

Направление: «Строительство»

Контрольная работа № 1 (1 курс, 1 семестр)

Тема: *«Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»*

**Задание 1.** Даны две матрицы  $A$  и  $B$ . Найдите:

а)  $AB$ ;

б)  $B^T A$ .

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad 2. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \quad 4. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 6. A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{pmatrix}. \quad 8. A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \quad 10. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Задание 2.** Вычислите определитель:

а) разложив его по элементам строки  $i$ ;

б) разложив его по элементам столбца  $j$ .

$$1. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} \quad i=3, j=2 \quad 2. |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad i=1, j=2$$

$$3. |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad i=4, j=1 \quad 4. |A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad i=3, j=1$$

$$5. |A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad i=2, j=4$$

$$6. |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} \quad i=4, j=1$$

$$7. |A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} \quad i=4, j=2$$

$$8. |A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad i=1, j=2$$

$$9. |A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad i=3, j=3$$

$$10. |A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad i=2, j=3$$

**Задание 3.** Решите систему линейных алгебраических уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом.

$$1. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$$

**Задание 4.** Даны векторы  $a_1, a_2, a_3, b$ . Покажите, что векторы  $a_1, a_2, a_3$  образуют базис, и найдите координаты вектора  $b$  в этом базисе.

1.  $a_1 = (5; 4; 1), a_2 = (-3; 5; 2), a_3 = (2; -1; 3), b = (7; 23; 4)$ .
2.  $a_1 = (2; -1; 4), a_2 = (-3; 0; -2), a_3 = (4; 5; -3), b = (0; 11; -14)$ .
3.  $a_1 = (-1; 1; 2), a_2 = (2; -3; -5), a_3 = (-6; 3; -1), b = (28; -19; -7)$ .
4.  $a_1 = (1; 3; 4), a_2 = (-2; 5; 0), a_3 = (3; -2; -4), b = (13; -5; -4)$ .
5.  $a_1 = (1; -1; 1), a_2 = (-5; -3; 1), a_3 = (2; -1; 0), b = (-15; -10; 5)$ .
6.  $a_1 = (3; 1; 2), a_2 = (-7; -2; -4), a_3 = (-4; 0; 3), b = (16; 6; 15)$ .
7.  $a_1 = (5; 1; 2), a_2 = (-2; 1; -3), a_3 = (4; -3; 5), b = (15; -15; 24)$ .
8.  $a_1 = (0; 2; -3), a_2 = (4; -3; -2), a_3 = (-5; -4; 0), b = (-19; -5; -4)$ .
9.  $a_1 = (5; 3; 1), a_2 = (-1; 2; -3), a_3 = (3; -4; 2), b = (-9; 34; -20)$ .
10.  $a_1 = (3; 1; -3), a_2 = (-2; 4; 1), a_3 = (1; -2; 5), b = (1; 12; -20)$ .

**Задание 5.** По координатам точек  $A, B, C, D$  найдите:

- а) векторы  $a = AB, b = AC, c = AD$ ;
- б) модуль вектора  $a$ ;
- в) угол, образованный векторами  $a$  и  $b$  (используйте скалярное произведение векторов);
- г) площадь треугольника  $ABC$  и параллелограмма, построенного на векторах  $a$  и  $b$  (используйте векторное произведение векторов);
- д) объём пирамиды  $ABCD$  (используйте смешанное произведение векторов).

1.  $A(1; 3; 1), B(-1; 4; 6), C(-2; -3; 4), D(3; 4; -4)$ .
2.  $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6), D(8; 4; -9)$ .
3.  $A(2; -1; 2), B(1; 2; -1), C(3; 2; 1), D(-4; 2; 5)$ .
4.  $A(3; 4; 5), B(1; 2; 1), C(-2; 3; 6), D(3; -6; -3)$ .
5.  $A(1; 1; 2), B(-1; 1; 3), C(2; -2; 4), D(-1; 0; -2)$ .
6.  $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(7; 5; -3)$ .
7.  $A(1; 5; -7), B(-3; 6; 3), C(-2; 7; 3), D(-4; 8; -12)$ .

8.  $A(-3; 4; -7), B(1; 5; -4), C(-5; -2; 0), D(2; 5; 4)$ .
9.  $A(-1; 2; -3), B(4; -1; 0), C(2; 1; -2), D(3; 4; 5)$ .
10.  $A(4; -1; 3), B(-2; 1; 0), C(0; -5; 1), D(3; 2; -6)$ .

**Задание 6.** Дан треугольник  $ABC$  с вершинами  $A, B, C$ . Найдите:

- a) уравнение стороны  $AB$ ;
  - б) уравнение высоты  $CH$ ;
  - в) уравнение медианы  $AM$ ;
  - г) точку  $N$  пересечения медианы  $AM$  и высоты  $CH$ ;
  - д) уравнение прямой, проходящей через вершину  $C$  параллельно стороне  $AB$ ;
  - е) расстояние от точки  $C$  до прямой  $AB$ .
1.  $A(1; -1), B(2; 2), C(3; 1)$ .
  2.  $A(1; 1), B(2; 2), C(1; 3)$ .
  3.  $A(-1; -1), B(1; 1), C(2; 2)$ .
  4.  $A(1; -1), B(2; 1), C(-1; 3)$ .
  5.  $A(0; 5), B(12; 0), C(18; 8)$ .
  6.  $A(8; 0), B(-4; 2), C(-8; 2)$ .
  7.  $A(1; 5), B(13; 0), C(19; 8)$ .
  8.  $A(1; 6), B(-6; -4), C(-10; -1)$ .
  9.  $A(-1; 5), B(11; 0), C(17; 8)$ .
  10.  $A(6; 5), B(-6; 0), C(-10; 3)$ .

**Задание 7.** Приведите уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определите тип, параметры и расположение линии относительно старой и новой систем координат, выполните чертеж.

1.  $2x^2 + 3y^2 - 10x + 21y - 70 = 0$ ;
2.  $3x^2 - 2y^2 + 15x + 10y - 100 = 0$ ;
3.  $5x^2 + 15x - 2y + 7 = 0$ ;
4.  $4x^2 + 3y^2 + 20x - 15y - 25 = 0$ ;
5.  $2x^2 - 5y^2 - 18x - 10y - 50 = 0$ ;
6.  $3x^2 + 2y^2 - 9y + 14y - 100 = 0$ ;

7.  $2y^2 - 10y + 3x - 15 = 0$ ;  
 8.  $4x^2 - 20x + 3y - 5 = 0$ ;  
 9.  $2y^2 - 3x^2 + 10y + 6x - 10 = 0$ ;  
 10.  $4x^2 - 3y^2 + 4x + 9y - 25 = 0$ .

**Задание 8.** Найдите пределы функций (без правила Лопиталья):

1. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-x}{4x-5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{2x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x$ .
2. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+3}{5x^3+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{5x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$ .
3. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+x^3-2}{x^4-2x^2+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{8x+1}{8x}\right)^{2x}$ .
4. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x^2-6}{2x^3-x+3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{4+3x}-2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\operatorname{arctg} x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}}$ .
5. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4+5x-1}{5x^4-2x+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln x]$ .
6. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x^2+3x^4}{5x^4+6x+1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1)[\ln(x+2) - \ln x]$ .
7. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^5-3x^4+x}{x^5+3x^2+2}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-5)[\ln(x-1) - \ln x]$ .
8. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2-2x-1}{3x^2+4x+5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 1} (7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$ .
9. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^4-3x^2+x}{x^4+5}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \operatorname{tg} 2x}$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 2} (3x-5)^{\frac{1}{x^2-4}}$ .
10. а)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^5-4x^3+3}{x^5+2x^3-1}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ ; в)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 3x$ ; г)  $\lim_{x \rightarrow 3} (3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$ .

**Задание 9.** Найдите производные указанных функций.

1. а)  $y = \sqrt{2x-3} - \frac{4}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$ ; б)  $y = (e^{\sin x} + 1)^2$ ; в)  $y = \ln[\cos(x+1)]^2$ ; г)  $\operatorname{tg} \frac{y}{x} = 5x$ .
2. а)  $y = x \cdot \sqrt[3]{1-x}$ ; б)  $y = \frac{5 \cos x}{\sin^2 x}$ ; в)  $y = \operatorname{arctg}(e^{x^2})$ ; г)  $\operatorname{arctg} y - y + x^2 = 0$ .

3. а)  $y = x\sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$ ; б)  $y = \operatorname{tg}^2 2x$ ; в)  $y = \arccos\sqrt{1-x}$ ; г)  $y \cos x = \sin(x+y)$ .
4. а)  $y = \frac{1+x}{\sqrt{x^2-4x+2}}$ ; б)  $y = x \sin x - \cos x$ ; в)  $y = x^3 \ln x$ ; г)  $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .
5. а)  $y = \frac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$ ; б)  $y = \frac{\cos^2 x}{1+5\sin^2 x}$ ; в)  $y = \frac{x^2 \ln x}{x+2}$ ; г)  $(e^x + 1)(e^y - 1) + 1 = 0$ .
6. а)  $y = \frac{1}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt[5]{x^2+1}}$ ; б)  $y = 2\operatorname{ctg}^2(x^2+1)$ ; в)  $y = 2^{\operatorname{arctg}(x^4)}$ ; г)  $y^3 x = \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$ .
7. а)  $y = \sqrt{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$ ; б)  $y = \operatorname{tg}^2 x + \ln(\sin x)$ ; в)  $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ ; г)  $x^3 - y^3 + 3xy = 0$ .
8. а)  $y = 2 \cdot \sqrt[3]{6x^4 - x^3 + \frac{2}{x}}$ ; б)  $y = \ln \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$ ; в)  $y = \arcsin(\operatorname{tg}^2 x)$ ; г)  $x + y - a \cdot \cos y = 0$ .
9. а)  $y = 7 \cdot \sqrt[5]{x^3 - 2x + \frac{1}{x}}$ ; б)  $y = 3^x \cdot e^{-x^2}$ ; в)  $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; г)  $\ln(y+1) = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$ .
10. а)  $y = \sqrt{x^3 + 2x + 1} + \sqrt[3]{x^2 - 3}$ ; б)  $y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$ ; в)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3+x}{x-2}}$ ; г)  $y + e^y \operatorname{arctg} x = 0$ .

**Задание 10.** Даны: функция  $z=f(x;y)$ , точка  $A$  и вектор  $a$ .

Вычислите в точке  $A$ :

а)  $\operatorname{grad} z$ ;

б) производную функции  $z$  по направлению вектора  $a$ .

1.  $z = 3x^2 + 2xy + y^2$ ,  $A(1; 2)$ ,  $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ .

2.  $z = \frac{x+y}{x^2+y^2}$ ,  $A(1; 2)$ ,  $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$ .

3.  $z = 2x^4 + 8x^2y^3$ ,  $A(2; -1)$ ,  $\bar{a} = \bar{i} - 3\bar{j}$ .

4.  $z = 2x^2 + 3xy + 4y^2$ ,  $A(2; -2)$ ,  $\bar{a} = \bar{i} + 3\bar{j}$ .

5.  $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ ,  $A(-1; 1)$ ,  $\bar{a} = -\bar{i} - \bar{j}$ .

6.  $z = \arcsin \frac{x}{x+y}$ ,  $A(5; 5)$ ,  $\bar{a} = -12\bar{i} + 5\bar{j}$ .

7.  $z = 2x^3y + 3x^2y^2$ ,  $A(1; -2)$ ,  $\bar{a} = 6\bar{i} - 8\bar{j}$ .

8.  $z = \ln(5x + 3y)$ ,  $A(2; 2)$ ,  $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j}$ .

9.  $z = \operatorname{arctg}(x^2y^2)$ ,  $A(1; -1)$ ,  $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$ .

10.  $z = x^2 + 3xy^2$ ,  $A(1; 3)$ ,  $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$ .