МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ТЕМЕ «АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»

Задание 1. Даны вершины треугольника *ABC:* $A(4;3)$, $B(-3;3)$, $C(2;7)$. Найти:
а) уравнение стороны *AB*;
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *AM*;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение. а) Вычислим расстояние AB по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Получим $|AB| = \sqrt{(-3-4)^2 + (3-3)^2} = 7$

б) S=$|AB|^2 = 49$

в)Прямая проходит через две точки $A(4;3)$ и $B(-3;3)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{\tilde{o} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\acute{o} - y_1}{y_2 - y_1}$, получим уравнение стороны *AB*: $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$, откуда $6(x-4) = 7(y-3)$ или $6x - 7y - 3 = 0$;

г) Угловой коэффициент прямой *AB:* $k_{AB} = \frac{6}{7}$. С учётом условия перпендикулярности прямых *AB* и *CH* угловой коэффициент высоты *CH*: $k_{CH} = -\frac{7}{6}$.

Составим уравнение высоты *CH*, проходящей через точку $C(2;7)$ с угловым коэффициентом $-\frac{7}{6}$, воспользуемся формулой $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$: $y - 7 = -\frac{7}{6}\left(x - 2\right)$ или $7x + 6y - 56 = 0$;

д) Найдём координаты точки *M* — середины отрезка *BC*:

$x = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{-3+7}{2} = 2$, т.е $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Теперь по двум известным точкам *A* и *M* составляем уравнение медианы *AM*:

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4} = \frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x - 9y + 19 = 0;$$

е) расстояние от точки $C(2;7)$ до прямой *AB, заданной уравнением* $6x - 7y - 3 = 0$, вычисляем по формуле $d = \left|\frac{A\,x_0 + B\,y_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|$: d=|*CH*|=$\frac{6\cdot 2 - 7\cdot 7 - 3}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4{,}4$ ед.дл.

Задание 2. Определить тип, параметры и расположение линии, заданной уравнением:

а) $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$; б) $x^2 + 10x - 2y + 11 = 0$.

Решение. а) В исходном уравнении $4x^2 + 5y^2 + 20x - 30y + 10 = 0$, $A = 4$, $C = 5$, тогда $A \cdot C > 0$, т.е. исходное уравнение определяет эллиптический тип линии.

Преобразуем исходное уравнение:

$4x^2+20x+5y^2-30y+10=0$,

$4(x^2+5x)+5(y^2-6y)+10=0$,

$4\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+5\left(y^2-2\cdot y\cdot 3+9-9\right)+10=0$,

$4\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)-\frac{25}{4}\right)+5\left((y-3)^2-9\right)+10=0$,

$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-25+5(y-3)-45+10=0$,

$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+5(y-3)=60$ разделим данное выражение на 60

$\dfrac{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2}{15}+\dfrac{(y-3)^2}{12}=1$ — каноническое уравнение эллипса в преобразованной системе координат, $O'\left(-\dfrac{5}{2};3\right)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики полученной линии: $a^2=15$, $a=\sqrt{15}$; $b^2=12$, $b=\sqrt{12}$, $a>b$, тогда $c^2=a^2-b^2=3$, т.е. $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$;

эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\dfrac{\tilde{n}}{\grave{a}}=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\sqrt{\dfrac{3}{15}}<1$;

директрисы эллипса $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{3}{15}}}=\pm\sqrt{75}$;

б) в исходном уравнении $x^2+10x-2y+11=0$, $A=1$, $C=0$, тогда $A\cdot C=0$, т.е. исходное уравнение определяет параболический тип линии.

Преобразуем исходное уравнение:

$x^2+2\cdot x\cdot 5+25-25-2y+11=0$,

$(x+5)^2-2y-14=0$,

$(x+5)^2 = 2(y+7)$ — каноническое уравнение параболы в преобразованной системе координат, симметричной оси OY, ветви направлены вверх; $O'(-5;-7)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики $2p = 2$, $p = 1$, $F\left(0; \frac{p}{2}\right) = F\left(0; \frac{1}{2}\right)$ — координаты фокуса;

$y = -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2}$ — уравнение директрисы;

$r = y + \frac{p}{2}$, $r = y + \frac{1}{2}$ — фокальный радиус.

Задание 3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3{,}5{,}3)$, $A_2(-2{,}11{,}-5)$, $A_3(1{,}-1{,}4)$, $A_4(0{,}6{,}4)$. Найти уравнения:

1. плоскости $A_1\,A_2\,A_3$;
2. прямой A_1 A_2;
3. прямой A_3N, параллельной прямой $A_1\,A_2$;
4. уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 параллельно грани $A_1\,A_2\,A_3$;
5. вычислить синус угла между прямой $A_1\,A_4$ и плоскостью $A_1\,A_2\,A_3$;

Решение.

1)уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ запишем, используя формулу:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$ Получим

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-5 & z-3 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = -42(x-3)+21(y-5)+42(z-3) = -42x+21y+42z-105$$

$$-42x+21y+42z-105=0$$

$$2x-y-2z+5=0$$

2) Составим уравнения прямой A_1A_2. Для этого воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки A_1 и A_2: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Получаем: $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{-8}$.

3) Так как прямые параллельны, то направляющие вектора коллинеарны $\vec{k}_1 = \vec{k}_2$ $\vec{k}_1 = (-5{,}6{,}-8) = \vec{k}_2$. Тогда уравнение A_3N $\frac{x-3}{-5} = \frac{y-5}{6} = \frac{z-3}{-8}$

4) В уравнение плоскости, проходящей через точку A_4 параллельно грани $A_1\,A_2\,A_3$ нормальные вектора будут коллиниарны ($2x-y-2z+5=0$)

$N_1 = (2;-1;-2) = N_2$. Воспользуемся формулой
$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ Получим $2(x-0)-(y-6)-2(z-4)=0$
$2x-y-2z+14)=0$

5) Чтобы найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$, определим нормальный вектор $\overline{N}=(-42,21,42)$ и $|\overline{N}|=\sqrt{(-42)^2+21^2+42^2}=63$ и направляющий вектор $\overline{A_1A_4}=(-3,1,1)$.
Тогда угол между векторами будет

$$\cos\alpha=\cos\left(\overline{N}\wedge\overline{A_1A_4}\right)=\frac{(-3)\cdot(-42)+1\cdot 21+1\cdot 42}{\sqrt{11}\cdot 63}=\frac{189}{\sqrt{11}\cdot 63}=\frac{3}{\sqrt{11}},\ \alpha=\arccos\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

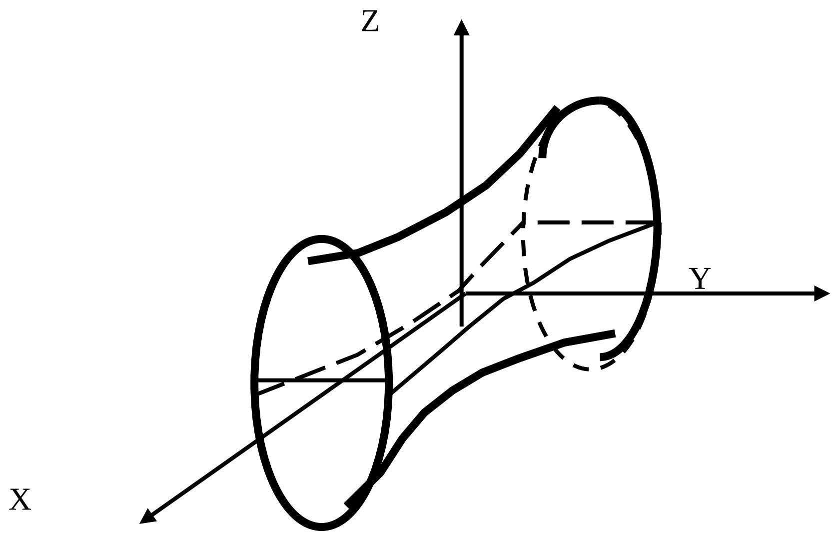
Так как нормальный вектор $\overline{N}$ перпендикулярен плоскости $A_1A_2A_3$, то угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$ определяется как $A_1A_4\wedge A_1A_2A_3=\left|\frac{\pi}{2}-\alpha\right|$.

Задание 4.
Определить вид поверхности и построить ее.

а) $-\frac{x^2}{6}+4y^2+\frac{1}{2}z^2-2=0$. Приведем уравнение к каноническому виду

$$-\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{\frac{1}{2}}+\frac{z^2}{4}=1.$$

Получим уравнение однополостного гиперболоида, ось которого совпадает с OX; полуоси эллипса в плоскости Y0Z равны $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 2. Построим поверхность.



б) $3x^2+\frac{y^2}{2}-\frac{z^2}{4}=0.$

Приведем уравнение к каноническому виду $\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{6}-\frac{z^2}{12}=0$.

Это уравнение конуса второго порядка, ось которого совпадает с осью 0Z.