Направление: «*Строительство*»

Контрольная работа № 2 (1 курс, 2 семестр)

Тема: ***«Интегральное исчисление. Числовые и функциональные ряды. Дифференциальные уравнения. Комплексные числа»***

Задание 1. Найдите неопределённые интегралы.

1. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5-2\cos x}}$; б) $\int \frac{(3x-1)dx}{10-6x+x^2}$; в) $\int x^3 \ln x dx$;

г) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$; д) $\int \frac{x+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$; е) $\int tg^3 2x dx$.

2. а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{2-x^2}}$; б) $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; в) $\int x\cos 5x dx$;

г) $\int \frac{2x^2+x+1}{x^3+x}dx$; д) $\int \frac{x dx}{\sqrt[3]{1+x}}$; е) $\int \cos^3 x \sin^2 x dx$.

3. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{13-12x+4x^2}$; в) $\int x arctg x dx$;

г) $\int \frac{(x+5)dx}{x^4+2x^3+x^2}$; д) $\int \frac{1+\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt{x-1}}dx$; е) $\int \sin^2 2x dx$.

4. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; в) $\int arctg \frac{1}{x} dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; е) $\int \sin^5 x \cos^2 x dx$.

5. а) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$; в) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;

г) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; д) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$; е) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

6. а) $\int \frac{\sin 3x dx}{7-5\cos 3x}$; б) $\int \frac{(x+3)dx}{10-6x+x^2}$; в) $\int \sqrt{x}\ln x dx$;

г) $\int \frac{(x+2)dx}{x^3-2x^2+2x}$; д) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$; е) $\int \frac{dx}{5+3\cos x}$.

7. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$; в) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;

г) $\int \frac{2x^2-3x+12}{x^3+x^2-6x}dx$; д) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+1}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}dx$; е) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$.

8. а) $\int \frac{dx}{(3+tgx)\cos^2 x}$; б) $\int \frac{(x-2)dx}{1+x+x^2}$; в) $\int \arcsin x dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+36x-72}$; д) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}$; е) $\int \frac{dx}{3-5\cos x}$.

9. а) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; б) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2+x+x^2}}$; в) $\int x\sin\frac{x}{2}dx$;

г) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^3+2x^2-3x}$;   д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-2}(1+\sqrt[3]{x-2})}$;   е) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{8-5x}}$;   б) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$;   в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

г) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$;   д) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt[3]{2x+1}}$;   е) $\int \cos 4x \cos 7x dx$.

Задание 2. Вычислите (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

1. $y = x^2$, $y = 3 - x$.
2. $y = \sqrt{x}$, $y = x^3$.
3. $y^2 = x + 1$, $y^2 = 9 - x$.
4. $y^2 = 9x$, $y = 3x$.
5. $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$.
6. $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.
7. $yx = 6$, $y + x - 7 = 0$.
8. $y = 2^x$, $y = 2x - x^2$.
9. $y = 1/(x^2+1)$, $y = x^2/2$.
10. $x^2 = 4y$, $y = 8/(x^2+4)$.

Задание 3. Вычислите (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ф вокруг указанной оси координат.

1. Ф: $y^2 = 4 - x$, $x = 0$; ось OY.
2. Ф: $y^3 = x^2, y = 1$; ось OX.
3. Ф: $y^2 = x$, $x^2 = y$; ось OX.
4. Ф: $y^2 = 4x$, $x^2 = 4y$; ось OX.
5. Ф: $y = x^2$, $8x = y^2$; ось OY.
6. Ф: $y = 2x - x^2$, $y = 0$; ось OX.
7. Ф: $y = x^3$, $x = 0$; $y = 8$ ось OY.
8. Ф: $y = x - x^2$, $y = 0$; ось OX.
9. Ф: $y = 2 - x^2$, $y = x^2$; ось OX.
10. Ф: $y = -x^2 + 8$, $y = x^2$; ось OX.

Задание 4. Вычислите несобственный интеграл или установите его расходимость.

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx$. **2.** $\int_0^{+\infty} \frac{1}{10+6x+x^2} dx$. **3.** $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x}{x^2+9} dx$. **4.** $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx$. **5.** $\int_3^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$.

6. $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{x^3}{1+x^4}dx.$ **7.** $\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+5}dx.$ **8.** $\int\limits_{0}^{+\infty}xe^{3x}dx.$ **9.** $\int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}dx.$ **10.** $\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx.$

Задание 5. Дано комплексное число z,

а) запишите число z в алгебраической, тригонометрической, показательной формах и изобразите его на комплексной плоскости;

б) вычислите выражение.

1. а) $z=\frac{2\sqrt{2}}{1+i}$, б) $(1-i\sqrt{3})^{20}$;

2. а) $z=\frac{4}{1+i\sqrt{3}}$, б) $(1+i)^{21}$;

3. а) $z=\frac{-2\sqrt{2}}{1-i}$, б) $(1+i\sqrt{3})^{40}$;

4. а) $z=\frac{-4}{1-i\sqrt{3}}$, б) $(-1+i)^{30}$;

5. а) $z=\frac{-2\sqrt{2}}{1+i}$, б) $(\sqrt{3}-i)^{25}$;

6. а) $z=\frac{2\sqrt{2}}{1-i}$, б) $(-1+i\sqrt{3})^{24}$;

7. а) $z=\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$, б) $(-1-i)^{42}$;

8. а) $z=\frac{-4}{\sqrt{3}-i}$, б) $(1-i)^{32}$;

9. а) $z=\frac{1}{\sqrt{3}+i}$, б) $(-1+i)^{22}$;

10. а) $z=\frac{1}{\sqrt{3}-i}$, б) $(2+2i)^{20}$.

Задание 6. Найдите общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные).

1. а) $\mathrm{tg}x\mathrm{d}x-y\ln x\mathrm{d}x=0$; б) $xy'\ln\left(\frac{y}{x}\right)=x+y\ln\left(\frac{y}{x}\right)$; в) $y'-\frac{y}{x\ln x}=x\ln x$.

2. а) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$; б) $2dx+\sqrt{\frac{x}{y}}dy-\sqrt{\frac{y}{x}}dx=0$; в) $y'-2\frac{y}{x}=3x^2-2x^4$.

3. а) $e^x dx - \left(1+e^y\right) y\, dy = 0$; б) $xy' \sin\frac{y}{x} + x = y \sin\frac{y}{x}$; в) $y' - \frac{y}{x} = x \sin x$.

4. а) $y' = tgx\, tgy$; б) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6\frac{y}{x} + 3$; в) $y' \cos^2 x + y = tgx$.

5. а) $x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}$; б) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$; в) $y' + y \cos x = e^{\sin x}$.

6. а) $y' y \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0$; б) $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$; в) $y' \sin x - y \cos x = 1$.

7. а) $y' = 2e^x \cos x$; б) $x \cos\frac{y}{x} dy + \left(x - y\cos\frac{y}{x}\right) dx = 0$; в) $y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}$.

8. а) $y(1 + \ln y) + xy' = 0$; б) $(xy' - y) arctg\frac{y}{x} = x$; в) $x^2 y' + 2xy = e^x$.

9. а) $\sqrt{5 + y^2} + y' y \sqrt{1-x^2} = 0$; б) $y' = \frac{y}{x} + tg\frac{y}{x}$; в) $y' - y\, tgx = \frac{1}{\cos x}$.

10. а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; в) $xy' - 2y = 2x^4$.

Задание 7. Найдите общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

1. а) $y'' + y' tgx = \sin x \cos x$; б) $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}$.

2. а) $x^2 y'' + xy' = 1$; б) $(1 + x^2) y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

3. а) $y'' - 2ctgx \cdot y' = sin^3 x$; б) $y''(2y + 3) - 2(y')^2 = 0$.

4. а) $y'' x \ln x = y'$; б) $y'' tgx = y' + 1$.

5. а) $y y'' - (1 + y')y' = 0$; б) $y y'' = y^2 y' + (y')^2$.

6. а) $y''' = e^{-2x}$; б) $y''' = x^3 - \sqrt{x}$.

7. а) $y''' \sqrt{x} = 3x^2 - \sqrt{x} - 1$; б) $2yy'' + y^2 - y'^2 = 0$.

8. а) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; б) $2y(y')^3 + y'' = 0$.

9. а) $2yy'' = (y')^2 + 1$; б) $y''' = \cos 2x$.

10. а) $y'' = x \sin x$; б) $y'' = 4^{2x}$.

Задание 8. Найдите частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

1. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
2. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 1; y'(0) = 0;$
3. $y'' + 9y = 6e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
4. $y'' - 2y' + 5y = 5x^2 - 4x + 2, \quad y(0) = 0; y'(0) = 1;$
5. $y'' + 4y = 8\sin 2x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
6. $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^{3x}, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
7. $y'' - y = 9xe^{2x}, \quad y(0) = 0; y'(0) = -5;$
8. $y'' - 4y' + 4y = 2(x + \sin x), \quad y(0) = 0; y'(0) = 1;$
9. $y'' - 3y' - 4y = 5\cos x, \quad y(0) = y'(0) = 0;$
10. $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x, \quad y(0) = 5; y'(0) = 6.$

Задание 9. Исследуйте сходимость числовых рядов.

1. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 3^n}{5^{n+1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+2}{5n+1}\right)^{n^2}$.

2. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{\pi}{5n+1}\right)^{n}$.

3. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^n n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3 + \sqrt{n}}$.

4. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n (n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n (n^5 - 1)}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 - 2n + 5}}$.

6. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n + 2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln(n+1))^{2n}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(3n-1)\sqrt{\ln^3(3n-1)}}$.

8. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n 5^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\sqrt[3]{\ln(2n+1)}}$.

9. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n-1}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+3)\ln(2n+3)}$.

10. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^{n}-3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)\sqrt{\ln(3n-2)}}$.

Задание 10. Найдите интервал сходимости ряда и исследуйте его сходимость на границах интервала.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n9^n}$. **4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}$. **7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n}}{4^n}$. **10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}$. **5.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}$. **8.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3+3n)4^n}$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2+1}$. **6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}$. **9.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3(x+2)^{2n+1}}{(n+1)!}$.