталя применяют для раскрытия неопределенностей $\left[\frac{0}{0}\right]$ и $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ с использованием дифференцирования функций.

Пример а)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^3+5x)'}{(7x^3-1)'}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x^2+5)'}{(21x^2)'}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{42x}=$$

Пример в)

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-\cos 7x)'}{(x^2)'}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(-5\sin 5x+7\sin 7x)'}{(2x)'}=\left[\frac{0}{0}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-25\cos 5x+49\cos 7x}{2}=\left[\frac{-25\cdot 1+49\cdot 1}{2}=12\right]=12$$

2. найти производные первого порядка функций одной переменной, используя правила дифференцирования и формулы дифференцирования основных элементарных функций (табличных производных).

Примеры решения конкретных задач, аналогичных задачам №11-20 (КР-2):

а) $y=\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}arc\sin x$

б) $y=\ln^2(1-\cos x)$

в) $y=arc\tan 3^{\sqrt{x}}$

г) $xy+\sin y=0$

д) $y=x\cdot\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

Пример а)

$$y'=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2}\right)'+\frac{1}{2}(arc\sin x)'=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-x^2}+x\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-x^2-x^2+1}{\sqrt{1-x^2}}=$$

$$=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-x^2}$$

Пример б)

$$y'=(\ln^2(1-\cos x))'==2\ln(1-\cos x)\cdot(\ln(1-\cos x))'=$$

$$2\ln(1-\cos x)\cdot\frac{1}{1-\cos x}\cdot(1-\cos x)'=\frac{2\ln(1-\cos x)\cdot\sin x}{1-\cos x}$$

Пример в)

$$y'=\left(arc\tan 3^{\sqrt{x}}\right)'=\frac{1}{1+\left(3^{\sqrt{x}}\right)^2}\cdot 3^{\sqrt{x}}\ln 3\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{3\sqrt{x}\cdot\ln 3}{2\sqrt{x}\left(1+3^{2\sqrt{x}}\right)}$$

Пример г) $xy+\sin y=0$

Решение. Дана функция одной переменной в неявной форме. В этом случае при дифференцировании переменной *y* по *x*, эту переменную рассматривают как сложную функцию аргумента *x* (например, $(y^2)'_x = 2yy'$).

В нашем примере получим:

$$(x \cdot y)' + (\sin y)' = 0 => 1y + xy' + \cos y y' = 0$$

$$y'(x + \cos y) = -y => y' = \frac{-y}{x + \cos y}$$

Пример д) $y = x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$

При дифференцировании функций, содержащих несколько сомножителей в числителе и знаменателе или показательно степенных функций вида $y=f(x)^{\varphi(x)}$, функции сначала логарифмируют, а затем дифференцируют.

$$(\ln y)' = \left(\ln\left(x \cdot \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)\right)' = \left(\ln x + \frac{1}{3}(2\ln x - \ln(x^2+1))\right)'$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right)$$

$$y' = y\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{3x} - \frac{2x}{3(x^2+1)}\right) = y\left(\frac{3(x^2+1) + 2(x^2+1) - 2x^2}{3x(x^2+1)}\right) =$$

$$= y\left(\frac{3x^2 + 3 + 2x^2 + 2 - 2x^2}{3x(x^2+1)}\right) = y\left(\frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)}\right) =$$

$$= x \cdot \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2+5}{3x(x^2+1)} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2+5}{3(x^2+1)}$$

3. Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций. Часть функций задана в параметрической форме *x=x(t), y=y(t).*

Производные первого и второго порядков для таких функций определяются по формулам

$$\frac{dy}{dx} = y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = y''_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t}$$

Примеры решения конкретных задач аналогичных задачам №21-30 (КР-2).

А) $y = 5^{2x+4}$ б) $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = arc\tan t \end{cases}$

Найти производные y'_x и y''_x

Решение.

Пример а) $y'_x = (5^{2x+4})' = 5^{2x+4} \cdot \ln 5 (2x+4)' = 5^{2x+4} \ln 5 \cdot 2$

$y''_x = (5^{2x+4} \ln 5 \cdot 2)' = (2\ln 5)^2 \cdot 5^{2x+4}$

Пример б) $\begin{cases} x = \ln(t^2+1) \\ y = arc\tan t \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \left[y'_t = \frac{1}{t^2+1};\ x'_t = \frac{1}{t^2+1} \cdot 2t\right] = \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{t^2+1}{2t} = \frac{1}{2t}$$

$$y''_x = (y'_x)'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\right)'_t \cdot \frac{t^2+1}{2t} = -\frac{t^2+1}{4t^3}$$

4. Найти пределы функций по правилу Лопиталя: 1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{ctg\, 2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^{100}}{e^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{ctg\, x}$;

Решение

$$1) \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(x^3)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(3x^2)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6}{\cos x} = 6;$$

2)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{ctg\, 2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln x)'}{(ctg\, 2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 2x}{-2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 2x)'}{(-2x)'} =$$

$$-\lim_{x\to 0} \frac{4\sin 2x \cos 2x}{2} = -\lim_{x\to 0} \sin 4x = 0;$$

$$3) \lim_{x\to +\infty} \frac{x^{100}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^{100})'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{100x^{99}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{(100x^{99})'}{(e^x)'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{100 \cdot 99x^{98}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to +\infty} \frac{(100 \cdot 99x^{98})'}{(e^x)'} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{100 \cdot 99 \cdot 98x^{97}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to +\infty} \frac{100!}{e^x} = 0;$$

4) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\left[\infty-\infty\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2-x-1}{x^2-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-1}{2x}=-\dfrac{1}{2}$;

5) $\lim\limits_{x\to0^+}x\cdot\ln x=\left[0\cdot\infty\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^2}{x}=-\lim\limits_{x\to0^+}x=0$;

6) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{ctg\,x}=\left[1^\infty\right]=\left|\begin{array}{l} f(x)^{g(x)}=(1+x)^{ctgx}= \\ =e^{\ln(1+x)^{ctgx}}=e^{ctg\,x\ln(1+x)} \\ x>-1 \end{array}\right|=\lim\limits_{x\to0}e^{ctg\,x\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}ctg\,x\ln(1+x)}$;

Вычислим $\lim\limits_{x\to0}ctg\,x\cdot\ln(1+x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{tg\,x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^2 x}{1+x}=1$. Окончательно имеем: $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{ctg\,x}=e^{\lim\limits_{x\to0}ctg\,x\ln(1+x)}=e^1=e$;

5. Построить график функции *y=f(x)*, используя общую схему исследования функции, включающую следующие пункты:

1. Найти область существования (естественного определения функции).
2. Проверить является ли функция симметричной относительно оси *Oy* (четной) или относительно начала координат (нечетной) или периодической.
3. Найти точки разрыва функции, точки пересечения графиком функции осей координат и определить интервалы знакопостоянства функции способом пробных точек.
4. Найти асимптоты графика функции (вертикальные, наклонные, горизонтальные); при наличии асимптот определить асимптотическое поведение функции с помощью односторонних пределов; при отсутствии указанных асимптот исследуем поведение функции в граничных точках области существования, включая $x=\pm\infty$.

Замечание. Пункты 1-4 выполняются без использования производных.

5. Находим критические точки первого и второго рода, определяем значение функции в этих точках.
6. Разбить область существования на частичные интервалы разделенные точками разрыва, нулями функции, критическими точками первого и второго рода.
7. Исследовать монотонность (убывание – возрастание) и выпуклость функции в выделенных интервалах. Определить наличие экстремумов в критических точках первого рода двумя способами. Найти точки перегиба среди критических точек второго рода.
8. Результаты исследования представить в табличной форме и в виде графика.

Исследовать методами дифференциального исчисления функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, используя результаты исследования, построить ее график:

Решение.

1. Область определения функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$: $D(y)=R/\{\pm2\}$.
2. Исследуем поведение функции в граничных точках области определения

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$, т.е. при $x\to\pm\infty$ функция стремится к $\pm\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty$, т.е. при $x\to-2-0$ функция стремится к $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty$, т.е. при $x\to-2+0$ функция стремится к $+\infty$;

$\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty$, т.е. при $x\to2-0$ функция стремится к $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty$, т.е. при $x\to2+0$ функция стремится к $+\infty$.

3. Выясним чётность и периодичность: $y(-x)=\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-y(x)$, т.е. функция нечетна; функция не является периодической.
4. Найдем асимптоты функции:

   вертикальные асимптоты: $x=\pm2$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$;

   наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=1$,

   $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$, т.е. $y=x$ — наклонная асимптота;

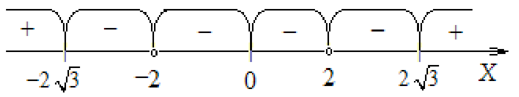
   горизонтальных асимптот нет.
5. Точки пересечения графика с осями координат:

   с осью OX: $\dfrac{x^3}{x^2-4}=0$; $x=0$, т.е. $(0;0)$;

   с осью OY: $\dfrac{0^3}{0^2-4}=0$, т.е. $(0;0)$.
6. Найдем точки экстремума и интервалы монотонности:

   $y'=\dfrac{3x^2\left(x^2-4\right)-x^3\cdot2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}$;

   $\dfrac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=0$; $x^2=0$; $x=\pm2\sqrt{3}$; $x\neq\pm2$ — критические точки I рода.



   Функция

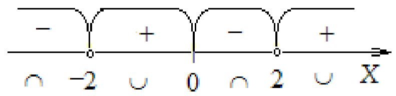
   на интервале $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ и $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ возрастает;

   на интервале $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ убывает, тогда $x=-2\sqrt{3}$ — максимум; $y\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$; $x=2\sqrt{3}$ — минимум; $y\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$.

7. Найдем точки перегиба функции и интервалы выпуклости и вогнутости:

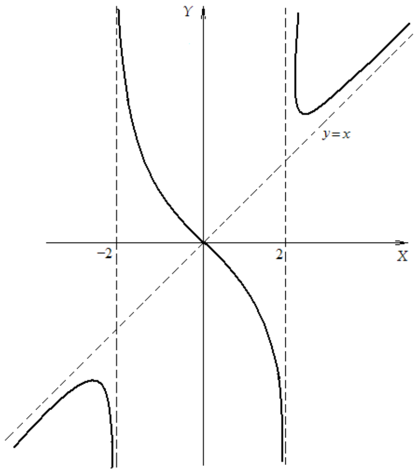
   $y''=\dfrac{\left(4x^3-24x\right)\left(x^2-4\right)^2-\left(x^4-12x^2\right)2\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$;

$$\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0;\ x=0,\ x\neq\pm 2$$ — критические точки II рода.



Функция
на интервале $(-\infty;-2)$, $(0;\,2)$ выпукла;
на интервале $(-2;\,0)$, $(2;\,\infty)$ вогнута, тогда $x=0$ — точка перегиба; $y(0)=0$.

8. Построим эскиз графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$.



6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции: $f(x)=x^2-6x+13$, если $0\le x\le 5$.

Решение. Область определения данной функции $D(y)=R$.

Найдем критические точки первого рода, т.е. $f'(x)=2x-6$; $2x-6=0$; $x=3\in[0;\,5]$, тогда $f(3)=4$.

Вычислим значения функции на концах отрезка $[0;5]$, т.е. $f(0)=13$; $f(5)=8$.
Среди всех вычисленных значений функции выберем наибольшее и наименьшее: $f_{\text{íàèì}}(3)=4$; $f_{\text{íàèá}}(0)=13$.

7. Частные производные первого порядка

Рассмотрим функцию двух переменных $z=f(x,y)$. Придавая значению переменной x приращение Δx, рассмотрим предел (при $\Delta x\to 0$)

$$\lim\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}.$$

Этот предел называется частной производной (первого порядка) данной функции по переменной x в точке (x,y) и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ или $f_x'(x,y)$. Точно так же определяется частная производная этой функции по переменной y и обозначается $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ или $f_y'(x,y)$.

Частные производные вычисляются по обычным формулам дифференцирования, при этом все переменные, кроме одной рассматриваются как постоянные.

Пример 2. Найти частные производные функции $z = \arccos\frac{x}{y}$ $(y > 0)$.

Решение. Считая величину y постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

Считая величину x постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{x}{y}\frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}.$$

8. Частные производные высших порядков

Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных x и y. Частными производными второго порядка функции $f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Частные производные второго порядка обозначаются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f''_{xx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f''_{xy};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f''_{yx}; \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f''_{yy}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные более высокого порядка. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по нескольким различным переменным, называется смешанной частной производной. Относительно смешанных частных производных имеет место следующая теорема.

Теорема. Две смешанные частные производные одной и той же функции, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Пример. Найти частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ от функции $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

Решение. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = e^x(\cos y - \sin y + x\cos y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)'_x = e^x(2\cos y - \sin y + x\cos y).$$

9. Производная по направлению. Градиент функции многих переменных

Пусть функция двух переменных $z = f(x, y).$задана в некоторой окрестности точки $M(x, y)$. Рассмотрим направление, определяемое единичным вектором $\overline{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, где $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$. На прямой, проходящей по этому направлению через точку M, возьмем точку $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$, таким образом, что длина отрезка $|\Delta l| = |\overline{MM_1}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Приращение функции $f(M)$ определяется как

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).,$$

где $\Delta x = \Delta l \cdot \cos\alpha$, $\Delta y = \Delta l \cdot \cos\beta$.

Определение. Предел отношения $\dfrac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ называется *производной функции* $f(M)$ *по направлению* $\overline{l}$ в точке $M(x, y)$ и обозначается символом $\dfrac{\partial z}{\partial l}$:

$$. \qquad \frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta l}.$$

Если функция $f(M)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то ее приращение в этой точке, с учетом соотношений для Δx и Δy, при использовании предельного перехода может быть записано в виде:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta.$$

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1,1)$ по направлению, составляющему с осью O_x угол $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Если $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$, то $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha = \dfrac{\pi}{6}$. Тогда

$\dfrac{\partial z}{\partial l} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cos\dfrac{\pi}{6} = 2x \cdot \dfrac{1}{2} + 2y \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. В точке $M(1,1)$ получаем: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial l}\right|_{(1,1)} = 1 + \sqrt{3}$.

Градиент функции многих переменных

Рассмотрим функцию двух переменных z=f(x,y), дифференцируемую в некоторой точке M(x;y)

Определение. *Градиентом* функции z=f(x,y) в точке M называется вектор, координаты которого равны соответствующим частным производным этой функции в точке M. Градиент обозначается

$$gradz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

Через градиент легко выразить производную по заданному направлению $\overline{l} = (\cos\alpha, \cos\beta)$:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = (\bar{l}, gradz)$$

Кроме того, воспользовавшись свойствами скалярного произведения, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (\bar{l}, gradz) = \left|\bar{l}\right|\left|gradz\right|\cos\varphi$$

где φ – угол между векторами $\overline{l}$ и $\mathrm{grad}u$. Однако, поскольку $|\overline{l}|=1$, то производная функции по направлению принимает максимальное значение при $\varphi = 0$, т.е. когда направления $\overline{l}$ и $\mathrm{grad}u$ совпадают. При этом $\max\limits_{\bar{l}} \frac{\partial u}{\partial l} = |\mathrm{grad}u|$.

Вывод. Градиент функции характеризует направление и величину максимальной скорости возрастания этой функции в точке.

Пример. Вычислить градиент и его модуль функции $z = \frac{xy}{x+y+1}$ в точке $M(0,1)$.

Решение. $\mathrm{grad}\, z = \left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}, \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2} \right)$, при $x = 0, y = 1$:

$\overrightarrow{gradz}\Big|_{(1;1)} = \vec{i}$, $|\mathrm{grad}\, z| = 1$.

Пример. Требуется найти производную функции $z = \frac{y}{y-x}$ по направлению, составляющему угол в 60° с осью *OX*, в точке (1;3).

Найдем частные производные функции: $z'_x = \frac{y}{(y-x)^2}; z'_y = -\frac{x}{(y-x)^2}$ Теперь можно определить градиент функции в точке (1;3): $\overline{grad}\, z(1;3) = \left\{ \frac{3}{4}; -\frac{1}{4} \right\}$. Принимая во внимание равенство $\overline{e} = \left\{ \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$, воспользуемся формулой (4):

$$\frac{\partial z(1;3)}{\partial l} = \frac{3-\sqrt{3}}{8}.$$