Тема 1: КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ОПЕРАЦИИ С НИМИ

1.1^0. Исходные положения. Алгебраическая форма комплексного числа

Множество действительных чисел R является недостаточным для решения многих прикладных задач, важных для инженерных приложений. Поэтому вводят множество комплексных чисел C за счет расширения множества действительных чисел $\left(R \subset C\right)$.

На теории комплексных чисел в значительной степени базируются методы теоретической электротехники, гидродинамики и газовой динамики, теории упругости и пластичности. В частности, при расчетах сложных электрических цепей при синусоидальном воздействии наиболее удобным является метод комплексных амплитуд.

Определение: Полагаем $\sqrt{-1} = i$. Это число i называется *мнимой единицей*.

Из определения очевидно, что $i^2 = -1$.

Определение: Число $z = a + ib$, где a, b – действительные числа, называется *комплексным числом*. При этом действительное число a называется *действительной частью* числа $z = a + ib$ и обозначается $a = \operatorname{Re} z$; действительное число b называется *мнимой частью* числа $z = a + ib$ и обозначается $b = \operatorname{Im} z$.

Запись комплексного числа виде $z = a + ib$ называют *алгебраической формой* комплексного числа.

При $a = 0$ комплексные числа называются *мнимыми*.

Определение: Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ считаются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексное число $z = a + ib$ равно нулю, если $a = b = 0$.

Комплексные числа z_1 и z_2 называются противоположными, если $z_1 = -z_2$.

Определение: Комплексное число $\overline{z} = a - ib$ называется числом, *комплексно сопряженным* с числом $z = a + ib$.

Сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел $z_1 = a + ib$ и $z_2 = c + id$ определяются следующими правилами:

$$z_1 + z_2 = (a + \tilde{n}) + i(b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a - \tilde{n}) + i(b - d)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+ib)\cdot(\tilde{n}+id) = ac + ibc + iad + i^2 bd = (ac-bd) + i(ad+bc),$$
т.е. при сложении, вычитании и умножении скобки раскрываются по обычным правилам, учитывается условие $i^2 = -1$ и приводятся подобные.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2} =$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

При делении необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, комплексно сопряженное к знаменателю, раскрыть скобки и привести подобные.

Пример. Если $z_1 = 2 + 5i$, $z_2 = 4 + 3i$, то

$z_1 + z_2 = (2 + 4) + i(5 + 3) = 6 + 8i$,

$z_1 - z_2 = (2 - 4) + i(5 - 3) = -2 + 2i$,

$z_1 \cdot z_2 = (2 + 5i) \cdot (4 + 3i) = 8 + 20i + 6i + 15i^2 = -7 + 26i$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+5i}{4+3i} = \frac{(2+5i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{8+20i-6i-15i^2}{25} = \frac{23+14i}{25} =$$
$$= \frac{23}{25} + \frac{14}{25}i.$$

1.1.1^0. Решение алгебраических уравнений с использованием комплексных чисел

Алгебраическое уравнение вида $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ с комплексными (в частности – с действительными) коэффициентами любой целой степени n всегда имеет n комплексных корней (среди которых могут быть и одинаковые).

Если в уравнении $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ все коэффициенты действительные и уравнение имеет корень $x_0 = a + ib$ при $b \neq 0$, то комплексно сопряженное число $x_0 = a - ib$ также является корнем этого уравнения.

Полное квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, где $D = b^2 - 4ac$ – дискриминант; x_1, x_2 – корни квадратного уравнения.

Квадратное уравнение всегда имеет два корня. Если коэффициенты a, b, c – действительные числа, то:

1) при $D>0$ корни x_1, x_2 – различные действительные числа;

2) при $D=0$ корни x_1, x_2 – равные действительные числа;

3) при $D<0$ уравнение не имеет действительных корней. Корни такого уравнения – сопряженные комплексные числа.

В высшей математике обычно используют приведенное квадратное уравнение вида $x^2+px+q=0$. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ легко приводится к виду $x^2+px+q=0$:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0.$$

Если корни x_1, x_2 уравнения $x^2+px+q=0$ известны, то $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

Для проверки правильности нахождения корней используют формулы Виета: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$; $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$ или $x_1+x_2=-p$; $x_1x_2=q$.

П р и м е р 1. Решить уравнение $x^2-4x+13=0$.

П е р в ы й с п о с о б:

$$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 13}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{-36}}{2}=\frac{4\pm 6i}{2}=2\pm 3i;$$

В т о р о й с п о с о б (способ выделения полного квадрата):

В этом способе постоянный коэффициент разделяют на два слагаемых $(13=4+3)$ таким образом, чтобы одно из слагаемых и члены, содержащие x и x^2, образовывали полный квадрат $x^2-4x+4=(x-2)^2$. После выделения полного квадрата уравнение можно представить в виде $x^2-4x+13=x^2-4x+4+9=$ $=(x-2)^2+9=0$; $\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{-9}\Rightarrow x-2=\pm 3i\Rightarrow x_{1,2}=2\pm 3i$.

П р и м е р 2. Решить уравнение $x^2-(1+2i)x+i-1=0$

$$x_{1,2}=\frac{1+2i\pm\sqrt{(1+2i)^2-4\cdot(i-1)}}{2}=\frac{1+2i\pm 1}{2}.\ \ x_1=i;\ \ x_2=1+i.$$

Любой многочлен второй степени можно представить в виде произведения двух многочленов первой степени.

Так, в примере 1:

$x^2-4x+13=(x-(2-3i))\cdot(x-(2+3i))$, а в примере 2:

$x^2-(1+2i)x+i-1=(x-i)\cdot(x-(i-1))$.

В дальнейшем удобно будет считать, что многочлен степени *n* имеет ровно *n* комплексных корней (среди которых могут быть и одинаковые).

Определение: если уравнение имеет *k* одинаковых корней x_0, то говорят, что корень x_0 имеет кратность *k*.

Пример 3. Найти все корни многочлена $x^5-6x^4+9x^3=0$.

Решение:

$x^5-6x^4+9x^3=x^3(x^2-6x+9)=x\cdot x\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-3)$.

Выражение $x\cdot x\cdot x\cdot(x-3)\cdot(x-3)$ равно 0 тогда, когда равен нулю хотя бы один из сомножителей, т.е. $x=0$ или $x=0$ или $x=0$ или $x-3=0$ или $x-3=0$. Значит, уравнение имеет 5 корней: $x_1=x_2=x_3=0$, $x_4=x_5=3$.

Задачи к разделу 1.1^0

1.1.1. Для данных комплексных чисел найти сумму, обе разности, произведение и оба частных:

а) $z_1=3$, $z_2=-i$; б) $z_1=3i$, $z_2=5-12i$;

в) $z_1=3+4i$, $z_2=3-4i$; г) $z_1=2+7i$, $z_2=4-14i$;

д) $z_1=3+4i$, $z_2=5-12i$; е) $z_1=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

1.1.2. Даны комплексные числа $z_1=3+4i$, $z_2=5-12i$.

Найти:

а) $3iz_1+\left(2+3i\right)z_2$; б) $2z_1^2-3z_1z_2+4z_2^2$; в) $\dfrac{z_1-2z_2}{z_2+3z_1}$;

г) $\dfrac{\overline{z}_1-2iz_2}{\overline{z}_2+3z_1}$; д) $\dfrac{\left(z_1-\overline{z}_2\right)\left(\overline{z}_1-z_2\right)}{\left(z_1+\overline{z}_2\right)\left(\overline{z}_1+z_2\right)}$.

1.1.3. Найти действительные числа x,y из комплексного уравнения $\left(3+4i\right)x+\left(5-12i\right)y=i+3$.

1.1.4. Решить квадратные уравнения:

а) $z^2-4z+5=0$; б) $z^2+z+1=0$; в) $z^2+\left(2-i\right)z-2i=0$.

1.1.5. В предположении, что количество корней уравнения совпадает с его степенью (корни могут быть кратными), найти все корни уравнений:

а) $x^2+16=0$; б) $x^2+4x+5=0$;

в) $x^2 - \dfrac{3+3i}{\sqrt{2}}x + 2i = 0$; г) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$;

д) $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$; е) $x^9 + 8x^7 + 16x^5 = 0$.

1.2^0. Геометрическое представление комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексного числа

В математике и технических науках используют два вида представлений комплексных чисел в геометрической форме на комплексной плоскости:

1) точечное представление комплексного числа;

2) векторное представление комплексного числа.

Определение:

Комплексной называют плоскость, между множеством всех точек которой и множеством комплексных чисел существует взаимно однозначное соответствие.

На комплексной плоскости вводится специальная прямоугольная система координат, содержащая действительную и мнимую оси (рис. 5).

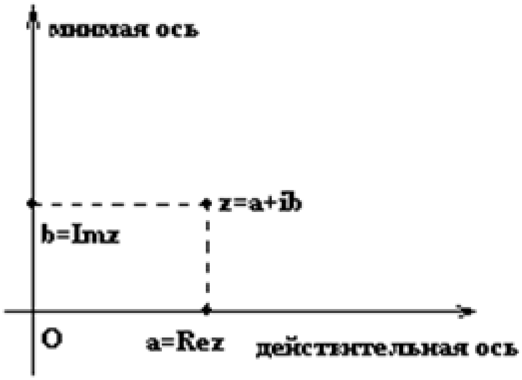


Рис. 5. Комплексная

При векторном представлении комплексного числа положение точки $M(a, b)$, соответствующей комплексному числу $z = a + ib$, на комплексной плоскости задается радиус-вектором.

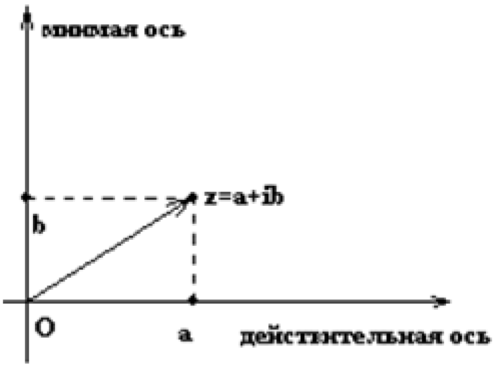


Рис. 6. Векторное представление комплексного числа

Каждому радиус-вектору $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ на комплексной плоскости соответствует ровно одно комплексное число (взаимно однозначное соответствие, рис. 6).

Модуль (длина) радиус-векто-ра $\vec{r}$ называется модулем комплексного числа $|\vec{r}| = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Положение радиус-вектора $\vec{r}$ относительно действительной оси определяется углом φ с положительным направлением отсчета против часовой стрелки.

Из определений сложения векторов и сложения комплексных чисел следует, что сложение комплексных чисел можно производить геометрически как сложение соответствующих им векторов (рис. 7).

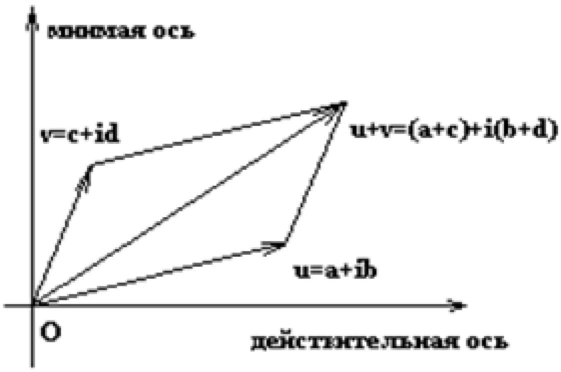


Рис. 7. Геометрическое
комплексных чи

Алгебраическое и векторное представление комплексного числа позволяет перейти к тригонометрической форме этого числа.

Из рисунка следует, что $a = \,= r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, откуда получаем:
$z = a + ib = r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)$.

Угол φ называется *аргументом* комплексного числа.

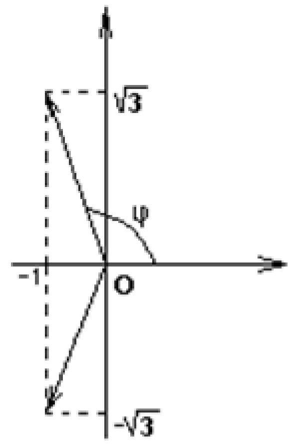
Комплексное число в тригонометрической форме в общем случае имеет бесконечное число аргументов, которые отличаются друг от друга на целое число оборотов ($2\pi n$, где n – число полных оборотов радиус-вектора вокруг начала координат). Чтобы значение аргумента было однозначным, выделяют *главное значение* аргумента $-\pi < \arg z \le \pi$ или $0 \le \arg z < 2\pi$. Таким образом, в общем случае

$$z = a + ib = |z|\left(\cos\left(\varphi + 2\pi n\right) + i\sin\left(\varphi + 2\pi n\right)\right).$$

При использовании главного значения аргумента получим

$$z = a + ib = |z|\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right).$$

П р и м е р 1. Сопряженные комплексные числа $z=-1+i\sqrt{3}$ и $\overline{z}=-1-i\sqrt{3}$ изобразить на комплексной плоскости и представить в тригонометрической форме, используя главные значения аргумента.



Решение: Модуль комплексного числа $|z|=|\overline{z}|=\sqrt{(-1)^2+\left(\pm\sqrt{3}\right)^2}=2$. Для числа z имеем: $\cos\varphi=\dfrac{-1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Поскольку синус положителен, а косинус отрицателен, радиус-вектор числа z расположен во втором координатном углу (втором квадранте координатной плоскости). Таким образом, получаем: $z=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$. Для числа $\overline{z}=-1-i\sqrt{3}$ имеем: $\cos\varphi=\dfrac{-1}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$ и $z=2\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$. Если считать, что $0\le\arg z<2\pi$, то задача решена. Если же $-\pi<\arg z\le\pi$, то угол $\dfrac{4\pi}{3}$ не является главным значением аргумента. В этом случае (см. рис. 8) $z=2\left(\cos\left(\dfrac{-2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$.

Таким образом, сопряженные комплексные числа в тригонометрической форме имеют одинаковые модули, а их аргументы различаются только знаками.

Если главные значения аргумента не соответствуют углам, для которых числовые значения тригонометрических функций известны из школьной математики, то используют тригонометрические таблицы или выражают аргумент через обратные тригонометрические функции $(\arcsin,\arccos,\mathrm{arctg})$.

П р и м е р 2. Представить комплексное число $z=-5+12i$ в тригонометрической форме, используя главное значение аргумента. Изобразить комплексное число на комплексной плоскости.

Решение: $|z|=\sqrt{(-5)^2+12^2}=13$. Поскольку $\cos\varphi=\dfrac{-5}{13}$, $\sin\varphi=\dfrac{12}{13}$, то радиус-вектор числа расположен во втором квадранте.

Арксинус использовать напрямую нельзя, так как по определению $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Поскольку $\arccos x \in [0; \pi]$, то $\varphi = \arccos\left(-\frac{5}{12}\right) \approx 0,64\pi$.

$$z \approx 13\left(\cos 0,64\pi + i\sin 0,64\pi\right).$$

1.2.1⁰. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме. Возведение в целую степень

Складывать и вычитать комплексные числа удобнее в алгебраической форме, умножать и делить – в тригонометрической.

Пусть $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= \rho_1\rho_2((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) =$$
$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_2\cos\varphi_1))}{\rho_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} =$$
$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Значит, при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Замечание: Из вышесказанного следует, что для любых комплексных чисел z_1, z_2 имеют место равенства $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ и $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Пусть $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, тогда, поскольку при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$z^2 = \rho^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi);$$
$$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi);$$

$$z^4 = z^3 \cdot z = \rho^4(\cos 4\varphi + i \sin 4\varphi) \text{ и т.д.}$$

Кроме того,

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{\cos\varphi - i\sin\varphi}{\rho} = \rho^{-1}(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi));$$

$$z^{-2} = \left(z^{-1}\right)^2 = \rho^{-2}(\cos(-2\varphi) + i\sin(-2\varphi)) \text{ и т. д.}$$

Таким образом, имеет место формула Муавра:

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \text{ при } n \in Z.$$

П р и м е р. Найти z^4, если $z = -1 + i$.

Решение: Поскольку $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$, то

$$z^4 = \left(\sqrt{2}\right)^4\left(\cos\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right) = 4(-1 + 0\cdot i) = -4.$$

1.2.2^0. Извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме

О п р е д е л е н и е: *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.

Очевидно, что если $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то число $w_0 = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$, где под выражением $\sqrt[n]{\rho}$ подразумевается арифметический корень степени n из действительного числа, является корнем степени n из числа z.

Кроме того, при любом целом значении числа k комплексное число $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ также является корнем степени n из числа z.

Действительно:

$$w_k^n = \rho\left(\cos\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(n\cdot\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right) =$$

$$= \rho(\cos(\varphi + 2\pi k) + i\sin(\varphi + 2\pi k)) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = z.$$

Среди чисел $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ различными являются только n чисел. Эти числа получаются, если числу k последовательно придавать значения k = 0, 1, 2, …, $n - 1$.

Если представить эти корни в виде точек на комплексной плоскости, то эти точки будут лежать на окружности радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в начале координат. При этом указанные точки будут делить окружность на n равных частей.

П р и м е р 1. Найти $\sqrt[3]{i}$. Представить найденные корни в алгебраической форме.

Решение: Найдем геометрическую форму числа *i*.

Модуль числа равен 1, аргумент равен $\frac{\pi}{2}$, поэтому $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

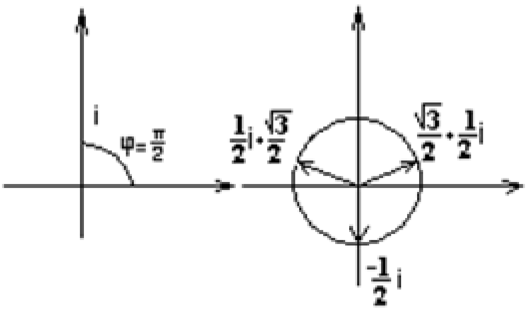


Рис. 9. Пример 1

Поскольку извлекается корень третьей степени ($n = 3$), в формуле $w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$ надо будет брать три значения: $k = 0,\ k = 1,\ k = 2$.

При $k = 0$:

$$w_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 0}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}.$$

При $k = 1$: $w_1 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$.

При $k = 2$: $w_0 = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 4\pi}{3} = -i\frac{1}{2}$.

С помощью операции извлечения корня можно решать алгебраические уравнения вида $aw^n + b = 0$, где a, b – действительные или комплексные числа.

П р и м е р 2. Найти $\sqrt{z}$ при $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$.

Решение: Найдем сначала геометрическую форму комплексного числа $z = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$: $\rho = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}} = 1.$

$\cos\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\varphi = \dfrac{1}{2}$, значит, $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Следовательно, $z = 1 \cdot \left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. $\sqrt{z} = \sqrt{\rho}\left(\cos\dfrac{\varphi + 2\pi k}{2} + i\sin\dfrac{\varphi + 2\pi k}{2}\right)$, $k = 0, 1$.

При $k = 0$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

При $k = 1$:

$$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \cos\frac{13\pi}{12} + i\sin\frac{13\pi}{12} = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - i\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Замечание 1. Если комплексные числа, являющиеся корнями степени n из 1, отметить на комплексной плоскости, то они будут являться вершинами правильного n-угольника с центром в начале координат.

Замечание 2. Для любого комплексного числа c уравнение $x^n = c$ имеет ровно n различных комплексных корней.

Тема2: Пределы функций одной действительной переменной

2.1 Исходные положения

Числовая функция одной действительной переменной величины, как правило, в инженерных задачах является функцией с непрерывным аргументом. Она характеризует соответствие между элементами двух числовых множеств, являющихся подмножествами множества действительных чисел, и обозначается в общем случае $y = f(x)$, где $x \in D$, $D \subseteq R$; $y \in E$, $E \subseteq R$, D - область существования (определения) функции; E - область значений функции.

Взаимно однозначное соответствие обеспечивается при определенных условиях, которые называются условиями однозначности. Эти условия задаются в виде формул, условных обозначений или словесных описаний.

Область существования функции одной действительной переменной, как правило, представляется:

- неограниченным интервалом, если все значения переменной x удовлетворяют неравенству $-\infty < x < \infty$;
- полуограниченным интервалом $(-\infty,\ a)$ или $(b,\ \infty)$, где $a, b \in R$;
- ограниченным интервалом $(a,\ b)$, где $a, b \in R$;
- полуограниченным отрезком $(-\infty,\ a]$ или $[b,\ \infty)$; где $a, b \in R$;
- полуинтервалом $(a,\ b]$ или $[a,\ b)$; где $a, b \in R$;
- отрезком $[a,\ b]$, где $a, b \in R$;

Также областью существования могут быть объединения интервалов, полуинтервалов и отрезков, например $[a,\ b) \cup (c,\ d]$, $(-\infty,\ a) \cup [b,\ c] \cup (d,\ e)$ и т.п.

Если область существования не указана в явном виде, то по умолчанию такой областью считают множество всех числовых значений аргумента, при которых функция имеет смысл на множестве действительных чисел. Такая область существования называется *естественной.*

Пример. $y = \ln(x-1)$.

Логарифм определен только при положительных значениях аргумента, поэтому естественная область существования является решением неравенства $x - 1 > 0$, т.е. $D = \{x \mid x > 1\}$.

Замечание: если функция определена не во всей естественной области ее существования, то эту «меньшую» область обязательно указывают в явном виде и обычно называют областью определения.

В математическом анализе функции задаются преимущественно аналитическими выражениями (формулами), хотя возможны и другие способы задания:

1. Табличный способ. Этот способ применяется, как правило, в том случае, когда область определения X состоит из конечного количества чисел: $x_1, x_2, ..., x_n$. В этом случае в первой строке таблицы записывают все возможные значения переменной $x \in X$, а во второй строке – соответствующие им значения функции: $y_1, y_2, ..., y_n$:

x	x_1	x_2	.....	x_n
y	y_1	y_2	.....	y_n

2. Графический способ. Этот способ применяется для наглядного рассмотрения зависимости функции от значений ее независимой переменной x

3. Описательный способ. Этот способ состоит в задании функции с помощью некоторого текста и применяется, как правило, в тех случаях, когда аналитическое задание невозможно или менее наглядно, чем описательное.

Примеры. 1) Функция $y=[x]$ - «целая часть х» задается следующим образом: если $x=n+r$, где n - целое число и $0\le r<1$, то $[x]=n$.

2) Функция $y=\{x\}$ - «дробная часть х» задается следующим образом: если $x=n+r$, где n - целое число и $0\le r<1$, то $\{x\}=r$.

3) Функция $y=\chi(x)$ (функция Дирихле) равна 1, если число х – рациональное и равна 0 в противном случае.

4) Функция $y=\pi(x)$ означает число простых натуральных чисел, не превышающих числа x.

4. Аналитический способ. Наиболее распространенный способ задания функций, предполагающий, что переменные x и y связаны какой-либо формулой (или формулами).

Примеры.

а) *Явное аналитическое задание функции.*

$y=x^2$, $y=\cos x$, $y=2^x$, $y=arctg\dfrac{x+1}{x-1}$, $y=\sqrt{x^2-6x+8}$ и т.п.

$|x|=\begin{cases}-x, & если\ \ x<0\\ x, & если\ \ x\ge 0\end{cases}$ (модуль x), $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}-1, & если\ \ x<0\\ 0, & если\ \ x=0\\ 1, & если\ \ x>0\end{cases}$ (сигнум x) и т.п.

Явное аналитическое задание может осуществляться и в полярной системе координат:

$$\rho=a\varphi,\quad \rho=2a(1+\cos\varphi),\quad \rho=a\sqrt{2\cos 2\varphi},\quad \rho=\frac{p}{1-e\cos\varphi}$$

б) *Неявное задание функции*

$(x-2)^2+(y-5)^2=4$, $\left(x^2+y^2\right)^2=2a^2\left(x^2-y^2\right)$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ и т.п.

в) Параметрическое задание функции.

Если линия задана параметрически и является графиком некоторой функции, то можно говорить о том, что данная функция задана параметрически.

Например, $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$.

Может оказаться, что параметрические уравнения линии задают не одну, а несколько функций. В этом случае также говорят о параметрическом задании функции: $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}$ и т.п.

Примеры. 1. $y=kx+b$

В аналитической геометрии это уравнение прямой на плоскости, в математическом анализе – уравнение линейной функциональной зависимости в явной форме;

2. $Ax + By + C = 0$ - то же в неявной форме (при условии $B \neq 0$);

3. $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + pt \end{cases}$ - то же в параметрической форме;

По аналитическому выражению, как правило, можно построить график функции.

Определение: графиком функции называется множество таких точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют аналитическому выражению функции и *условию однозначности*.

Согласно *условию однозначности* в геометрической форме, любая прямая, параллельная оси Oy, должна пересекать график функции не более чем в одной точке.

Функция $y = f(x)$ называется *взаимно однозначной*, если разным значениям аргумента соответствуют разные значения функции: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Многие важные для приложений функциональные зависимости не удовлетворяют условиям однозначности и их называют *многозначными* функциями. В математическом анализе такие функции разбивают, если это возможно, на несколько однозначных функций.

Пример. Окружность, задаваемая уравнением $x^2 + y^2 = 1$, не является графиком функции, но ее верхняя и нижняя половины таковыми являются и, таким образом, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задает неявно две различные непрерывные функции. Этот факт можно было установить и аналитически, выразив из данного уравнения у: $y = \sqrt{1 - x^2}$ или $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Замечание: В классическом математическом анализе функции по умолчанию считаются однозначными. Многозначность функции, как правило, оговаривается особо.

2.2 Элементарные и неэлементарные функции. Способы составления функций

В математике и ее приложениях важную роль играют элементарные функции, которые можно разделить на:

- основные (простейшие) элементарные функции;

- составные элементарные функции;

- сложные элементарные функции;

Основными (простейшими) элементарными функциями называют следующие функции, которые нельзя разложить на конечное число других более простых функций:

- постоянная функция $y = C,\ C = const$;

- линейная функция $y = x$;

- степенная функция $y = x^b$, при $b \in R$;

- показательная функция $y = a^x$ при $a > 0,\ a \neq 1$;

- логарифмическая функция $y = \log_a x$ при $a > 0,\ a \neq 1$;

- тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$. Тригонометрические функции являются периодическими. В математике по умолчанию рассматривают значения функций, соответствующие наименьшему (главному) периоду: $y = \sin x$ при $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $y = \cos x$ при $x \in [0;\ \pi]$, $y = tgx$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, $y = ctgx$ при $x \in (0;\ \pi)$;

- обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$ при $x \in [-1;\ 1]$, $y = \arccos x$ при $x \in [-1;\ 1]$, $y = arctgx$ при $x \in (-\infty;\ \infty)$, $y = arcctgx$ при $x \in (-\infty;\ \infty)$. В общем случае обратные тригонометрические функции являются многозначными. В указанных выше областях определения тригонометрических функций (являющихся областями значений для обратных тригонометрических функций) выполняются условия однозначности.

Графики основных элементарных функций представлены в Приложении 1.

Из основных элементарных функций образуют другие элементарные функции (составные и сложные).

Составные элементарные функции образуются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций и могут быть представлены одной аналитической формулой в области существования функции.

Пример. $y = \frac{2\ln x}{\sqrt[3]{x^2}} + 6$ - элементарная функция, составленная из основных элементарных функций с помощью арифметических операций.

Вторым важным способом составления элементарных функций является композиция (суперпозиция) элементарных функций. В результате образуется сложная элементарная функция.

Определение: Если аргументом элементарной функции является тоже элементарная функция, то такая функция от функции называется *сложной.*

Сложную функцию можно разложить на основные элементарные функции с промежуточными аргументами.

Пример. $y = \sin^2 \sqrt{x} = \left[u = \sqrt{x},\ v = \sin u,\ y = v^2\right];\ y = v^2 \Rightarrow y = (\sin u)^2 = \sin^2 u \Rightarrow y = \sin^2 \sqrt{x}$.

u и v - промежуточные аргументы, x - основной аргумент, функции $v = v(u),\ y = y(v)$ - основные элементарные функции промежуточных аргументов.

При составлении сложной функции важен порядок следования функций в их композиции.

Пример. если $f(x)=x^3$, а $g(x)=\sin x$, то $g(f(x))=\sin x^3$, а $f(g(x))=\sin^3 x$. Получили принципиально различные по свойствам функции. В частности, первая из этих функций не является периодической, а вторая является.

Замечание: при составлении элементарных функций можно одновременно использовать операцию композиции и арифметические операции.

Примеры. $y_1=\sin\left(3x+\frac{\pi}{7}\right)$, $y_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}$;

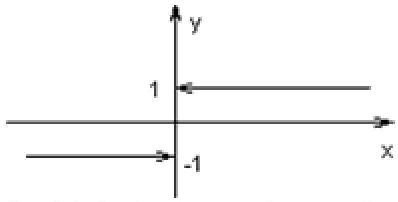


Рис.6.1. График функции "сигнум x"

Если функцию нельзя представить в виде одного аналитического выражения (формулы), содержащего элементарные функции, объединенные конечным числом арифметических операций и (или) посредством композиции, то такую функцию называют неэлементарной.

Примеры. Простейшие неэлементарные функции

1. $y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1 & при \;\; x<0\\ 0 & при \;\; x=0\\ 1 & при \;\; x>0\end{cases}$ (читается «сигнум икс», рис.6.1)

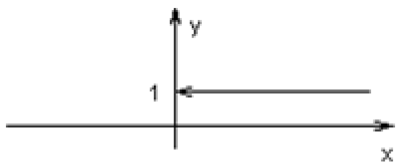


Рис.6.2. График функции Хевисайда

2. Единичная функция Хэвисайда $y=\eta(x)=\begin{cases}0 & при \;\; x<0\\ 1 & при \;\; x>0\end{cases}$ (рис.6.2.);

С помощью арифметических операций из простейших неэлементарных функций образуют составные неэлементарные функции.

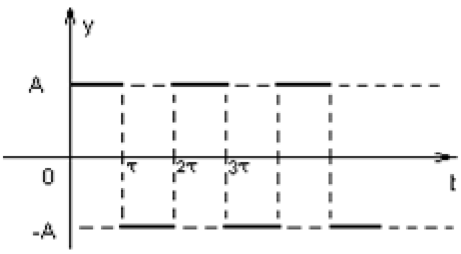


Рис.6.3. Периодический прямоугольный импульс

Пример: периодически повторяющийся прямоугольный импульс

$y=A(\eta(t)-2\eta(t-\tau)+2\eta(t-2\tau)-\ldots)$. (рис.6.3.)

В настоящее время неэлементарные функции широко используются в теории автоматического управления, радиоэлектронике и вычислительной технике.

2.3 **Пределы функций в точке и на бесконечности**

Для функций одной действительной переменной вводят два вида пределов:

-предел функции на бесконечности (или на «минус бесконечности»);

- предел функции в точке;

Пусть дана функция $y=f(x)$ и $x\in(-\infty,\infty)$ или $x\in(a,\infty)$.

Определение: Число A называется пределом функции $y=f(x)$ на бесконечности, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ найдется такое значение аргумента $x(\varepsilon)$, после которого при всех значениях аргумента $x > x(\varepsilon)$ значения функции будут находиться внутри интервала $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$.

Условие попадания в интервал $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$ равносильно неравенству

$$|f(x)-A| < \varepsilon\ ;$$

Символьная запись предела функции на бесконечности имеет вид $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ или $f(x)\to A$ при $x\to\infty$.

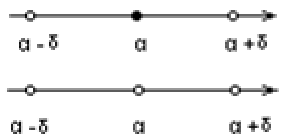


Рис.6.4. Полная и проколотая окрестности точки

При введении понятия предела функции в точке используют понятия δ - *окрестности* точки (числа) и *предельной точки* (числа).

Определение: любой интервал числовой оси, содержащий точку $x = a$, называется окрестностью этой точки. Интервал $(a-\delta,\ a+\delta)$ называется δ-окрестностью точки $x = a$. Множество $(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\varepsilon)$ называется *проколотой* δ *-окрестностью* точки $x = a$. Если предельная точка $x = a$ принадлежит своей δ - окрестности, то эту окрестность называют *полной*.

Условные графические изображения δ-окрестностей показаны на рис. 6.4.

Определение: точка a называется предельной точкой числового множества M, если в любой как угодно малой окрестности точки a содержатся числа из множества M.

Пример: Пусть множество M является интервалом $(\alpha,\ \beta)$ на числовой оси. Предельными точками этого множества являются все точки интервала $(\alpha,\ \beta)$, а также концы этого интервала α и β. Других предельных точек у множества M нет.

Определение: Число A называется *пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого, как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что для любого $x\in(a-\delta,\ a)\cup(a,\ a+\varepsilon)$ все значения функции $f(x)$ будут находиться внутри интервала $(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon)$.

Символьная запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

Замечание 1: из определения предела функции в точке следует, что функция должна быть определена в некоторой проколотой δ -окрестности предельной точки $x = a$, но не обязательно в самой точке.

Замечание 2: в данном разделе использована геометрическая интерпретация действительных чисел в виде точек на числовой оси. Если рассматривается некоторое множество действительных чисел E, то при геометрической интерпретации различают:

- *внутренние* точки множества E, если они входят вместе с некоторой окрестностью в это множество;

- граничные точки множества E, для каждой из которых ее окрестность содержит точки, принадлежащие и не принадлежащие множеству E.

При этом граничные точки могут принадлежать и не принадлежать множеству E. Например, граничные точки отрезка $[\alpha,\ \beta]$ принадлежат этому отрезку, а граничные точки интервала $(\alpha\ \ \beta)$ не принадлежат этому интервалу.

Задачи к разделу 6.3

6.3.1. Попробуйте сформулировать определение предела функции $y = f(x)$ на минус бесконечности и дать его геометрическую интерпретацию;

6.3.2. Найти все предельные точки множеств: а) $(a,\ b) \cup (b,\ c)$; б) $\{a; b\}$;

6.3.3. Проведите аналогию между пределом последовательности и пределом функции на бесконечности и попробуйте вычислить следующие пределы: а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-1}{2-5x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^x$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$;

6.3.4. Дать определение того, что число A не является пределом функции $y = f(x)$:

а) при $x \to a$; б) при $x \to \infty$;

6.3.5. Дать определение того, что никакое число не является пределом функции $y = f(x)$:

а) при $x \to a$; б) при $x \to \infty$;

2.4 Основные свойства пределов функций в точке и на бесконечности

Основные свойства пределов функций с непрерывным аргументом совпадают с аналогичными свойствами числовых последовательностей.

1. Если предел функции существует, то он – единственный.
2. Предел постоянной величины равен этой постоянной: $\lim\limits_{x\to a} C = C$ $\left(\lim\limits_{x\to a} C = C\right)$;

3. Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$; б) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)g(x)) = AB$; в) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, если $B \neq 0$;

г) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x) = CA$;

д) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[k]{f(x)} = \sqrt[k]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[k]{A}$, если $\sqrt[k]{A}$ имеет смысл во множестве действительных чисел;

е) $\lim\limits_{x\to a}(f(x))^k = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^k = A^k$, если A^k имеет смысл во множестве действительных чисел;

ж) $\lim\limits_{x\to a}\ln f(x) = \ln\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ln A$, если $\ln A$ имеет смысл во множестве действительных чисел;

з) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = A^B$, если A^B имеет смысл во множестве действительных чисел.

Эти равенства остаются верными, если вместо пределов при $x \to a$ рассматривать пределы при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$;

2.5 **Вычисление пределов функций одной действительной переменной. Раскрытие неопределенностей**

Вычисление пределов начинают с подстановки предельных значений аргумента $x = a$ или $x = \pm\infty$ в функцию под знаком предела. После этого производят алгебраические операции по упрощению функциональных зависимостей и получению конечного результата в виде

$$\lim_{x\to a(\infty)} = \begin{cases} \pm A - \textit{ конечное ненулевое число} \\ 0 \\ \pm\infty \end{cases};$$

При условных операциях с нулями и бесконечностями под нулями понимают б.м.ф., под бесконечностями – б.б.ф. (подробности см. в 5.5^0).

Если при условных операциях с нулями и бесконечностями получена неопределенность общего вида, то функцию под знаком предела преобразуют так, чтобы получить одну из основных неопределенностей: $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^0, 1^∞.

Для раскрытия основных неопределенностей используют следующие правила:

Правило 1.

При вычислении пределов функции на бесконечности с неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$ используют те же приемы, что и при вычислении пределов последовательностей:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=...=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^m\varphi_1(x)}{x^n\varphi_2(x)}=\lim_{x\to\infty}x^{m-n}\,\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}=\begin{cases}A - \textit{конечное число при } m=n\\ 0 \ \textit{при } m<n\\ \pm\infty \ \textit{при } m>n\end{cases},$$

где $f_1(x), f_2(x)$ - многочлены или иррациональные функции, из которых можно вынести множители x^m и x^n, где $m,\ n$ - наибольшие степени в функциях $f_1(x), f_2(x)$.

В функциях $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ выделяют б.м.ф., пределы которых при $x\to\infty$ равны нулю.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}=\left[\frac{\infty\left(5\infty-3+\frac{1}{\infty}\right)}{\infty\left(3\infty+1-\frac{5}{\infty}\right)}=\frac{\infty\cdot\infty}{\infty\cdot\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{5-0+0}{3+0-0}=\frac{5}{3};$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x+4}{3x^2-5x+1}=\left[\frac{7(-\infty)+4}{(-\infty)^3-5(-\infty)+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(7+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(3-\frac{5}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{7}{3x^2}=0;$$

Правило 2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\left[\frac{0}{0}\right];$

При вычислении предела в точке $a\neq\pm\infty$ правило 1 не применимо.

В этом случае в числителе и знаменателе необходимо выделить множители $(x-a)$ и сократить. После этого неопределенность, как правило, раскрывается.

Пример. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^3-64}{7x^2-27x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{(x-4)(7x+1)}=\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2+4x+16}{7x+1}=\frac{48}{29};$

При выделении двучленов вида $(x\pm a)$ в общем случае используют деление полиномов уголком. В частных случаях применяют формулы, известные из школьного курса математики, например,

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a),\ x^3-a^3=(x-a)(x^2+xa+a^2),\ x^3+a^3=(x+a)(x^2-xa+a^2);$$

Правило 3. Производим перевод иррациональностей из числителя в знаменатель и, наоборот, за счет умножения на сопряженную иррациональность

Пример. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{\left(x^3-8\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x+1-9}{\left(x^3-8\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{(x-2)\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4}{\left(x^2+2x+4\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\frac{4}{72}=\frac{1}{18};$$

Правило 3 позволяет во многих случаях раскрывать неопределенность вида $[\infty-\infty]$.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-x+1}\right)}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+\sqrt{x^2-x+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{1}{1+\sqrt{1}}=\frac{1}{2};$$

Правило 4. Если функции в пределе $\lim\limits_{x\to a(\infty)}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ содержат иррациональные выражения различных степеней, затрудняющие или не позволяющие использовать правила 1-3 непосредственно, то предварительно производят замену переменной, позволяющую избавиться от корней. В результате приходят к отношению полиномов и используют правило 1 или 2.

Пример. $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}-}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left[НОК[2,4]=4,\ x=t^4\right]=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{3-t}{9-t^2}=\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{1}{3+t}=\dfrac{1}{6};$

Замечание: НОК – наименьшее общее кратное.

Правило 5. При вычислении предела показательно-степенной функции $\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x)^{\varphi(x)}$, если имеем неопределенность общего вида, то с помощью тождественных математических преобразований приводим указанную функцию к неопределенности $\left[1^\infty\right]$ или выражению q^∞.

При неопределенности $\left[1^\infty\right]$ из функции под знаком предела выделяют второй замечательный предел и заменяют его на постоянную. Затем вычисляется предел показателя степени как функции, и получают окончательный результат.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}=\left[\dfrac{-\infty}{-\infty}\right]^\infty$. Имеем неопределенность общего вида, поэтому преобразуем функцию под знаком предела с целью приведения к основной неопределенности.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4-2x}{1-2x}-1\right)^{x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{1-2x}\right)^{x+1}=[1]^\infty;$$

Выделяем второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{1-2x}\right)^{x+1}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1-2x}{3}}\right)^{\frac{3}{1-2x}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+1)}{1-2x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(x+1)}{1-2x}}=e^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Если показательно-степенная функция приводится в пределе к выражению вида q^{∞} при $q\neq 1$, то $\lim\limits_{x\to a(\infty)}q^{\infty}=\begin{cases}\infty & при\ \ q>1\\ 0 & при\ \ |q|<1\end{cases}.$

Пример 2.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}=\left[\frac{-\infty}{-\infty}\right]^{-\infty}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{x+5}{4x-2}-1\right)^{3x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{7-3x}{4x-2}\right)^{3x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-3+\frac{7}{x}}{4-\frac{2}{x}}\right)^{3x}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\left(-\frac{3}{4}\right)\right)^{3x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{-\infty}=\infty.$$

Правило 6. Если при неопределенности $\left[\frac{0}{0}\right]$ в составе функции под знаком предела содержатся тригонометрические функции, то из исходной функции выделяют первый замечательный предел.

В результате, как правило, неопределенность устраняется или выражение под знаком предела существенно упрощается.

Пример 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}=\left[\dfrac{0-0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}\cdot 2}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Если $x\to a,\ a\neq 0,\ a\neq\pm\infty$, то используют замену переменной. Эту переменную (t) выбирают так, чтобы $t\to 0$ при $x\to a$. После этого выделяют первый замечательный предел.

Пример 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{\arcsin(x+2)}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left[x+2=t,\ t\to 0\right]=2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t}{\arcsin t}=$

$$= \left[\arcsin t = y,\ \ y \to 0\right] = 2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y} = 2.$$

Правило 7. При неопределенности $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ вычисление пределов можно производить с помощью эквивалентной замены функций, если $x \to 0$ или $\alpha(x) \to 0$ (см. 6.7^0).

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x arctg 4x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{(8x)^2}{2}}{x\cdot 4x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{64x^2}{8x^2} = 8$.

Замечание 1: Эквивалентную замену функций нельзя непосредственно использовать, если в числителе или знаменателе имеет место разность функций одного порядка $[0-0]$ (например в Примере 1 правила 6). В подобных случаях необходимо сначала преобразовать математическое выражение под знаком предела так, чтобы исключить б.м.ф. функций одного порядка и затем использовать эквивалентную замену функций.

Пример: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - \sin x}{x^3} = \left[\dfrac{0-0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\dfrac{x^2}{2}}{x^3\cos x} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{2}$.

Замечание 2: Эквивалентную замену функций производят при $x \to 0$ ($\alpha(x) \to 0$). Если $x \to a \neq 0$, ($\alpha(x) \to a \neq 0$), то производят замену переменной так, чтобы $t \to 0$ при $x \to a$. Затем используют эквивалентную замену.

Пример: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[5]{x}-1}{e^{x-1}-1} = \left[x-1=t,\ \ t\to 0\right] = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{t+1}-1}{e^t - 1} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1+\dfrac{1}{5}t-1}{1+t-1} = \dfrac{1}{5}$.

Правило 8: При вычислении пределов можно использовать также другие известные пределы, которые можно вычислить с помощью второго замечательного предела:

- третий замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \dfrac{1}{\ln a}$, в частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Из этих пределов следуют формулы эквивалентности: $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$, $\ln(1+x) \sim x$;

- четвертый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, в частности, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Из этих пределов следуют формулы эквивалентности: $a^x-1 \sim x\ln a$, $e^x-1 \sim x$;

Пример 1. $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln x-\ln e}{x-e}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln\frac{x}{e}}{e\left(\frac{x}{e}-1\right)}=\left[\dfrac{x}{e}-1=t;\ t\to 0\right]=$

$=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t+1)}{et}=\dfrac{1}{e}\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(t\}+1)}{t}=\dfrac{1}{e}$;

Пример 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^x-e^2}{x^2-4}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{(x-2)+2}-e^2}{(x-2)(x+2)}=e^2\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1}{t}\cdot\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{t+4}=\dfrac{e^2}{4}$;

Тема 3: Непрерывные и разрывные функции одной действительной переменной

3.1 Непрерывные функции в точке, на промежутке и в области

Определение 1: пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве X, и точка $x=x_0$ является предельной точкой этого множества. Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=x_0$, если она определена в полной (не проколотой) окрестности этой точки и существует конечный предел функции, равный значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(x_0)$.

Замечание: для точек, не являющихся предельными для области существования функции, понятие непрерывности не рассматривается, поскольку не имеет смысла говорить об окрестностях этой точки.

Определение: если функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$ и $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, то величина $\Delta x=x-x_0$ называется *приращением переменной* x, а величина $\Delta y=f(x)-f(x_0)$ - *приращением функции* в точке $x=x_0$.

Определению 1 непрерывности в точке равносильно другое определение:

Определение 2: функция $y=f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=x_0$, если бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Замечание: из определения 2 следует, что приращение непрерывной функции Δy в δ - окрестности точки $x = x_0$ является бесконечно малой величиной при $\Delta x \to 0$;

Определение: функция называется непрерывной в области своего существования, если она непрерывна в каждой точке этой области (отсюда следует, что функция непрерывна на любом промежутке, входящем в область существования).

В случае композиции функций (сложной функции) $y = f(\varphi(x))$ область значений промежуточного аргумента $u = \varphi(x)$ не должна выходить за пределы области существования функции $y = f(\varphi(x))$ по основному аргументу.

3.2 **Односторонние пределы и односторонняя непрерывность функций**

Определение: предельные точки области существования функции, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва*.

В точке разрыва функция может быть определена или не определена; независимо от этого нам будет удобно считать окрестности этой точки проколотыми.

Примеры: 1. Функция $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ не определена в точке $x = 0$ и, в соответствии с определением 1, разрывна в этой точке;

2. Функция $y = \begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}, \; если \;\; x \neq 0 \\ 0, \;\; если \;\; x = 0 \end{cases}$ определена в точке $x = 0$, но можно показать, что она разрывна в этой точке;

3. Функция $y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, \; если \;\; x \neq 0 \\ 0, \;\; если \;\; x = 0 \end{cases}$ определена в точке $x = 0$, и можно показать, что она в этой точке непрерывна;

При введении понятия предела $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ не конкретизировалось, как именно переменная x стремится к числу a, то есть по умолчанию предполагалось, что это может происходить любым способом (например, справа или слева).

Определение: Число A называется *левосторонним (левым) пределом* функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого, как угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta(\varepsilon)$, что для любого $x \in (a - \delta,\ a)$ все значения функции $f(x)$ будут находиться внутри интервала $(A - \varepsilon,\ A + \varepsilon)$.

Символьная запись предела функции в точке: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$ или $f(a-0)$.

Замечание. При решении задач на качественном уровне левосторонний предел функции можно интерпретировать так: предел функции A является левосторонним, если он существует при стремлении аргумента функции к предельной точке $x = a$ слева, т.е. при таком стремлении переменная x остается всегда меньше числа a.

Рис.7.1. Односторонние пределы и непрерывность

Определение: если значение функции $y = f(x)$ в точке $x = a$ равно левому пределу функции в этой точке, то функция $y = f(x)$ называется *непрерывной слева* в точке $x = a$.

Замечание: аналогично вводятся понятия правостороннего предела и непрерывности справа.

В графической форме односторонние пределы отмечаются стрелкой, а односторонняя непрерывность – точкой (рис.7.1).

При вычислении односторонних пределов необходимо учитывать следующие условные равенства:

$$\frac{c}{0+0} = \infty, \quad \frac{c}{0-0} = -\infty \ \text{ и } \ \frac{c}{\infty} = 0+0, \quad \frac{c}{-\infty} = 0-0 \ \text{ (при } c > 0\text{)}.$$

Все свойства пределов, указанные в 6.2., имеют место и для односторонних пределов. Кроме того, имеет место

Теорема (о совпадении односторонних пределов)

1) Если существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела и эти пределы совпадают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$;
2) Если существуют оба односторонних предела, и они совпадают $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$, то существует и предел $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

3.3 **Точечные разрывы функции**

Различают следующие виды точечных разрывов функции:

1. *Устранимый разрыв*: функция $y = f(x)$ не определена в своей предельной точке $x = a$, но при этом существуют оба односторонних предела, они совпадают и конечны: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A$.
2. *Разрыв первого рода:* функция $y = f(x)$ в точке $x = a$ имеет конечные односторонние пределы, которые не равны друг другу: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = B$, $A \neq B$.

   Функция $y = f(x)$, имеющая в области определения только точки разрыва первого рода, называется *кусочно-непрерывной*.
3. *Разрыв второго рода:* неустранимый разрыв, не являющийся разрывом первого рода.

Разрывы второго рода можно условно разделить на два типа: а) оба односторонних предела существуют, но хотя бы один из них равен $\pm\infty$; б) хотя бы один из односторонних пределов не существует;

Пример 1. Функция $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$ имеет в точке $x = 0$ устранимый разрыв (см. задачу 7.2.3. г) 7.2^0). Если доопределить эту функцию в точке $x = 0$ значением ее предела, то получим неэлементарную функцию $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & при \;\; x \neq 0 \\ 0 \;\; при & x = 0 \end{cases}$, непрерывную во всей области существования.

Пример 2. Функция $arctg\frac{1}{x}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода (см. задачу 7.2.3. в) 7.2^0).

Пример 3. При исследовании динамики механических систем с учетом сухого (кулоновского) трения используют функции с разрывами первого рода. Пусть v - относительная скорость перемещения трущихся поверхностей. Сила трения $F_{тр}$ равна

$$F_{тр} = \varphi(v) = \begin{cases} -b_0 \;\; при \;\; v < 0 \\ \;\;0 \;\; при \;\; v = 0 \\ b_0 \;\; при \;\; v > 0 \end{cases} = b_0 \operatorname{sgn}(x),\; b_0 > 0,\; b_0 = const;$$

Точка $v=0$ - точка разрыва функции первого рода. В точке $v=0$ неэлементарную функцию $F_{mp}=\varphi(v)$ доопределяют из физических соображений значением $F_{mp}(0)=0$.

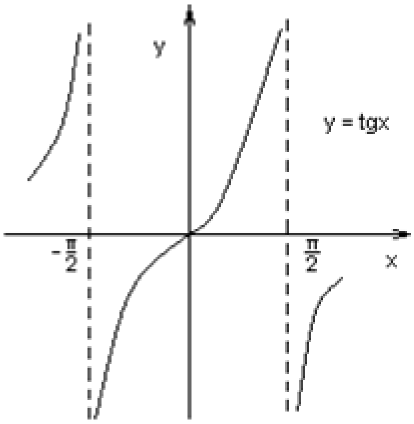


Рис. 7.2 Функция y = tgx

Пример 4. Функция tgx имеет в точке $x=\frac{\pi}{2}$ разрыв второго рода, т.к. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x)=\infty$ и $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x)=-\infty$.

Пример 5. Функция $\sin\frac{1}{x}$ имеет в точке $x=0$ разрыв второго рода, так как можно доказать, что ни один из односторонних пределов не существует.

Используя понятие односторонних пределов, можно ввести третье определение непрерывности функции:

Определение: если левый и правый пределы функции $y=f(x)$ в точке $x=a$ равны между собой и равны значению функции в этой точке $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$, то функция непрерывна в этой точке.

3.4 **Способы вычисления односторонних пределов**

Односторонние пределы можно вычислять с помощью правил, рассмотренных в теме 6.

При исследовании поведения функции в окрестности точек разрыва более удобным представляется способ вычисления пределов, основанный на представлении аргумента функции под знаком предела в виде $x=a\pm\alpha$ в окрестности предельной точки $x=a$ ($\alpha=\alpha(x)$) – бесконечно малая величина. Например, левый предел $f(a-0)$ определяют при значениях аргумента $x<a$ в левом полуинтервале проколотой δ - окрестности предельной точки $x=a$ при $x=a-\alpha$. Бесконечно малая величина $\alpha=\alpha(x)$ с геометрической точки зрения представляет собой расстояние между текущей точкой x и предельной точкой a. Поэтому всегда $\alpha>0$ ($\alpha\to 0+0$) при левом и при правом пределах.

При вычислении одностороннего предела в функцию подставляют $x = a - \alpha$ при левом пределе и $x = a + \alpha$ при правом пределе и проводят алгебраические операции. При этом бесконечно малыми величинами более высоких порядков $\alpha^2 << \alpha$, $\alpha^3 << \alpha$ и т.п. пренебрегают.

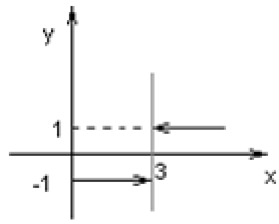


Рис. 7.3. Пример 1

Пример 1. Найти односторонние пределы функции $y = \dfrac{|x-3|}{x-3}$ в точке разрыва.

Решение: При $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ функция имеет точку разрыва. Определяем левый предел: $y(3-0) = \lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{|x-3|}{x-3} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \dfrac{|3-\alpha-3|}{3-\alpha-3} = \dfrac{\alpha}{-\alpha} = -1$. Определяем правый предел:

$$y(3+0) = \lim_{x \to 3+0} \frac{|x-3|}{x-3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \left[\frac{|3+\alpha-3|}{3+\alpha-3} = \frac{\alpha}{\alpha}\right] = 1.$$

Замечание: при $x = 3$ функция не определена, поэтому ветви графика функции в окрестности предельной точки оканчиваются стрелками.

Пример 2. Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ на непрерывность. Найти точки разрыва, определить поведение функции в окрестности точки разрыва.

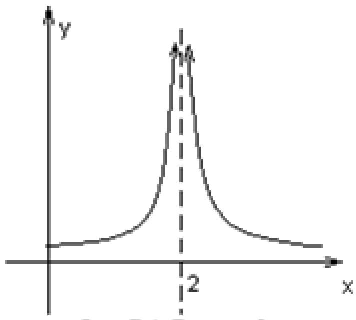


Рис. 7.4 Пример 2

Решение: При всех $x \neq 2$ функция имеет конечные значения, т.е. непрерывна. В точке $x = 2$ функция имеет разрыв.

Определим тип точки разрыва и поведение функции в окрестности этой точки с помощью односторонних пределов.

Левый предел: $y(2-0) = \lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{1}{(2-x)^2} = \left[\dfrac{1}{(2-2+\alpha)^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\right] = \infty$

.

Правый предел: $y(2+0) = \lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{1}{(2-x)^2} = \left[\dfrac{1}{(2-2-\alpha)^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\right] = \infty$.

В точке $x = 2$ функция имеет разрыв второго рода. В окрестности этой точки функция стремится к ∞ слева и справа. Прямая $x = 2$, параллельная оси Oy, к которой неограниченно приближаются ветви графика функции, называется *вертикальной асимптотой*. Интервалы непрерывности: $(-\infty,\ 2)$ и $(2,\ \infty)$. Область существования функции $D(x)=\{x \mid x\in(-\infty,\ 2)\cup(2,\ \infty)\}$.

Пример 3. Определить промежуток, в котором функция $y=\dfrac{\arcsin(x-3)}{x^2+e^x}$ непрерывна.

Решение: Знаменатель функции не обращается в ноль ни при каких значениях переменной $x\in R$. Числитель функции имеет смысл при $-1\le x-3\le 1 \Rightarrow 2\le x\le 4$. Таким образом, функция непрерывна на промежутке $[2,\ 4]$.

Пример 4. Исследовать непрерывность функции $y=\dfrac{x^3-8}{x-2}$;

Решение: Из уравнения $x-2=0$ следует, что точка $x=2$ является точкой разрыва функции.

Левый предел: $y(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\left[\dfrac{(2-\alpha)^3-8}{2-\alpha-2}=\dfrac{-12\alpha+6\alpha^2-\alpha^3}{-\alpha}=12-6\alpha+\alpha^2\right]=12$;

Правый предел: $y(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x^3-8}{x-2}=\left[\dfrac{(2+\alpha)^3-8}{2+\alpha-2}=\dfrac{12\alpha-6\alpha^2+\alpha^3}{\alpha}=12-6\alpha+\alpha^2\right]=12$.

В точке $x=2$ имеем устранимый разрыв, т.е. доопределим функцию в точке разрыва значением ее предела, получим непрерывную функцию.

При $x\ne 2$ исходную функцию можно упростить с помощью тождественных математических преобразований:

$$y(x\ne 2)=\frac{x^3-8}{x-2}=\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=x^2+2x+4.$$

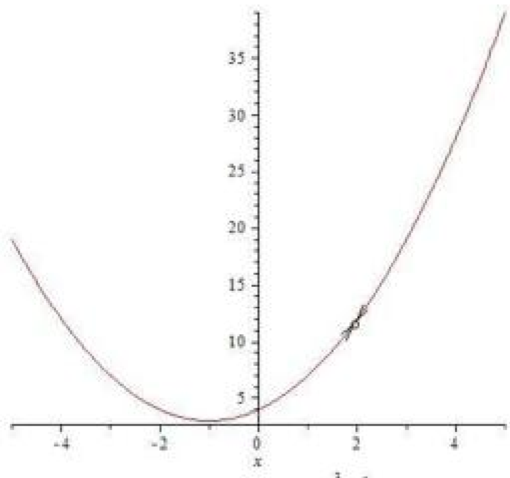


Рис.7.5. График функции $\frac{x^3-8}{x-2}$

$\Rightarrow y-3=(x+1)^2$. Получено почти каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $O(-1,\ 3)$ с точкой устранимого разрыва $x=2$. При $x=2$ из уравнения параболы следует $y=2^2+2\cdot 2+4=12$. Таким образом, раскрытие неопределенностей вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ - это, по существу, исключение (устранение) точек «устранимого» разрыва из области существования функции.

Тема 4: Производная и дифференциал функции одной действительной переменной. Алгоритмы дифференцирования

4.1 Исходные положения

В основе операции дифференцирования функции лежат понятия предельного перехода и непрерывности функции.

Определение: производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при произвольном стремлении приращения Δx к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy(x_0)}{dx} = f'(x_0) = y'(x_0).$$

Замечание 1: $f'(x_0),\ y'(x_0)$- условные обозначения производной, выражение $\frac{dy(x_0)}{dx}$ пока будем воспринимать как единый знак и также считать условным обозначением производной.

Замечание 2: поскольку предел функции не обязательно существует, а производная определена как предел, то производная существует не для любой функции и не в любой точке.

Производная функции в фиксированной точке, если она существует, может принимать следующие значения:

$$f'(x_0) = \begin{cases} \pm A - \ \textit{конечное ненулевое число} \\ 0 \\ \pm\infty \end{cases};$$

Геометрический смысл производной функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ заключается в следующем: производная функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла между касательной к графику функции в точке M_0 и положительным направлением оси Ox.

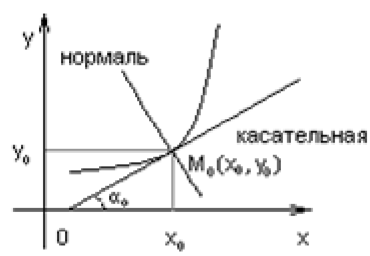


Рис.8.1. Касательная и нормаль

В символьной форме геометрический смысл производной можно представить так: $tg\alpha_0 = y'(M_0)$.

Определение: перпендикуляр к касательной, проведенный в точке касания M, называется *нормалью* к линии L в точке M.

Уравнение касательной к линии $y = y(x)$ в точке $M_0(x_0,\, y_0)$: $y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0)$, уравнение нормали: $y - y_0 = -\dfrac{1}{y'(x_0)}\cdot(x - x_0)$.

Производная в фиксированной точке $x = x_0$, если она существует, является конечным числом (в частности, нулем) или равна бесконечности. При этом из геометрического смысла производной следует, что при $y'(A) = 0$ касательная в точке A графика кривой параллельна оси Ox $(tg\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0)$. При $y'(B) = \infty$ касательная в точке B параллельна оси Oy $\left(tg\beta = \infty \Rightarrow \beta = \dfrac{\pi}{2}\right)$.

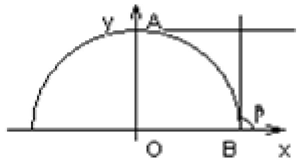


Рис.8.2. Касательные, соответствующие нулевой и бесконечной производным

Определение: функции, имеющие производные во всех точках интервала непрерывности будем называть *гладкими*.

Гладкие функции могут иметь нулевые и бесконечные значения производной. График гладкой функции будем называть *гладкой кривой*. В каждой точке гладкой кривой можно построить касательную.

Если в некоторой точке $x = x_0$ интервала непрерывности (a,b) непрерывная функция $y = y(x)$ не имеет производной, то ее называют *негладкой*.

Точки, в которых производная непрерывной функции не существует, называются *особыми*. В этих точках график непрерывной функции не имеет касательной, но в окрестности особых точек функция может иметь односторонние касательные и соответствующие им односторонние производные.

Замечание 1: далее в материалах темы 8 будем рассматривать непрерывные функции без особых точек. Функции, имеющие особые точки и приложения таких функций будут рассмотрены в материалах темы 9.

Замечание 2: процесс нахождения производных называется *дифференцированием* функций. Смысл этого термина будет разъяснен чуть позднее.

4.2 **Основной алгоритм нахождения производных элементарных функций**

Из определения производной $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$ получаем следующий алгоритм ее нахождения:

1. Придадим аргументу x известной функции $y = f(x)$ приращение Δx и найдем значение функции для аргумента с приращением $x + \Delta x$; при $\Delta x \neq 0$: $y + \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.
2. Определяем приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$;
3. Находим среднее относительное приращение функции $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$;
4. Вычисляем предельное значение относительного приращения функции, которое является производной данной функции: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$;

Пример 1. Найти производную функции $y = \sqrt{x}$ в точке $x_0 = 4$ на основе определения.

Решение: 1. $y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$; 2. $\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$; 3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$;

4.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\left(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}\right)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

при $x_0 = 4$ получим $y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$;

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{2x}{3x + 1}$ на основе определения.

Решение: 1. $y + \Delta y = \frac{2(x + \Delta x)}{3(x + \Delta x) + 1}$;

2. $\Delta y = \frac{2(x + \Delta x)}{3(x + \Delta x) + 1} - \frac{2x}{3x + 1} = \frac{2(x + \Delta x)(3x + 1) - 2x(3(x + \Delta x) + 1)}{(3(x + \Delta x) + 1)(3x + 1)} = \frac{2\Delta x}{((3x + 3\Delta x) + 1) \cdot (3x + 1)}$;

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{((3x + 3\Delta x) + 1) \cdot (3x + 1)}$; 4. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{2}{((3x + 3\Delta x) + 1) \cdot (3x + 1)} = \frac{2}{(3x + 1)^2}$

4.3 **Табличные производные. Правила дифференцирования**

Вычисление производных можно существенно упростить, если вместо основного алгоритма дифференцирования (8.2^0) использовать готовые формулы для производных основных элементарных функций и правила дифференцирования.

Производные всех основных элементарных функций сводятся в таблицу и называются табличными производными, а эти функции для краткости – табличными функциями.

Таблица производных основных элементарных функций

Наименование функции	Функция $y = f(x)$	Производная $y' = f'(x)$
Постоянная	$y = C$	$y' = 0$
Степенная функция	$y = x^{\alpha} : \alpha \in R$	$y' = \alpha x^{\alpha - 1}$
	$y = x = x^1$	$y' = 1$
	$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
Показательная функция	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
	$y = e^x$	$y' = e^x$
Логарифмическая функция	$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
Тригонометрические функции	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$

	$y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
	$y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
Обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
	$y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$

Замечание к таблице: формулы для производных не изменяются по форме при использовании любых других аргументов u, t и т.п., если $u \in R, t \in R$ и функции с новыми аргументами остаются основными элементарными.

Элементарные функции, полученные из табличных с помощью арифметических операций, будем называть *составными*. Для составных функций справедливы следующие правила дифференцирования (если правые части равенств имеют смысл):

1. $(u + v + w + ...)' = u' + v' + w' + ...$, производная суммы конечного числа функций равна сумме производных;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
3. $(C \cdot u)' = Cu'$, где $C = const$, постоянный множитель выносится за знак производной;
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$;
5. $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{C}{v^2}$, где $C = const$;

Примеры. Найти производные составных функций, используя табличные производные и правила дифференцирования: а) $y = x + 2\sqrt{x}$; б) $y = x^2 \cos x$; в) $y = \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$;

Решения: а) $y' = x' + 2\left(\sqrt{x}\right)' = 1 + 2 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;

б) $y' = \left(x^2\right)' \cos x + x^2 (\cos x)' = 2x \cos x - x^2 \sin x$;

в) $y' = \dfrac{(\cos x)'(1-\sin x) - \cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{-\sin x(1-\sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \dfrac{1}{1-\sin x}$;

4.4 **Способы вычисления производных сложных функций**

Для вычисления производных сложных функций используют различные способы, в основе которых лежит «цепное» правило дифференцирования.

Пусть дана сложная функция, которую можно разложить на табличные функции при ведении промежуточных аргументов

$$y = f\left(\varphi\left(\psi(x)\right)\right) = \left[u = \psi(x),\ v = \varphi(u),\ y_v = f(v)\right],$$

где u, v - промежуточные аргументы, x - основной аргумент (независимая переменная). Промежуточные аргументы являются функциями независимой переменной x $\left(u = u(x), v = v(x)\right)$. После разложения производную сложной функции находят, используя цепное правило:

$$y'_x = y'_v \cdot v'_u \cdot u'_x .$$

Рассмотрим способы вычисления производных сложных функций:

Первый способ (классический) основан на предварительном полном разложении сложной функции на табличные функции с явным введением промежуточных аргументов. Затем используем цепное правило.

Пример 1. Найти производную y'_x для функции $y = \arcsin\sqrt{1-4x}$;

Решение: 1) разбиваем сложную функцию на табличные с введением промежуточных аргументов

$y = \arcsin\sqrt{1-4x} = \left[u = 1-4x, v = \sqrt{u},\ y_v = \arcsin v\right].$

2) дифференцируем табличные функции по промежуточным аргументам и затем переходим к основному аргументу: $u'_x = (1-4x)' = -4$; $v'_u = \left(\sqrt{u}\right)'_u = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-4x}}$;

$$y'_v = (\arcsin v)'_v = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-4x}\right)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

3) перемножаем производные табличных функций, используя цепное правило, и получаем окончательный результат: $y'_x = y'_v \cdot v'_u \cdot u'_x = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1-4x}} \cdot (-4) = -\dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-4x}}$;

Пример 2. Найти производную y'_x для функции $y = arctg^2 \dfrac{1}{x}$;

Решение: Если опустить описания этапов, то объем вычислений можно сократить:

$$y' = \left(\left(arctg\frac{1}{x}\right)^2\right)' = \left[u = \frac{1}{x},\ v = arctgu,\ y_v = v^2\right] = u'_x \cdot v'_u \cdot y'_v = \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{1+u^2} \cdot 2v =$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{-1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot 2arctg\frac{1}{x} = \frac{2arctg\frac{1}{x}}{x^2+1};$$

Второй способ (переход от простого к сложному) Этот способ заключается в том, что сначала выделяют табличную функцию с основным аргументом и дифференцируем ее. Затем эту функцию принимают за промежуточный аргумент, выделяют следующую табличную функцию с этим аргументом и дифференцируют по этому аргументу и т.д. Промежуточные аргументы обычно не вводят в явном виде.

Пример 1. Найти производную функции $y = arctg \ln\left(\sin x^3\right)$;

Решение: $y' = \left(arctg \ln\left(\sin x^3\right)\right)' = \left[x^3 = u,\ \sin x^3 = v,\ \ln\left(\sin x^3\right) = w\right] =$

$$= \left(x^3\right)'_x \cdot \left(\sin x^3\right)'_u \cdot \left(\ln\left(\sin x^3\right)\right)'_v \cdot \left(arctg\left(\ln\left(\sin x^3\right)\right)\right)'_w =$$

$$= 3x^2 \cdot \cos x^3 \cdot \frac{1}{\sin x^3} \cdot \frac{1}{1+\ln^2\left(\sin x^3\right)} = \frac{3x^2 ctgx^3}{1+\ln^2\left(\sin x^3\right)};$$

Явное указание промежуточных аргументов целесообразно опускать, выполняя их в уме. Это существенно сокращает вычисления.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sin^2 \sqrt{1+x^2}$;

Решение (второй способ):

$$y' = \left(\left(\sin\sqrt{1+x^2}\right)^2\right)' = 2\sin\sqrt{1+x^2}\left(\sin\sqrt{1+x^2}\right)' = 2\sin\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}\left(\sqrt{1+x^2}\right)' =$$

$$= 2\sin\sqrt{1+x^2}\cos\sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\left(1+x^2\right)' = \frac{x\sin 2\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}};$$

Если сложные функции связаны между собой арифметическими операциями, то получаем сложносоставную функцию, при вычислении производной которой дополнительно используют правила дифференцирования, аналогичные указанным выше.

Пример. Найти производную функции $y = \dfrac{\sin x^2}{tg\sqrt{x}}$;

Решение: $y' = \dfrac{\left(\sin x^2\right)' tg\sqrt{x} - \sin x^2\left(tg\sqrt{x}\right)'}{tg^2\sqrt{x}} = \dfrac{2x\cos x^2 \cdot tg\sqrt{x} - \sin x^2\,\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{tg^2\sqrt{x}} =$

$$= \frac{2x\sqrt{x}\cos x^2 \sin 2\sqrt{x} - \sin x^2}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}};$$

Замечание: для правильного вычисления производных сложных функций необходимо хорошее знание таблицы производных и устойчивые навыки разложения сложной функции на табличные. При этом необходимо владеть обоими способами вычислений, чтобы один из способов использовать для проверки правильности вычислений.

$$y = \frac{1}{4\sqrt{3}}\ln\frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{2}arctgx + \frac{1}{6}arctgx^3;$$

4.5 **Вычисление производных высших порядков**

Определение: *производной второго порядка* функции $y = y(x)$ называется производная от ее производной. *Производной третьего порядка* называется производная от ее второй производной. *Производной четвертого порядка* называется производная от ее третьей производной

Замечание: аналогично можно определить производные любого порядка.

$$y''(x) = \left(y'(x)\right)';\; y'''(x) = \left(y''(x)\right)';\; y^{(4)}(x) = \left(y'''(x)\right)';\ldots\, y^{(n)}(x) = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'\ldots$$

В соответствии с определением, производные второго, третьего и более высоких порядков вычисляют последовательным дифференцированием производных предыдущих порядков. При этом используются те же табличные производные и правила дифференцирования, которые применялись для вычисления производных первого порядка.

Пример. Найти вторую производную функции $y = arctg\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;

Решение: $y^{'} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{4-x^2}}\left(\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^{'} = \frac{4-x^2}{4-x^2+x^2}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}-x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{4-x^2} = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$,

$$y^{''} = \left(\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\right)^{'} = -\frac{1}{2}\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x) = \frac{x}{\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2}} .$$

4.6 **Вычисление пределов функций с помощью производных (правило Бернулли-Лопиталя)**

Правило Бернулли-Лопиталя используют для раскрытия неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ при вычислении пределов функций. С помощью этого правила вычисление предела отношения функций сводится к пределу отношения производных этих функций.

$$\lim_{x\to a(\infty)}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\ или\ \frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to a(\infty)}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} .$$

При этом должны выполняться следующие условия:

- функции $f(x)$ и $g(x)$ должны быть определены и дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности предельной точки $x = a$ (или, соответственно, в окрестности бесконечности), при этом

$\lim\limits_{x\to a(\infty)} f(x) = \lim\limits_{x\to a(\infty)} g(x) = 0$;

- в любой достаточно малой окрестности точки $x = a$ производная функции $g(x)$ не обращается в ноль: $g^{'}(x) \neq 0$.

При вычислении пределов функций с помощью правила Бернулли-Лопиталя необходимо учитывать, что:

- правило можно использовать многократно, используя повторное дифференцирование;

- для раскрытия неопределенностей других видов функцию под знаком предела необходимо привести с помощью тождественных преобразований к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)\ln x$;

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)\ln x = [0\cdot\infty] = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - arctgx}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

После преобразования неопределенности $[0\cdot\infty]$ к виду $\left[\frac{0}{0}\right]$ можно использовать правило Бернулли-Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{\pi}{2} - arctgx\right)^{'}}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)^{'}} = \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x\ln^2 x}{1+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x\ln^2 x\right)^{'}}{\left(1+x^2\right)^{'}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x + 2x\ln x\cdot\frac{1}{x}}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\ln^2 x + 2\ln x\right)^{'}}{(2x)^{'}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x} + 2\cdot\frac{1}{x}}{2} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x + 1)^{'}}{(x)^{'}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0;$$

После четырехкратного дифференцирования неопределенность раскрыта и предел вычислен.

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{9}{x} - \frac{4}{e^x - 1}\right)$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{9}{x} - \frac{4}{e^x - 1}\right) = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(9\left(e^x - 1\right) - 4x\right)^{'}}{\left(x\left(e^x - 1\right)\right)^{'}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{9e^x - 4}{e^x(x+1) - 1} = \left[\frac{5}{0}\right]$;

Понятно, что если предел существует, то он равен либо ∞, либо $-\infty$. Но, поскольку, $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{9e^x-4}{e^x(x+1)-1}=\left[\dfrac{5}{+0}\right]=\infty$, а $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9e^x-4}{e^x(x+1)-1}=\left[\dfrac{5}{-0}\right]=-\infty$,то данный предел не существует.

При нахождении предела показательно степенной функции $y=f(x)^{\varphi(x)}$, если имеет место неопределенность, предварительно используют логарифмирование, а затем тождественные математические преобразования, приводящие к неопределенности вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ или $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

Решение: $\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\left[1^\infty\right]=A$;

Принимаем, что предел имеет некоторое конечное значение A и логарифмируем обе части равенства: $\ln A=\ln\lim\limits_{x\to0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3}{x^2}\ln\cos 2x$.Используя свойство предела функции, меняем местами операции логарифмирования и предела. Затем логарифмируем функцию под знаком предела и вычисляем предел, используя правило Бернулли-Лопиталя.

$$3\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos 2x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=3\lim_{x\to0}\frac{(\ln\cos 2x)'}{(x^2)'}=3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos 2x}\cdot(-2\sin 2x)}{2x}=-3\lim_{x\to0}\frac{tg2x}{x}=-3\lim_{x\to0}\frac{(tg2x)'}{x'}=$$

$$=-3\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot2}{1}=-6$$. Поскольку $\ln A=-6$, то $A=e^{-6}$.

Второй способ вычисления предела показательно степенной функции основан на использовании тождества $\lim\limits_{x\to a(\infty)}f(x)^{\varphi(x)}=\lim\limits_{x\to a(\infty)}e^{\varphi(x)\ln f(x)}$.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+0}x^{tgx}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to+0}x^{tgx}=\lim\limits_{x\to+0}e^{tgx\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}tgx\ln x}$;

$$\lim_{x\to+0} tgx\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{(ctgx)'} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x} = -\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cos x}{1} = 0,$$

следовательно, $\lim\limits_{x\to+0} x^{tgx} = e^0 = 1$.

Тема 5: Основные свойства функций

5.1 Частные свойства функций

К частным относятся свойства функции, которые характеризуют особенности поведения функции в отдельных частях ее области существования (отдельных интервалах, являющихся частями интервала непрерывности функции).

Важными для приложений частными свойствами функций являются:

- знакопостоянство;
- монотонность;
- выпуклость;

5.1.1 Знакопостоянство функции

Определение: функция $y = f(x)$ называется *знакопостоянной* в интервале (a, b), если числовые значения функции сохраняют свой знак при любом значении аргумента x, принадлежащем этому интервалу: $\forall x \in (a, b)\ \ f(x) > 0$ или $\forall x \in (a, b)\ \ f(x) < 0$.

Интервал, в котором функция сохраняет свой знак, называется *интервалом знакопостоянства*. Интервалы знакопостоянства находятся *методом интервалов*, изучавшимся в средней школе: для этого находится область существования функции $y = f(x)$, затем решается уравнение $f(x) = 0$. Корни этого уравнения, нанесенные на область существования, делят ее на интервалы, каждый из которых является интервалом знакопостоянства.

Знак функции в интервале знакопостоянства (a, b) определяется методом пробных точек. Для этого выбирается координата любой точки $x_{пр} \in (a, b)$и находится знак функции в этой точке $y_{пр} = f(x_{пр})$. Этот знак сохраняется во всех внутренних точках интервала (a, b).

5.1.2 Монотонность функции

Определение: функция $y = f(x)$ называется возрастающей на интервале $(a,\, b)$, если для любых чисел $x_1, x_2 \in (a,\, b)$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует большее значение функции)

Определение: функция $y = f(x)$ называется убывающей на интервале $(a,\, b)$, если для любых чисел $x_1, x_2 \in (a,\, b)$ из условия $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ (большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции).

Определение: функция $y = f(x)$ называется монотонной на интервале $(a,\, b)$, если она на всем этом интервале является возрастающей или убывающей.

Возрастание и убывание функций определяют с помощью первых производных.

Теорема 1) если в любой точке $x \in (a,\, b)$ производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ строго положительна $(f'(x) > 0)$, то функция $y = f(x)$ возрастает на интервале $(a,\, b)$.

2) если в любой точке $x \in (a,\, b)$ производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ строго отрицательна $(f'(x) < 0)$, то функция $y = f(x)$ убывает на интервале $(a,\, b)$.

Интервалы, на которых функция только возрастает или только убывает, называются *интервалами монотонности*.

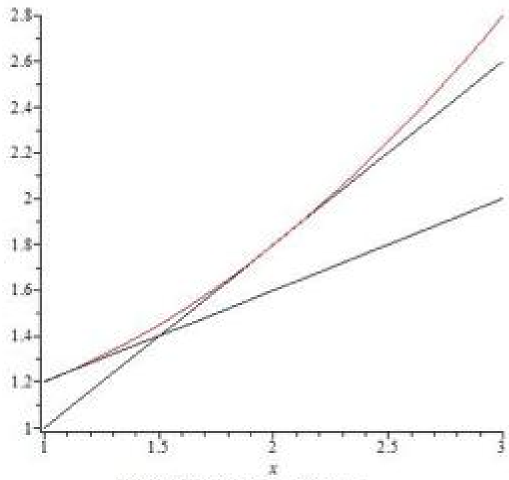
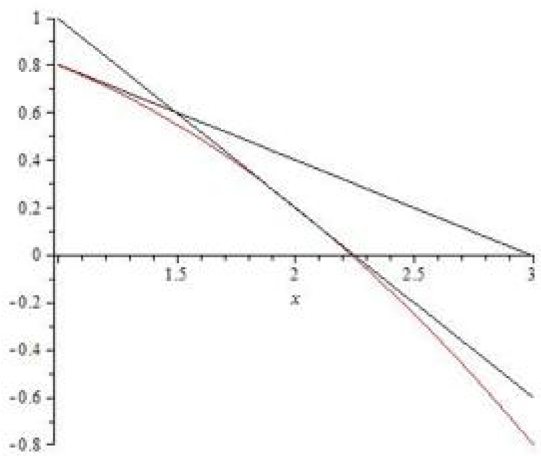


Рис.9.4. Выпуклая вниз функция

5.1.3 **Выпуклость функции**

Определение: гладкая кривая называется *выпуклой вниз* на интервале $(a,\, b)$, если касательная, проведенная в любой точке этого интервала, лежит ниже этой кривой.



Аналогично, гладкая кривая называется *выпуклой вверх* на интервале $(a,\, b)$, если касательная, проведенная в любой точке этого интервала, лежит выше этой кривой (рис.9.4,9.5).

Достаточное условие выпуклости функции вверх или вниз заключается в следующем: график функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость вниз, если вторая производная функции во всех точках этого интервала положительна $(f''(x) > 0)$. График функции $y = f(x)$ имеет на интервале (a, b) выпуклость вверх, если вторая производная функции во всех точках этого интервала отрицательна $(f''(x) < 0)$.

5.4 **Локальные свойства функций**

Локальные свойства функции характеризуют особенности поведения функции в отдельных характерных точках области существования функции.

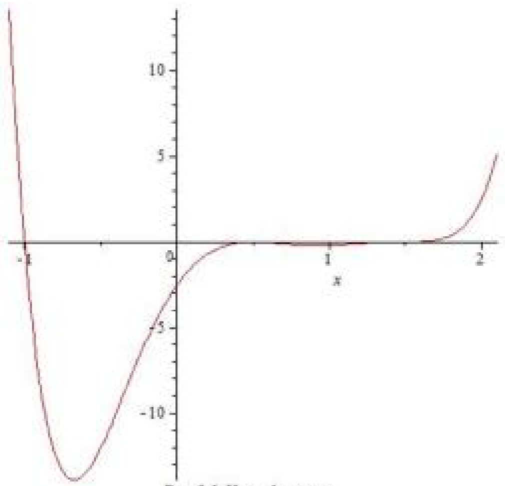


Рис. 9.6. Нули функции

5.4.1 **Нули функции**

Определение: *нули* функции $y = f(x)$ – это значения ее аргумента, при которых она обращается в ноль.

Нули функции определяются как решения уравнения $f(x) = 0$. С геометрической точки зрения нули функции – это точки пересечения или касания (или того и другого) графика функции с осью абсцисс (Рис.9.6.).

Функция может не иметь нулей. Такова, например, показательная функция $y = a^x$ (см. Приложение 1). Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ может иметь или не иметь нули в зависимости от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ (Рис.9.7.) Нулевые точки разделяют интервалы непрерывности на интервалы знакопостоянства.

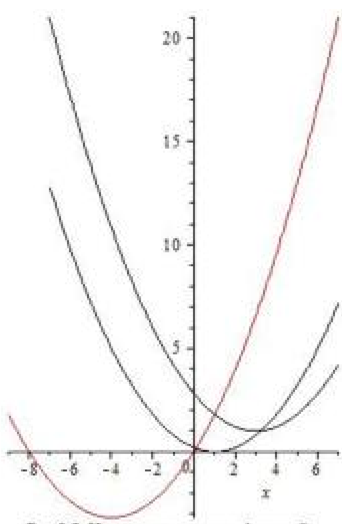


Рис.9.7. Нули квадратичных функций

5.4.2 **Экстремумы функции**

Важнейшим локальным свойством функции является наличие у нее экстремумов.

Определение: Функция $y = f(x)$ имеет *максимум* в точке x_0, если найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех значений $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ x \neq x_0$ имеет место неравенство $f(x_0) > f(x)$.

Определение: Функция $y = f(x)$ имеет *минимум* в точке x_0, если найдется число $\delta > 0$ такое, что для всех значений $x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta),\ x \neq x_0$ имеет место неравенство $f(x_0) < f(x)$.

Определение: Точкой экстремума функции $y = f(x)$ называется ее точка максимума или точка минимума x_0.

Экстремумы возможны только в точках (*критические точки первого рода*), в которых первая производная функции равна нулю, бесконечности или не существует. Если непрерывная функция $y = f(x)$ является гладкой, то критические точки первого рода определяются как корни уравнения $f^{'}(x) = 0$ (*точки стационарности*).

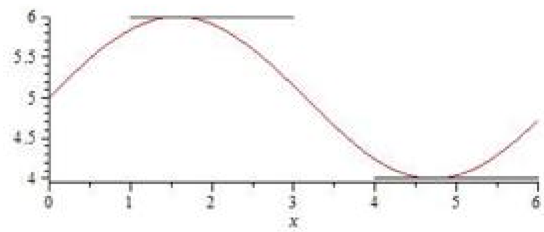


Рис. 9.8 Геометрический смысл необходимого условия экстремума

Наличие у гладкой функции точек стационарности является необходимым (но не достачным) условием наличия экстремумов.

Теорема Ферма (необходимое условие наличия экстремумов) Если функция $y = f(x)$ имеет на промежутке $(a,\ b)$ непрерывную производную и в точке $c \in (a,\ b)$ локальный экстремум, то $f^{'}(c) = 0$ (Рис.9.8.)

Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что в точках экстремума гладкой функции касательная параллельна оси абсцисс.

Окончательный вывод об экстремумах можно сделать только при выполнении достаточного условия наличия экстремума.

Первое достаточное условие экстремума: если при переходе через критическую точку x_0 первая производная

- меняет знак с положительного на отрицательный, то точка x_0 является точкой максимума;

- меняет знак с отрицательного на положительный, то точка x_0 является точкой минимума;

- не меняет свой знак, то экстремума в точке x_0 нет;

При практическом определении экстремумов с помощью первого достаточного условия используют метод интервалов: для этого находится область существования производной $y' = f'(x)$, затем решается уравнение $f'(x) = 0$. Корни этого уравнения, нанесенные на область существования, делят ее на интервалы, каждый из которых является интервалом знакопостоянства производной.

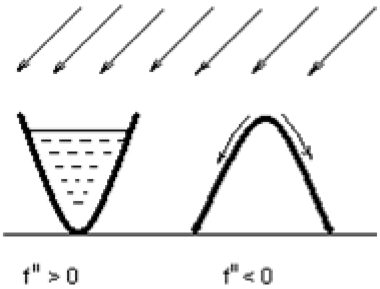


Рис.9.9. "Правило дождя"

Знак производной в интервале знакопостоянства (a, b) определяется методом пробных точек. Для этого выбирается координата любой точки $x_{пр} \in (a, b)$ и находится знак производной в этой точке $f'(x_{ïð})$. Этот знак сохраняется во всех внутренних точках интервала (a, b).

Для гладких функций справедливо

Второе достаточное условие экстремума: в точке стационарности x_0 функция имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$. Для лучшего запоминания второго достаточного условия используют мнемоническое «правило дождя» (Рис.9.9)

В общем случае в критических точках первая производная может быть равна бесконечности или не существовать. Эти точки являются особыми точками непрерывной функции (см. 8.1^0), в них возможно существование «острых» экстремумов (Рис.9.10)

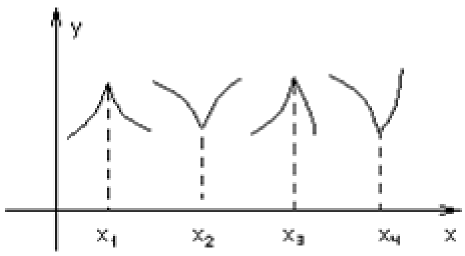


Рис.9.10 "Острые" экстремумы

Достаточное условие существования «острых» экстремумов основано на использовании односторонних производных: если в критической точке x_0 левая производная положительна, а правая отрицательна, то x_0 - точка максимума; если левая производная отрицательна, а правая положительна, то x_0 - точка минимума.

Пример. Определить экстремумы функций а) $y = \sqrt[3]{x-1}$, б) $y = \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

Решение: а) $y' = \left(\sqrt[3]{x-1}\right)' = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}}$. Производная не равна нулю ни при каких значениях аргумента, но при $x_0 = 1$ производная $y'(1) = \infty$. В точке $x_0 = 1$ возможен «острый» экстремум, ни в какой другой точке экстремума быть не может.

В точке $x_0 = 1$ и левая и правая производные функции $y = \sqrt[3]{x-1}$ положительны т.к. $y' = \dfrac{1}{3\cdot\sqrt[3]{(x-1)^2}} > 0$ при любом значении аргумента. Из достаточного условия существования «острых» экстремумов следует, что в точке $x_0 = 1$ экстремума нет. График функции представлен на Рис.9.11.

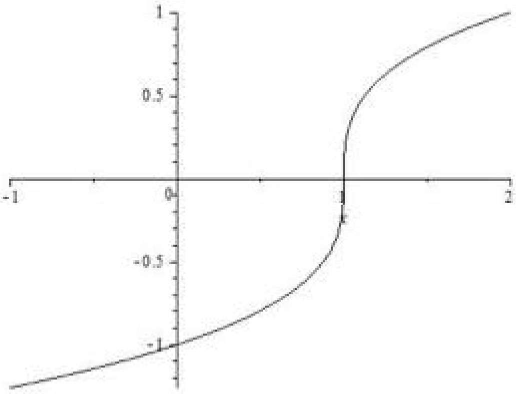


Рис.9.11. График функции $y=\sqrt[3]{x-1}$

б) $y' = \left(\sqrt[3]{(x-1)^2}\right)' = \dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-1}}$; аналогично а), если экстремум есть, то только в точке $x_0 = 1$.

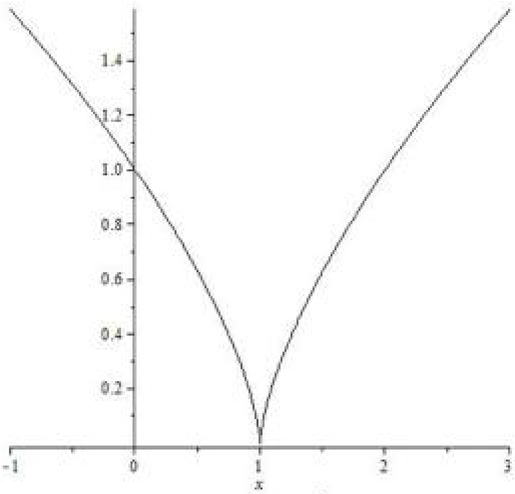


Рис.9.12. График функции $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$

При $x < 1$: производная отрицательна $\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x-1}} < 0$, а при $x > 1$ - положительна, поэтому, в соответствии с достаточным условием существования «острого» экстремума, $x_0 = 1$ - точка минимума. График функции представлен на Рис.9.12.

5.4.3 **Перегибы функции**

Определение: Если точка x_0 принадлежит области определения функции $y = f(x)$ и слева от этой точки функция выпукла, а справа вогнута (или наоборот: слева вогнута, а справа выпукла), то точка x_0 называется *точкой перегиба.*

В точках перегиба вторая производная функции равна нулю, бесконечности или не существует. В случае гладкой функции необходимое условие перегиба имеет вид $f''(x)=0$. Корни этого уравнения являются критическими точками второго рода, в которых возможны перегибы функции. Окончательно вопрос о наличии перегиба функции решают, используя *достаточное условие существования точки перегиба*: если вторая производная $f''(x)$ в окрестности критической точки x_0, $f''(x_0)=0$ имеет различные знаки справа и слева от x_0, то эта точка является точкой перегиба (рис.9.13.).

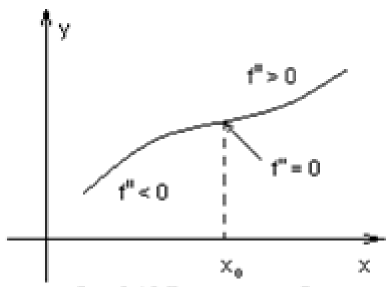


Рис 9.13 Точка перегиба

Пример. Найти точку перегиба функции $y=(x-1)^3+1$, построить график функции.

Решение: 1. определяем координаты критических точек.

$$y'=\left((x-1)^3+1\right)'=3(x-1)^2,\ y''=6(x-1)\Rightarrow x_0=1.$$

2. проверим, является ли точка $x_0=1$ точкой перегиба.

При $x<1$ вторая производная $y''=6(x-1)<0$, при $x>1$ - $y''=6(x-1)>0$, значит, $x_0=1$ - точка перегиба.

3. строим график функции $y=(x-1)^3+1$. Поскольку $y-1=(x-1)^3$, то графиком функции является кубическая парабола, смещенная на единицу вправо и на единицу вверх (Рис.9.14).

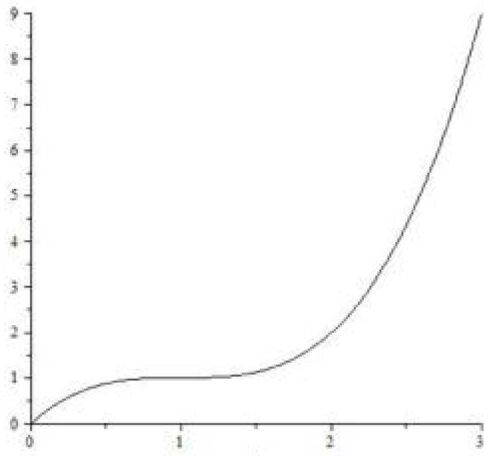


Рис.9.14 График функции $y=(x-1)^3+1$

5.4.4 **Наибольшее и наименьшее значения функции**

Для функций, непрерывных на отрезке $[a,\,b]$ справедлива *теорема Вейерштрасса*: Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\,b]$, то она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

Наибольшее и наименьшее значения функции могут достигаться либо в точках экстремумов, либо на концах отрезка $[a,\,b]$ (Рис.9.15.). Алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений состоит в следующем:

1. находим первую производную y' функции $y=f(x)$, определяем критические точки, принадлежащие интервалу $[a,\,b]$;
2. определяем значения функции в критических точках и на концах отрезка $f(a),\ f(b)$;

3. выбираем наибольшее и наименьшее значения функции сравнением значений функции в критических точках и на концах интервала.

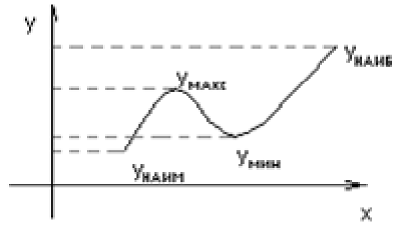


Рис.9.15. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

5.4.5 **Асимптотические свойства функций**

В приложениях математики область существования функции представляет собой, как правило, объединение отдельных интервалов непрерывности, разделенных точками разрыва первого и второго рода (см. 7.4^0).

В некоторых точках разрыва второго рода график функции с одной стороны или с двух сторон может неограниченно приближаться к вертикальной прямой, проходящей через точку разрыва. Эта линия называется вертикальной асимптотой графика функции, а поведение функции в окрестности этой точки будем называть асимптотическим. Особенности этого поведения (асимптотические свойства) исследуются с помощью односторонних пределов (см. 7.4^0 , пример 2).

Кроме точек разрыва функция может иметь «линии разрыва», которые являются наклонными или, в частном случае, горизонтальными асимптотами.

Примеры наклонных, горизонтальных и вертикальных асимптот уже рассматривались в подразделе $4.5.3^0$, посвященном гиперболе (Практикум, часть 1). Продолжим изучение различных асимптот и особенностей поведения функций в окрестности этих линий.

Определение: прямая линия называется *асимптотой* кривой (в частности, графика функции) если по мере удаления от начала координат расстояние от точки линии до асимптоты стремится к нулю

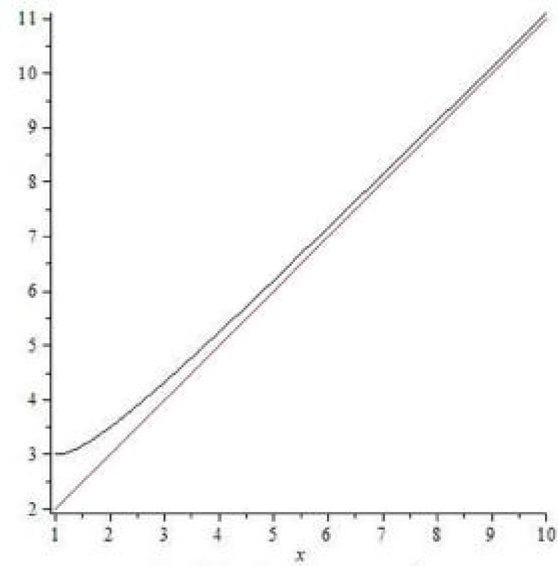


Рис. 9.16. Пример асимптоты 1

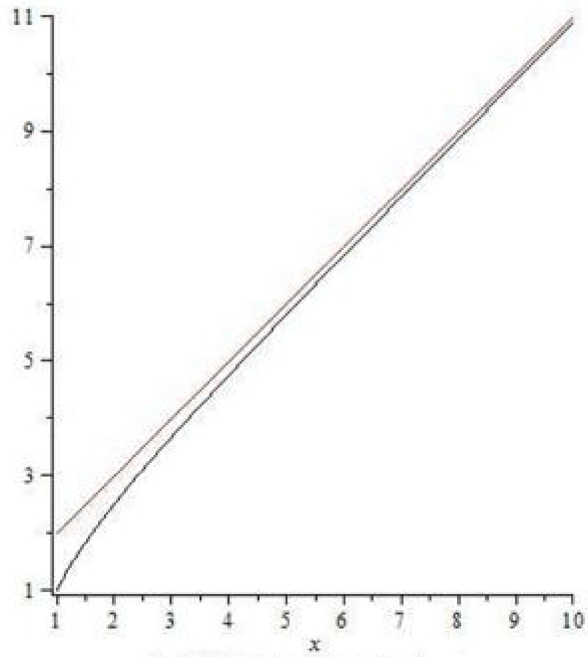


Рис.9.17. Пример асимптоты 2

Замечание: график функции может не иметь ни одной асимптоты.

Для удобства исследования функции принято различать *вертикальные* и *наклонные* асимптоты; горизонтальные асимптоты, как правило, относят к наклонным.

Если график функции неограниченно приближается к вертикальной прямой, то, очевидно, функция имеет разрыв второго рода. Поэтому вертикальные асимптоты могут быть только в точках разрыва второго рода. Алгоритм нахождения вертикальных асимптот состоит в следующем:

- находятся точки разрыва функции;

- в точках разрыва вычисляются односторонние пределы;

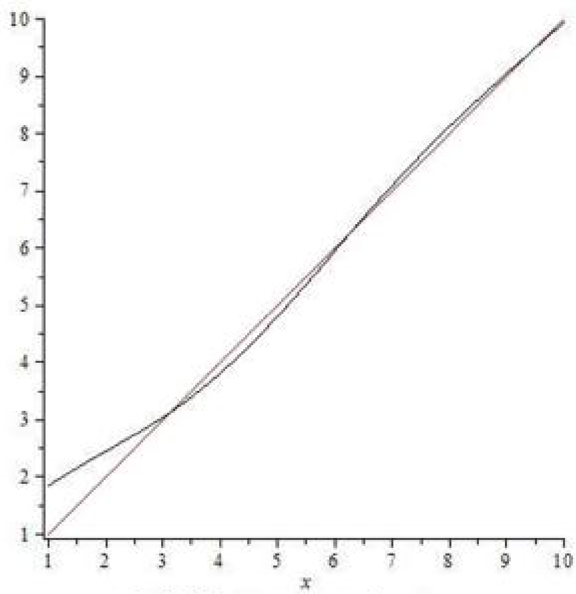
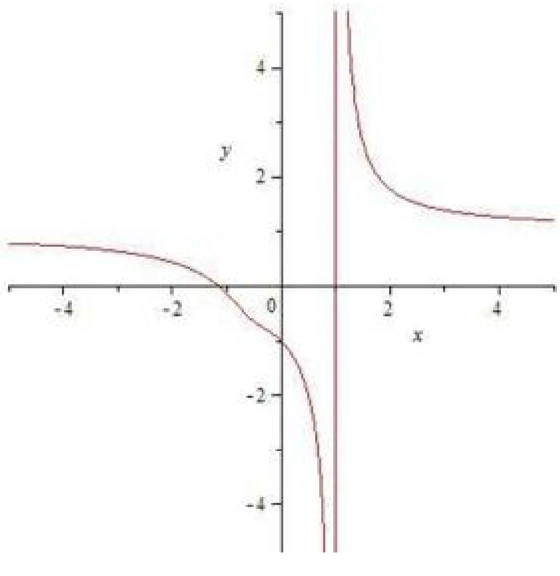


Рис.9.18. Пример асимптоты 3

- если в некоторой точке разрыва x_0 хотя бы один из односторонних пределов равен ∞ или $-\infty$, то график функции имеет вертикальную асимптоту с уравнением $x = x_0$.

Замечание: для правильного построения графика функции необходимо считать оба односторонних предела во всех точках разрыва.

Пример 1. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y = e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x-1}$;



Решение: точками разрыва функции являются $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$.

1.Вычисляем левый предел в точке $x_1 = 0$:

$\lim\limits_{x \to -0}\left(e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x-1}\right) = 0 - 1 = -1$. Предел не бесконечен, поэтому вычисляем правый предел:

$\lim\limits_{x \to +0} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x-1} \right) = 0 - 1 = -1$. Предел не бесконечен, значит, вертикальной асимптоты в точке $x_1 = 0$ нет;

2.Вычисляем левый предел в точке $x_2 = 1$: $\lim\limits_{x \to 1-0} \left(e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x-1} \right) = \frac{1}{e} - \infty = -\infty$. Предел бесконечен, значит, график функции имеет асимптоту $x = 1$.

Наклонные асимптоты предполагают неограниченное возрастание модуля аргумента x ($x \to \infty$ или $x \to -\infty$). Алгоритм нахождения наклонной асимптоты функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$ (*правой* асимптоты) состоит в следующем:

- вычисляется предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$; если этот предел не существует или бесконечен, то график функции не имеет правой асимптоты. Если $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k \in R$, то переходим к следующему пункту алгоритма:

- вычисляется предел $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx)$; если этот предел не существует или бесконечен, то график функции не имеет правой асимптоты. Если $\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b \in R$, то правая асимптота существует и ее уравнение - $y = kx + b$;

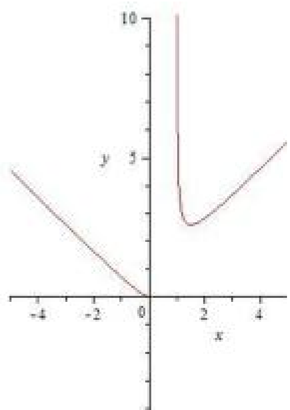


Рис.9.20 График функции Примера 2

Алгоритм нахождения левой асимптоты выглядит аналогично, только все пределы надо вычислять при $x \to -\infty$.

Пример 2. Найти наклонные асимптоты графика функции $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.

Решение: 1. ищем правую асимптоту:

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{y}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x^3}{x-1}} = \sqrt{\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3 - x^2}} = \sqrt{1} = 1$; $k = 1$;

б) $\lim\limits_{x \to \infty} (y - kx) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}} - x \right) = \lim\limits_{y \to \infty} \left(\sqrt{\frac{(y+1)^3}{y}} - (y+1) \right) = \lim\limits_{y \to \infty} \left(\sqrt{y^2 + 3y + 3 + \frac{1}{y}} - (y+1) \right) =$

$$= \lim_{y\to\infty}\left(\frac{y+2+\frac{1}{y}}{\sqrt{y^2+3y+3+\frac{1}{y}}+y+1}\right)=\frac{1}{2};$$

$b=\frac{1}{2}$. Правая асимптота есть и ее уравнение - $y=x+\frac{1}{2}$.

2.ищем левую асимптоту:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}=-\sqrt{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3-x^2}}=-\sqrt{1}=-1$; $k=-1$;

б) $\lim\limits_{x\to-\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{\frac{x^3}{x-1}}+x\right)=\lim\limits_{z\to\infty}\left(\sqrt{\frac{z^3}{z+1}}-z\right)=\lim\limits_{y\to\infty}\left(\sqrt{\frac{(y-1)^3}{y}}-(y-1)\right)=\ldots=-\frac{1}{2}$

; $b=-\frac{1}{2}$. Правая асимптота есть и ее уравнение - $y=-x-\frac{1}{2}$.

Тема 6: Полное исследование функции и построение графика

6.1 **Исходные положения**

Полным исследованием будем называть исследование поведения функции в области ее естественного существования. Такое исследование целесообразно разбивать на два этапа:

- определение существенных свойств функции без использования производных (первый этап);

- то же с использованием производных функции (второй этап);

По результатам первого этапа строится предварительный эскиз графика функции, на котором в графической форме отражаются изученные на первом этапе свойства функции и прогнозируемые (предполагаемые) особенности ее поведения.

После этого выполняют второй этап исследования функции с использованием производных и затем строят окончательный график функции.

6.2 **Общая схема полного исследования функции и построение графика в области существования**

Пусть функция задана своим аналитическим выражением в явной форме $y = f(x)$.

1) *Исследование функции без использования производных*.

1.1. Находим область существования функции $X = D(f)$.

Замечание: у большинства функций, с которыми предстоит работать инженерам, областью существования является интервал (конечный, бесконечный или полубесконечный) или объединение конечного числа непересекающихся интервалов.

К области существования будем относить все значения аргумента, при которых функция непрерывна. Следовательно, в область существования элементарной функции не входят:

- значения аргумента, приводящие к делению на ноль, где функция терпит разрыв; в частности, отдельные значения аргумента для тангенса и котангенса;

- значения аргумента, при которых под корнем четной степени подкоренное выражение становится отрицательным;

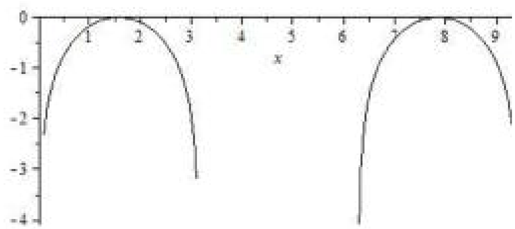
- значения аргумента, при которых под знаком логарифма выражение отрицательно или равно нулю;

- значения аргумента, при которых под знаком арксинуса или арккосинуса выражение превосходит по модулю единицу;

После исключения указанных значений аргумента область существования представляют в виде объединения интервалов непрерывности, в которых значения функции являются действительными числами. Интервалы непрерывности разделяются точками разрыва или *интервалами разрыва*. Например, область существования функции $y = \ln\cos x$ имеет области разрыва, в которых $\cos x \le 0$: $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$

(Рис,10.1) $n \in Z$.

1.2. Определяем вертикальные асимптоты на концах интервалов непрерывности и исследуем асимптотическое



поведение функции на основе односторонних пределов в окрестности каждого из концов интервалов непрерывности.

1.3. Находим наклонные и горизонтальные асимптоты. При их наличии исследуем асимптотическое поведение функции.

Замечание: для дробно-рациональных функций, представляющих собой отношение многочленов, левая и правая асимптоты совпадают (если хотя бы одна из них существует).

После определения уравнений асимптот исследуют асимптотическое поведение функции. Вычисляется предел $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)$, где $y=kx+b$ - уравнение асимптоты. Если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=+0$, то график функции расположен над правой асимптотой, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=-0$, то – под правой асимптотой. Для определения поведения функции относительно левой асимптоты аналогично рассматривается предел $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-kx-b)$.

Пример. Найти асимптоты и исследовать асимптотическое поведение функции $f(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

Решение: из аналитического выражения функции следует, что функция существует при $x>0$ и терпит разрыв в точке $x_0=0$, поэтому область существования функции - $D(f)=\{x \mid x\in(0,\infty)\}$. Поскольку $\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\infty$, то имеется вертикальная асимптота $x=0$.

Рис.10.2 Пример 1, эскиз графика

Левой асимптоты быть не может, т.к. функция не определена при $x\to-\infty$. Предположим, что существует правая асимптота $y=kx+b$, тогда:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2};$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=0.$$

Таким образом, имеет место наклонная асимптота $y=\dfrac{1}{2}x$, проходящая через начало координат.

Исследуем асимптотическое поведение функции около наклонной асимптоты при $x \to \infty$:

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x) - kx - b\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}x\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +0$, значит, функция расположена выше асимптоты.

Для проверки асимптотического поведения функции можно использовать способ пробных точек. Для этого в случае вертикальной асимптоты выбирают значения аргумента, приближающиеся к точке разрыва и определяют знак и числовое значение функции. По этим данным судят о правильности вычисления одностороннего предела. Для рассмотренного примера в окрестности точки разрыва $x_0 = 0$ результаты вычислений приведены в таблице

$x_{пр}$	0,01	0,0001
$y(x_{пр})$	10,005	100,00005

Из таблицы следует, что при $x_{ïð} \to \infty$ числовые значения резко возрастают, оставаясь положительными. Значит, действительно, в окрестности точки разрыва функция стремится к ∞ (а не к $-\infty$).

В случае наклонной (или горизонтальной) асимптоты выбираются пробные точки существенно (на один-два порядка) удаленные от начала координат. В нашем примере имеем:

$x_{ïð}$	16	100	10000
$y(x_{пр})$	8,25	50,1	5000,01
$kx_{пр} + b$	8	50	5000
$y(x_{пр}) - kx_{пр} - b$	0,25	0,1	0,01

Из таблицы следует, что разность $y(x_{пр}) - kx_{пр} - b$ стремится к нулю именно справа, что подтверждает правильность аналитических вычислений.

1.4. Исследуем функцию на четность-нечетность и периодичность.

Из геометрического смысла четности и нечетности следует, что четную или нечетную функцию можно исследовать только при положительных (или только при отрицательных) значениях аргумента, а затем симметрично продолжить на оставшуюся часть области существования.

Если исследуемая функция является периодической с периодом T, то достаточно исследовать ее на любом промежутке длины T, построить график и далее повторять его вправо и влево.

1.5. Определяем точки пересечения графика функции с осями координат

Для определения точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Oy достаточно подставить ноль вместо аргумента: $y_0 = f(0)$. Для определения точек пересечения графика с осью Ox необходимо решить уравнение $f(x) = 0$.

В рассмотренном выше примере ноль вместо аргумента подставлять нельзя, т.к. он не входит в область существования функции. Значит, график функции не пересекает оси ординат. Решим уравнение: $\frac{x}{2} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$: $\frac{x\sqrt{x} + 2}{2\sqrt{x}} = 0$; $x\sqrt{x} = -2$ уравнение не имеет решений. Значит, график функции не пересекает и оси абсцисс.

1.6. Определяем интервалы знакопостоянства функции, т.е. такие, где $f(x) < 0$ и где $f(x) > 0$. Эти интервалы разделены нулями функции, точками и (или) интервалами разрыва. Для их нахождения можно применять метод интервалов.

1.7. Систематизируем результаты первого этапа и, используя их, строим асимптоты, отмечаем стрелками асимптотическое поведение функции, указываем точки пересечения с осями координат. Предполагаемый график функции указываем пунктиром (Рис. 10.2.).

2) *Исследование функции с использованием производных*

2.1. Находим первую производную исследуемой функции $y' = f'(x)$. На основе анализа первой производной как новой функции определяем критические точки первого рода, которые образуют, в общем случае, три подмножества:

- точки, входящие в область существования функции, в которых производная не существует;

- точки, входящие в область существования функции, в которых производная бесконечна;

- точки, входящие в область существования функции (точки стационарности), в которых производная равна нулю.

Точки стационарности находят как нули производной из уравнения $f^{'}(x)=0$.

2.2. Находим вторую производную исследуемой функции $y^{"}=f^{"}(x)$. На основе анализа первой производной как новой функции определяем критические точки первого рода, которые образуют, в общем случае, три подмножества:

- точки, входящие в область существования функции, в которых вторая производная не существует;

- точки, входящие в область существования функции, в которых вторая производная бесконечна;

- точки, входящие в область существования функции, в которых вторая производная равна нулю (эти точки определяют как корни уравнения $f^{"}(x)=0$.

2.3. Составляем сводную таблицу результатов исследований

Область существования функции разбивается на отдельные интервалы, разделенные точками разрыва, нулями функции, критическими точками первого и второго рода, которые выделяются отдельными строками. Результаты первого этапа и данные пп.2.1 и 2.2. указываем в сводной таблице (графы 1, 2 и частично 3, 4, 5). Остальные графы заполняют после выполнения последующих пунктов второго этапа.

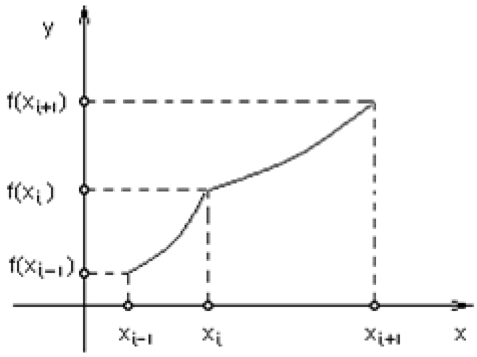


Рис. 10.3. Пример построения графика функции по таблице

Пусть $x_1, x_2 ..., x_n$ - все перечисленные точки, записанные в порядке возрастания. Приведен фрагмент таблицы, показывающий поведение функции на двух интервалах. Эскиз графика функции на этих двух интервалах приведен на рис.10.3.

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f^{'}(x)$	Знак второй производной функции $f^{"}(x)$	Краткая характеристика поведения функции

1	2	3	4	5
...	…	…	…	…
$(x_{i-1},\, x_i)$	+	+	+	Положительна, возрастает, выпукла вниз
x_i	$f(x_i)$			экстремума нет, перегиба нет
$(x_i,\, x_{i+1})$	+	-	+	Положительна, убывает, выпукла вниз
…	…	…	…	…

2.4. Определяем монотонность и выпуклость вверх и вниз в интервалах, приведенных в сводной таблице методом пробных точек.

2.5. Определяем наличие экстремумов в критических точках первого рода первым способом. В случае гладкой функции в исследуемом интервале дополнительно производим проверку вторым способом по знаку второй производной в критической точке.

2.6. Определяем наличие перегибов функции в критических точках второго рода. Если в какой-либо из этих точек вторая производная не существует или бесконечна, то для определения перегиба функции используем односторонние производные второго порядка.

2.7. Строим график функции с использованием предварительного эскиза графика, полученного в первом этапе исследования, а также с использованием данных сводной таблицы.

Построение графика функции на каждом интервале $(x_{i-1},\, x_i)$ после заполнении таблицы будет сводиться либо к соединению двух точек $M_{i-1}(x_{i-1},\, f(x_{i-1}))$, $M_i(x_i,\, f(x_i))$ линией с требуемым характером выпуклости, либо к проведению линии из одной из данных точек к данной асимптоте с требуемым характером асимптотического поведения функции.

6.3 **Пример полного исследования гладкой функции и построение графика**

Пусть дана функция $y = f(x) = 6x^2 e^{-x^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Выполняем первый этап исследования свойств и поведения функции без использования производной.

1.1. Исследуем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

1.1.1. Определяем непрерывность функции: устанавливаем наличие точек и интервалов разрыва, интервалы непрерывности и область естественного существования функции.

Функция $y = 6x^2 e^{-x^2}$ принимает конечные значения при любом значении аргумента x из множества действительных чисел $x \in (x \in R)$. Поэтому область существования представляет собой неограниченный интервал $D(f) = (-\infty, \infty)$.

1.1.2. Проверяем симметричность (четность-нечетность) функции.

Функция является четной, т.к. $f(-x) = 6(-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$. Вследствие четности функция имеет вертикальную ось симметрии Oy, и исследование функции далее можно проводить при $x \geq 0$ (в полубесконечном интервале $[0, \infty)$).

1.1.3. Функция не является периодической, т.к. $f(x) = f(x+T)$ только при $T = 0$.

1.2. Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Точки пересечения графика функции с осью Ox называют нулями (нулевыми точками) функции.

$y = 6x^2 e^{-x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$, таким образом, функция касается оси Ox в начале координат $(0,0)$ и пересекает ось Oy в той же точке.

1.3. Определяем интервалы знакопостоянства функции. Проверку проводим при $x \geq 0$ методом пробных точек. При $x_{пр} = 1$ имеем $y(1) = 6 \cdot 1^2 \cdot e^{-1^2} = \frac{6}{e} \approx 2{,}752$. Таким образом, правая часть графика функции лежит над осью Ox. Аналогично и левая часть графика, в силу симметричности, лежит над осью Ox.

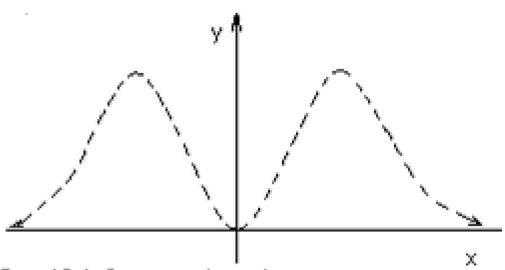


Рис. 10.4. Эскиз графика функции

Интервал знакопостоянства единственен и совпадает с интервалом непрерывности $(-\infty, \infty)$.

1.4. Определяем наличие асимптот. Вертикальных асимптот нет, т.к. функция не имеет точек разрыва. Проверяем наличие наклонных и горизонтальных асимптот при $x \to \infty$. Пусть уравнение асимптоты - $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 e^{-x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{3}{\infty}\right] = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{12x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^{x^2}} = 0.$$

При $x \to \infty$ имеется горизонтальная асимптота $y = 0$. Значит, в силу четности, та же прямая является асимптотой и при $x \to -\infty$. Поскольку $y = 6x^2 e^{-x^2} \geq 0$ при любом значении x, то все числовые значения функции лежат над асимптотой.

1.5. Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа (рис. 10.4.):

- график симметричен относительно оси Oy и не имеет точек разрыва;

- ось Ox является горизонтальной асимптотой и график находится над асимптотой;

- нуль функции имеет место при $x = 0$;

2. Выполняем второй этап исследования свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода:

$y' = \left(6x^2 e^{-x^2}\right)' = 6 \cdot 2xe^{-x^2} + 6x^2(-2x)e^{-x^2} = 12\left(x - x^3\right)e^{-x^2}$, при $y' = 0$ имеем $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$. Для правой части графика имеем две критические точки первого рода $M_1(0, 0), M_2\left(1, \frac{6}{e}\right)$.

2.2. Находим критические точки второго рода:

$$y'' = \left(12\left(x - x^3\right)e^{-x^2}\right)' = 12\left(\left(1 - 3x^2\right)e^{-x^2} + \left(x - x^3\right)(-2x)e^{-x^2}\right) = 12e^{-x^2}\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right);$$

$$y'' = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{4}}; x_4 \approx -1{,}51;\ x_5 \approx -0{,}468;\ x_6 \approx 0{,}468;\ x_7 \approx 1{,}51.$$

В правой части графика функции (при $x \geq 0$) имеем две критические точки второго рода $M_3(0{,}468,\ 1{,}635)$, $M_2(1{,}51,\ 1{,}4)$.

2.3. Составляем сводную таблицу результатов для правой части графика функции:

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
x =0	**0**	0	+	**Нуль функции**, критическая точка первого рода - минимум
(0; 0,468)	**+**	+	+	Возрастает, выпукла вниз
x = 0,468	1,635		0	Критическая точка второго рода - перегиб
(0,468; 1)	**+**	+	-	Возрастает, выпукла вверх
x = 1	2,752	0	-	Критическая точка первого рода - максимум
(1; 1,51)	**+**	-	-	Убывает, выпукла вверх
x=1,51	1,4		0	Критическая точка второго рода – точка

				перегиба
$(1{,}51;\ \infty)$	**+**	-	+	Убывает, выпукла вниз

Замечание: данные, выделенные жирным шрифтом, указаны по результатам первого этапа, подчеркнутые данные приведены по результатам 2.1., 2.2. Остальные данные заполняются по результатам 2.4. – 2.7.

В первом столбце приведены характерные точки графика и интервалы, разделенные этими точками.

2.4. Определяем интервалы монотонности, выпуклости и вогнутости методом пробных точек в интервалах, указанных в сводной таблице.

Интервал $x \in (0;\ 0{,}468)$: $x_{ïð} = 0{,}1$; $y'(0{,}1) = 12\left(0{,}1 - 0{,}1^3\right)e^{-0{,}1^2} > 0$ - функция возрастает;

$y''(0{,}1) = 12e^{-0{,}1^2}\left(1 - 5(0{,}1)^2 + 2(0{,}1)^4\right) > 0$ - функция выпукла вниз.

Интервал $x \in (0{,}468;\ 1)$: $x_{ïð} = 0{,}6$; $y'(0{,}6) = 12\left(0{,}6 - 0{,}6^3\right)e^{-0{,}6^2} > 0$ - функция возрастает;

$y''(0{,}6) = 12e^{-0{,}6^2}\left(1 - 5(0{,}6)^2 + 2(0{,}6)^4\right) < 0$ - функция выпукла вверх.

Интервал $x \in (1;\ 1{,}51)$: $x_{ïð} = 1{,}2$; $y'(1{,}2) = 12\left(1{,}2 - 1{,}2^3\right)e^{-1{,}2^2} < 0$ - функция убывает;

$y''(1{,}2) = 12e^{-1{,}2^2}\left(1 - 5(1{,}2)^2 + 2(1{,}2)^4\right) < 0$ - функция выпукла вверх.

Интервал $x \in (1{,}51;\ \infty)$: $x_{ïð} = 2$; $y'(2) = 12\left(2 - 2^3\right)e^{-2^2} < 0$ - функция убывает;

$y''(2) = 12e^{-2^2}\left(1 - 5(2)^2 + 2(2)^4\right) > 0$ - функция выпукла вниз.

Полученные данные вносим в таблицу.

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках.

Указанные точки являются точками стационарности, поэтому можно использовать любое из двух достаточных условий экстремума. Применим первое достаточное условие экстремума:

Точка стационарности $x = 0$: $\begin{cases} y'(x<0)<0 \\ y'(x>0)>0 \end{cases} \Rightarrow$ минимум

Точка стационарности $x = 1$: $\begin{cases} y'(x<1)>0 \\ y'(x>1)<0 \end{cases} \Rightarrow$ максимум.

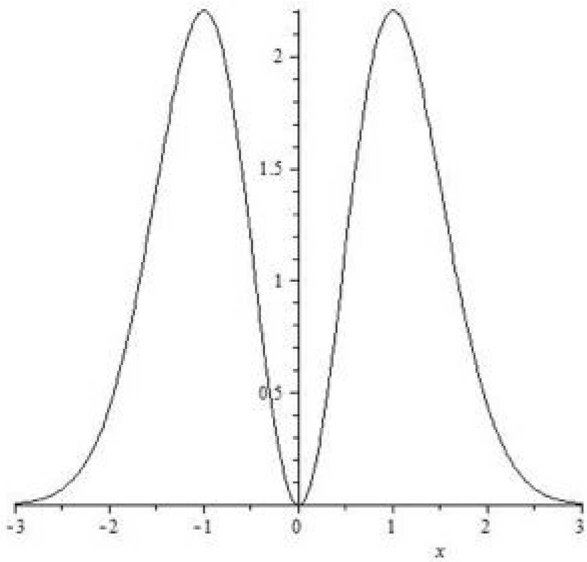


Рис. 10.5. График функции $y=6x^2e^{-x^2}$

Функция является гладкой (имеет первую и вторую производную), поэтому для проверки используем второе достаточное условие экстремума.

Проверка: При $x = 0$: $y''(0) > 0$ - минимум; при $x = 1$: $y''(0) < 0$ - максимум.

2.6. Определим возможные точки перегиба среди критических точек второго рода.

Точка $x \approx 0{,}468$: при $x_{np} = 0{,}1 < 0{,}468$ получим $f''(0{,}1) > 0$,

при $x_{np} = 0{,}6 > 0{,}468$ получим $f''(0{,}6) < 0 \Rightarrow$ перегиб.

Точка $x \approx 1{,}51$: при $x_{np} = 1{,}2 < 1{,}51$ получим $f''(1{,}2) < 0$,

при $x_{np} = 2 > 1{,}51$ получим $f''(0{,}6) > 0 \Rightarrow$ перегиб.

2. По данным сводной таблицы и эскизу графика строим график функции на всей области существования, используя его симметричность относительно оси Oy.

6.4 **Пример полного исследования функции с особой точкой и построение графика**

Пусть дана функция $y = f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Первый этап – исследование без использования производных.

Исследуем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

Функция непрерывна в интервале $(-\infty,\infty)$, так как не имеет точек и интервалов разрыва. Область естественного существования функции включает один интервал непрерывности $D(f)=(-\infty,\,\infty)$.

Функция несимметрична относительно оси Oy и начала координат, т.е. не является ни четной, ни нечетной: $f(-x)=-x-\sqrt[3]{(-x)^2}=-x-\sqrt[3]{x^2}\neq\pm f(x)$.

Функция не является периодической: $f(x)\neq f(x+T)$ при $T\neq 0$. Таким образом, функция непрерывна, несимметрична и непериодична, поэтому должна исследоваться на на всем интервале непрерывности.

Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Определяем нули функции: $x-\sqrt[3]{x^2}=0\Rightarrow x=\sqrt[3]{x^2}\Rightarrow x^3=x^2\Rightarrow x^2(x-1)=0\Rightarrow x_1=x_2=0,x_3=1$. Таким образом, функция касается оси Ox в начале координат и пересекает эту ось в точке $x=1$. Ось Oy функция пересекает в точке $x=0$. Точки $x=0$ и $x=1$ являются нулями функции.

Определяем интервалы знакопостоянства функции. Интервал непрерывности делится нулями функции на три интервала знакопостоянства $(-\infty,0)$, $(0,1)$, $(1,\infty)$. Определяем знаки функции в указанных интервалах методом пробных точек.

Интервал $(-\infty,0)$: $x_{пр}=-1\Rightarrow y(-1)=-2<0$;

Интервал $(0,1)$: $x_{пр}=0{,}1\Rightarrow y(0{,}1)=0{,}1-\sqrt[3]{0{,}01}<0$;

Интервал $(1,\infty)$: $x_{пр}=2\Rightarrow y(2)=2-\sqrt[3]{4}>0$.

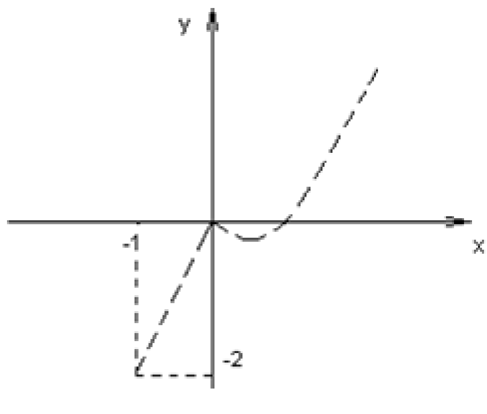
Определяем наличие асимптот, а при их наличии исследуем асимптотическое поведение функции.

Функция непрерывна в области своего существования, поэтому вертикальные асимптоты отсутствуют. Определяем наличие наклонных и горизонтальных асимптот.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\sqrt[3]{\frac{1}{x}}\right)=1;$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(x-\sqrt[3]{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^2}=\infty.$$

График не имеет наклонных и горизонтальных асимптот.



Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа(Рис.10.6):

- функция общего вида не имеет точек разрыва и асимптот;

- нули функции имеют место при $x=0$ и $x=1$;

- в интервалах $(-\infty,0)$ и $(0,1)$ функция отрицательна, в интервале $(1,\infty)$ - положительна;

- в пробной точке $x=-1$ значение функции $y(-1)=2$.

2. Исследование свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода:

$y'=\left(x-\sqrt[3]{x^2}\right)'=1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$. При $x=0$ производная $y'(0)$ не существует (правая производная равна $-\infty$, а левая ∞). При $1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}=0$ получим $x=\dfrac{8}{27}$, $y\left(\dfrac{8}{27}\right)=-\dfrac{4}{27}$.

Имеется две критические точки первого рода, из которых первая $(x=0)$ является особой, а вторая $\left(x=\dfrac{8}{27}\right)$ - стационарной точкой.

2.2. Находим критические точки второго рода:

$y''=\left(1-\dfrac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}\right)'=-\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{3}\right)x^{-\frac{4}{3}}=\dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}\neq 0$, поэтому, имеется одна критическая точка второго рода - $x=0$.

2.3. Составляем сводную таблицу результатов, необходимых для построения графика

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
$(-\infty,0)$	-	+	+	Возрастает, выпукла вниз
$x=0$	0	Не существует	Не существует	Нуль функции,

				критическая точка первого рода – максимум, критическая точка второго рода – перегиба нет
$\left(0,\ \frac{8}{27}\right)$	-	-	+	Убывает, выпукла вниз
$x=\frac{8}{27}$	$-\frac{4}{27}$	0	+	Критическая точка первого рода - минимум
$\left(\frac{8}{27},\ 1\right)$	-	+	+	Возрастает, выпукла вниз
$x=1$	0			Нуль функции
$(1,\ \infty)$	+	+	+	Возрастает, выпукла вниз

2.4. Определяем характер монотонности и выпуклости в интервалах, приведенных в сводной таблице:

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{ïð}=-1$, $y^{'}(-1)=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{-1}}>0$, функция возрастает;

$y^{''}(-1)=\frac{2}{9(-1)\sqrt[3]{-1}}>0$, функция выпукла вниз.

Интервал $\left(0,\ \frac{8}{27}\right)$: $x_{пр}=0{,}1$, $y^{'}(0{,}1)=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{0{,}1}}<0$, функция убывает;

$y^{''}(0{,}1)=\frac{2}{9\cdot 0{,}1\sqrt[3]{0{,}1}}>0$, функция выпукла вниз.

Интервал $\left(\frac{8}{27},1\right)$: $x_{пр}=0{,}5$, $y'(0{,}5)=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{0{,}5}}>0$, функция возрастает;

$y''(0{,}5)=\frac{2}{9\cdot 0{,}5\sqrt[3]{0{,}5}}>0$, функция выпукла вниз.

Интервал $(1,\infty)$: $x_{пр}=2$, $y'(2)=1-\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}>0$, функция возрастает;

$y''(2)=\frac{2}{9\cdot 2\sqrt[3]{2}}>0$, функция выпукла вниз.

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках первого рода. В особой точке $x=0$ возможен «острый» экстремум. Проверим это, используя первое достаточное условие наличия экстремума:

$$\begin{cases} x_{ïð}=-1<0, & y'(-1)>0 \\ x_{ïð}=0{,}1>0, & y'(0{,}1)<0 \end{cases} \Rightarrow$$ в точке $x=0$ - максимум.

Критическая точка первого рода $x=\frac{8}{27}$ является точкой стационарности. Используем первый способ определения экстремума:

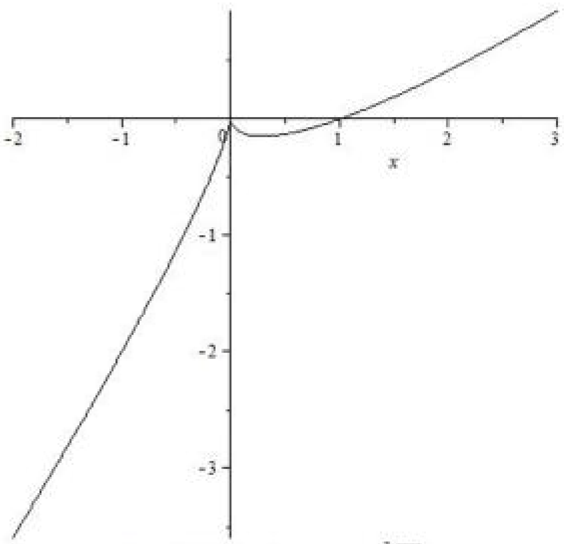


Рис. 10.7. График функции $y=x-\sqrt[3]{x^2}$

$$\begin{cases} x_{пр}=0{,}1<\frac{8}{27}, & y'(0{,}1)<0 \\ x_{пр}=0{,}5>\frac{8}{27}, & y'(0{,}5)>0 \end{cases} \Rightarrow$$ в точке $x=0$ - минимум.

В точке $x=\frac{8}{27}$ функция гладкая, поэтому для проверки используем второе достаточное условие наличия экстремума.

Проверка: при $x=\frac{8}{27}$ имеем

$y''\left(\frac{8}{27}\right)=\frac{2}{9\cdot\frac{8}{27}\sqrt[3]{\frac{8}{27}}}>0$ - минимум.

2.6. Определяем, является ли критическая точка второго рода точкой перегиба.

$$\begin{cases} x_{пр} = -1 < 0, & y''(-1) > 0 \\ x_{пр} = 0{,}1 > 0, & y'(0{,}1) > 0 \end{cases} \Rightarrow$$ в точке $x = 0$ перегиба нет.

2.7. По данным сводной таблицы и эскизу графика функции строим график (Рис.10.7).

6.5 **Пример полного исследования разрывной функции и построение графика**

Дана функция $y = f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$. Требуется провести полное исследование функции и построить ее график.

1. Исследование без использования производных

Анализируем общие свойства функции (непрерывность, симметричность, периодичность)

Функция определена на всей числовой за исключением точки $x = 1$, являющейся точкой разрыва второго рода $(y(1) = \infty)$. Область естественного существования функции состоит из двух интервалов непрерывности $D(f) = (-\infty,\, 1) \cup (1,\, \infty)$.

Функция несимметрична относительно оси Oy и начала координат, т.к. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x-1)^2} = \dfrac{-x^3}{(x+1)^2} \neq \pm f(x)$.

Функция не является периодической (это следует, например, из того, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, т.е. поведение функции на бесконечности не повторяется)

Таким образом, имеем функцию общего вида с одной точкой разрыва. Из-за общего характера функции ее необходимо исследовать во всех точках интервалов непрерывности.

Находим координаты точек пересечения графика функции с осями координат. Сначала определяем нули функции из уравнения $\dfrac{x^3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow y = 0$ при $x = 0$. Ось Oy функция пересекает при $x = 0$, точка $x = 0$ является нулем функции.

Определяем интервалы знакопостоянства функции.

Интервал непрерывности $(-\infty,\, 1)$ делится нулем функции $x = 0$ на два интервала знакопостоянства $(-\infty,\, 0)$ и $(0,\, 1)$. Интервал знакопостоянства $(1,\, \infty)$ совпадает с интервалом непрерывности. Определим знаки функции в указанных интервалах:

Интервал $(-\infty,\,0)$: $x_{ïð} = -1$, $y(-1) = \dfrac{(-1)^3}{(-1-1)^2} = -\dfrac{1}{4} < 0$;

Интервал $(0,\,1)$: $x_{пр} = 0{,}5$, $y(0{,}5) = \dfrac{(0{,}5)^3}{(0{,}5-1)^2} = \dfrac{1}{2} > 0$;

Интервал $(1,\,\infty)$: $x_{пр} = 2$, $y(2) = \dfrac{(2)^3}{(2-1)^2} = 8 > 0$.

Определяем асимптотическое поведение функции в окрестности точки разрыва второго рода с помощью односторонних пределов. $\lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = \infty$. В окрестности точки разрыва $x = 1$ функция стремится к ∞ слева и справа. Значит, имеется вертикальная асимптота с уравнением $x = 1$.

Проверим наличие наклонной асимптоты $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{(x-1)^2} = 2.$$

Рис. 10.8. Эскиз графика функции

Таким образом, как при $x \to \infty$, так и при $x \to -\infty$, имеет место наклонная асимптота $y = x + 2$. Определим характер приближения к асимптоте графика функции.

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - kx - b\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x - 2\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{3x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2(x-1)} = +0.$$

При $x \to \infty$ график функции лежит выше наклонной асимптоты.

$$\lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - kx - b\right) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x - 2\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3}{2(x-1)} = -0.$$

При $x \to -\infty$ график функции лежит ниже наклонной асимптоты.

Изображаем эскиз графика функции по результатам первого этапа исследования (Рис.10.8):

- график имеет две ветви, разделенные вертикальной асимптотой $x = 1$; ветви возле асимптоты стремятся к $+\infty$ слева и справа;

- при $x \to -\infty$ ветвь графика стремится снизу к наклонной асимптоте $y = x + 2$; при $x \to \infty$ ветвь графика стремится к той же асимптоте сверху;

- нуль функции $y = 0$ имеет место при $x = 0$;

- в интервале $(-\infty,\ 0)$ функция отрицательна, а в интервалах $(0,\ 1)$ и $(1,\ \infty)$ - положительна;

- известны координаты функции в пробных точках: $y(-1) = -\frac{1}{4}$, $y(0{,}5) = 0{,}5$, $y(2) = 8$;

2. Исследование свойств функции с использованием производных

2.1. Находим критические точки первого рода: $y' = \left(\frac{x^3}{(x-1)^2}\right)' = \ldots = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2}$;

$\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0,\ x_3 = 3$. Имеем две критические точки первого рода, являющиеся точками стационарности. Находим значения функции в этих точках: $y(0) = 0$,

$y(3) = \frac{3^3}{(3-1)^2} = 6{,}75$; $M_1(0,\ 0)$, $M_2(3,\ 6{,}75)$.

2.2. Находим критические точки второго рода: $y'' = \left(\frac{x^2(x-3)}{(x-1)^2}\right)' = \ldots = \frac{6x}{(x-1)^4}$;

$\frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0$. Получили одну критическую точку второго рода $M_1(0,\ 0)$, которая совпадает с точкой стационарности.

2.3. Составим сводную таблицу результатов, необходимых для построения графика.

Характерные точки (x) и интервалы	Знак или числовое значение функции $f(x)$	Знак первой производной функции $f'(x)$	Знак второй производной функции $f''(x)$	Краткая характеристика поведения функции
$(-\infty, 0)$	-	+	-	Отрицательна, возрастает,

				выпукла вверх
$x=0$	0	0	0	Нуль функции, критическая точка первого рода – экстремума нет, критическая точка второго рода – перегиб
$(0,\ 1)$	+	+	+	Положительна, возрастает, выпукла вниз
$x=1$				Точка разрыва второго рода
$(1,\ 3)$	+	-	+	Положительна, убывает, выпукла вниз
$x=3$	6,75	0	$\pm$	Критическая точка первого рода - минимум
$(3,\ \infty)$	+	+	+	Положительна, возрастает, выпукла вниз

2.4. Определяем характер монотонности и выпуклости функции в интервалах, приведенных в сводной таблице:

Интервал $(-\infty, 0)$: $x_{\text{ïð}} = -0{,}5$, $y'(-0{,}5) > 0$, $y''(-0{,}5) < 0$ - функция возрастает и выпукла вверх;

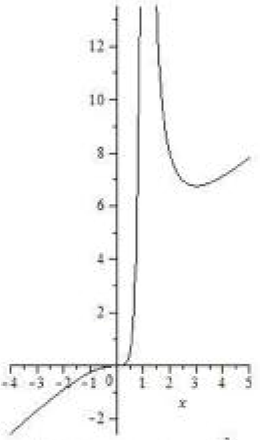


Рис.10.9. График функции $y=\frac{x^3}{(x-1)^2}$

Интервал $(0,\ 1)$: $x_{np} = 0{,}5$, $y'(0{,}5) > 0$, $y''(0{,}5) > 0$ - функция возрастает и выпукла вниз;

Интервал $(1,\ 3)$: $x_{np} = 2$, $y'(2) < 0$, $y''(0{,}5) > 0$ - функция убывает и выпукла вниз;

Интервал $(3,\ \infty)$: $x_{\text{iд}} = 4$, $y'(4) > 0$, $y''(4) > 0$ - функция возрастает и выпукла вниз;

Заносим полученные результаты в сводную таблицу.

2.5. Определяем возможные экстремумы в критических точках первого рода

Данные точки являются точками стационарности ($y' = 0$), поэтому можно использовать два достаточных условия экстремума. Согласно первому условию в окрестности точки $M_1(0,\ 0)$ первая производная не меняет свой знак $\left(y'(-0{,}5) > 0,\ y'(0{,}5) > 0\right)$, поэтому она не является точкой экстремума.

В окрестности точки $M_2(3,\ 6{,}75)$ первая производная меняет свой знак $\left(y'(2) < 0,\ y'(4) > 0\right)$ с плюса на минус, значит, в данной очке – минимум. Проверим это, используя второе достаточное условие экстремума: $y''(3) = \dfrac{6 \cdot 3}{(3-1)^2} > 0$ - минимум.

2.6. Определяем, является ли критическая точка второго рода $M_1(0,\ 0)$ точкой перегиба.

В окрестности точки $x = 0$ вторая производная изменяет свой знак $\left(y''(-0{,}5) < 0,\ y'(0{,}5) > 0\right)$, значит, $M_1(0,\ 0)$ - точка перегиба.

2.7. По данным сводной таблицы и эскизу графика строим график функции (Рис.10.9).

Тема 7: Общие методы вычисления неопределенных интегралов

7.1 **Исходные положения**

Методы дифференциального исчисления позволяют по известной функции $F(x)$ найти ее производную или дифференциал

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x),\ dF(x) = f(x)dx\,.$$

Интегральное исчисление позволяет решать обратную задачу: по известной производной $f(x)$ неизвестной функции $F(x)$ найти указанную функцию.

Функция $F(x)$, удовлетворяющая условию $F^{'}(x) = f(x)$, называется *первообразной* функции $f(x)$. Каждой функции $f(x)$ соответствует множество первообразных, отличающихся друг от друга на произвольную постоянную $(F(x)+C)$.

Определение: множество всех первообразных $\{F(x)+C \mid C \in R\}$ функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$.

В математической (символьной) форме неопределенный интеграл представляется так:

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

где $\int$ - знак интеграла, x - переменная интегрирования, $f(x)$ - подынтегральная функция, $F(x)$ - первообразная функции $f(x)$ (любая), C - произвольная постоянная.

Задачи к разделу 12.1

12.1.1. Докажите, что следующие множества функций задают один и тот же неопределенный интеграл: а) $\frac{x^2}{2} - x + C_1$ и $\frac{(x-1)^2}{2} + C_2$; б) $\frac{\sin^2 x}{2} + C_1$ и $-\frac{\cos 2x}{4} + C_2$; в) $\ln 2x + C_1$ и $\ln 5x + C_2$;

7.2 **Основные свойства неопределенных интегралов**

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)^{'} = (F(x)+C)^{'} = f(x)$$

На основании этого свойства правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием первообразной. После дифференцирования должны получить подынтегральную функцию $f(x)$.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции с точностью до произвольной постоянной: $\int dF(x) = F(x) + C$.
3. Дифференциал от неопределенного интеграла равен дифференциалу первообразной и равен подынтегральному выражению: $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx$.

Из свойств 2 и 3 следует, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно компенсируют друг друга.

4. Постоянный множитель можно вносить под знак интеграла (и дифференциала) и выносить из-под него: $A\int f(x)dx = \int Af(x)dx = \int f(x)d(Ax)$.
5. Неопределенный интеграл от линейной комбинации конечного числа функций равен линейной комбинации интегралов от этих функций:

$$\int (A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots A_n f_n(x))dx = A_1 \int f_1(x)dx + A_2 \int f_2(x)dx + \ldots A_n \int f_n(x)dx$$

Свойства 4 и 5 являются линейными свойствами неопределенного интеграла.

6. Любая формула для вычисления интеграла сохраняет свой вид, если переменную интегрирования в подынтегральном выражении заменить на дифференцируемую функцию $u = u(x)$. В математической форме это можно представить так: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = u(x)$ - произвольная дифференцируемая функция.

Это свойство вытекает из независимости (инвариантности) формы дифференциала сложной функции от выбора переменной (основной или промежуточной).

7.3 **Табличные интегралы**

Каждая формула для производной конкретной функции $F'(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ может быть обращена и представлена в виде $\int f(x)dx = \int dF(x) = F(x) + C$.

Пример. $(\sin x)' = \cos x \Rightarrow \int \cos x dx = \sin x + C$.

Используя данный способ вычисления и свойства неопределенных интегралов, составляют список основных табличных интегралов, первообразные которых являются основными элементарными функциями, а производные от правых частей совпадают с подынтегральными функциями. Этот список расширяют за счет нескольких интегралов, наиболее часто встречающихся при вычислениях. Кроме того, в исходную таблицу неопределенных интегралов часто включают список интегралов с промежуточной переменной интегрирования $u = u(x)$, используя свойство 6 (см. 12.2^0).

Таблица основных неопределенных интегралов

	С основной переменной интегрирования x $\int f(x)dx = F(x) + C$	С промежуточной переменной интегрирования $u = u(x)$ $\int f(u)du = F(u) + C$

1	$\int x^{\alpha}dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\alpha \in R,\ \alpha \neq -1$	$\int u^{\alpha}dx = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$; $\alpha \in R,\ \alpha \neq -1$
Важные частные случаи		
1а	$\int 0dx = C$	$\int 0du = C$
1б	$\int 1dx = x + C$	$\int 1du = u + C$
1в	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$
2	$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C$; $(a > 0,\ a \neq 1)$	$\int a^{u}dx = \frac{a^{u}}{\ln a} + C$; $(a > 0,\ a \neq 1)$
2а	$\int e^{x}dx = e^{x} + C$	$\int e^{u}dx = e^{u} + C$
3	$\int \sin xdx = -\cos x + C$	$\int \sin udu = -\cos u + C$
4	$\int \cos xdx = \sin x + C$	$\int \cos udu = \sin u + C$
5	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$	$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$
6	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$	$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$
7	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$
8	$\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$	$\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C$
Дополнительные табличные интегралы		
9	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

10	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$, $a = const$	$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C$, $a = const$
11	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$, $a = const$	$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left\|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\| + C$, $a = const$
12	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$; $(\|x\| \neq \|a\|)$, $a = const$	$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+u}{a-u}\right\| + C$; $(\|u\| \neq \|a\|)$, $a = const$
13	$\int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|x^2 \pm a^2\right\| + C$; $(\|x\| \neq \|a\|)$, $a = const$	$\int \frac{udu}{u^2 \pm a^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|u^2 \pm a^2\right\| + C$; $(\|u\| \neq \|a\|)$, $a = const$
14	$\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx =$ $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2 \pm a^2} + a^2\ln\left(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right)\right) + C$; $a = const$	$\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\,du =$ $\frac{1}{2}\left(u\sqrt{u^2 \pm a^2} + a^2\ln\left(u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right)\right) + C$; $a = const$
15	$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx =$ $\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$; $a = const$	$\int \sqrt{a^2 - u^2}\,du =$ $\frac{1}{2}\left(u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}\right) + C$; $a = const$

Замечание: каждая формула таблицы справедлива в том интервале, в котором непрерывна подынтегральная функция (в общем случае, для подынтегральной функции можно требовать менее ограничительного свойства, чем непрерывность, но для функций из таблицы это не противоречит общности).

Правильность дополнительных табличных интегралов легко проверить дифференцированием правых частей (первообразных).

Пример. Проверить дифференцированием правильность формулы $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

Решение: 1. при $\frac{a+x}{a-x} > 0$: $\left|\frac{a+x}{a-x}\right| = \frac{a+x}{a-x}$.

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\right)' = \left(\frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x}+C\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{a-x}{a+x}\left(\frac{a+x}{a-x}\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{a-x}{a+x}\cdot\frac{(a-x)+(a-x)}{(a-x)^2} = \frac{1}{a^2-x^2}$$

2. при $\frac{a+x}{a-x}<0$: $\left|\frac{a+x}{a-x}\right| = \frac{x+a}{x-a}$.

$$\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C\right)' = \left(\frac{1}{2a}\ln\frac{x+a}{x-a}+C\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x-a}{x+a}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)' = \frac{1}{2a}\cdot\frac{x-a}{x+a}\cdot\frac{(x-a)-(x+a)}{(x-a)^2} = \frac{1}{a^2-x^2}$$

7.4 **Общие методы интегрирования**

В математике и ее приложениях часто встречаются не табличные интегралы. Основная руководящая идея нахождения таких интегралов заключается в том, чтобы с помощью тождественных математических преобразований и замен переменных привести исходный интеграл к другим интегралам, значения которых известны. Обычно такие интегралы являются табличными.

Наиболее общими методами интегрирования не табличных интегралов являются следующие:

- метод интегрирования с помощью поправок;
- метод подведения части подынтегральной функции под знак дифференциала;
- метод разложения (метод представления подынтегральной функции в виде линейной комбинации более простых функций);
- метод интегрирования с заменой переменной (прямая и обратная подстановки);
- метод интегрирования по частям.

Во многих случаях указанные методы используются совместно. Рассмотрим общие методы интегрирования подробнее.

7.4.1 **Метод разложения подынтегральной функции при интегрировании**

В методе разложения подынтегральную функцию с помощью формул преобразования тригонометрических и алгебраических функций представляют в виде линейной комбинации более простых функций. Это позволяет представить исходный интеграл в виде суммы более простых по структуре интегралов, которые вычисляются отдельно.

В простейшем случае непосредственного интегрирования исходный интеграл разлагается на табличные интегралы элементарными («школьными») методами.

Пример 1. $\int \frac{6^x+1}{2^x}dx = \int\left(\frac{2^x\cdot 3^x}{2^x}+\frac{1}{2^x}\right)dx = \int 3^x dx + \int\left(\frac{1}{2}\right)^x dx = \left(\frac{3^x}{\ln 3}+C_1\right)+\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\frac{1}{2}}+C_2\right)=$

$$= \frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{2^x\ln 2}+\left(C_1+C_2\right)=\frac{3^x}{\ln 3}-\frac{1}{2^x\ln 2}+C.$$

Замечание: поскольку сумма произвольных постоянных равна произвольной постоянной, то при нахождении неопределенных интегралов вместо суммы нескольких произвольных постоянных в конечном результате принято указывать одну постоянную.

Пример 2. $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\int\frac{dx}{(x-a)(x+a)}=\int\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x-a}-\frac{1}{2a}\int\frac{dx}{x+a}=$

$$=\frac{1}{2a}\left(\ln|x-a|-\ln|x+a|\right)=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

Пример 3. При вычислении интеграла можно использовать совместно различные методы интегрирования. В данном примере вместе с методом разложения будут использоваться метод поправок и метод подведения под знак дифференциала.

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}dx=\int\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=\int\frac{1}{tg\frac{x}{2}}\cdot\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}}=\left[\frac{x}{2}=u\right]=\int\frac{1}{tgu}\frac{du}{\cos^2 u}=$$

$$=\int\frac{1}{tgu}d(tgu)=\ln|tgu|+C=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C.$$

7.4.2 **Вычисление методом разложения интегралов с произведениями синусов и косинусов**

1. Интегралы вида $\int\sin\alpha x\cdot\cos\beta x dx$, $\int\sin\alpha x\cdot\sin\beta x dx$, $\int\cos\alpha x\cdot\cos\beta x dx$ вычисляются методом разложения с помощью следующих тригонометрических формул:

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left(\sin(A-B)+\sin(A+B)\right),$$

$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left(\cos(A-B)-\cos(A+B)\right),$$

$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left(\cos(A-B)+\cos(A+B)\right)$$

Пример. $\int \sin\left(5x-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx = \left[5x-\frac{\pi}{4}=A, x+\frac{\pi}{4}=B; A-B=4x-\frac{\pi}{2}, A+B=6x\right]=$

$$=\frac{1}{2}\int \sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\frac{1}{2}\int \sin 6xdx=\frac{1}{8}\int \sin\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)d\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{12}\int \sin 6xd(6x)=$$

$$=-\frac{1}{8}\cos\left(4x-\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{12}\cos 6x+C=-\frac{\sin 4x}{8}-\frac{\cos 6x}{12}+C.$$

2. Интегралы вида $J_{n,m}=\int \sin^n x\cos^m xdx$.

2.1. Если показатели степеней m и n целые четные числа, то интегралы вычисляются с помощью использования (возможно, многократного) формул $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^4 xdx$.

$$\int \sin^4 xdx=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\cos^2 2x\right)dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\int \cos 2xdx+\frac{1}{4}\int \cos^2 2xdx=$$

$$=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{4}\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx=\frac{x}{4}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\left(x+\int \cos 4xdx\right)=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

.

2.2. Если показатели степеней m и n четные числа и хотя бы один из показателей является отрицательным, то используют подстановку $t=tgx$ или $t=ctgx$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx$.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}dx=\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int tg^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\left[\frac{dx}{\cos^2 x}=d\left(\int\frac{dx}{\cos^2 x}\right)=dtgx\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{\cos^2 x}=1+tg^2 x\right]=\int tg^2 x\left(1+tg^2 x\right)d(tgx)=\left[tgx=t, dtgx=dt\right]=\int t^2\left(1+t^2\right)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+C=\frac{tg^3 x}{3}+\frac{tg^5 x}{5}+C.$$

2.3. Если хотя бы один из показателей (m или n) является нечетным, то от тригонометрической функции с нечетной степенью отделяют один множитель. Этот множитель подводят под знак дифференциала и интегрируют с новой переменной. При этом, если оба показателя нечетные, то целесообразно отделять указанный множитель от тригонометрической функции с меньшим показателем степени.

Пример 1. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \left[\cos x dx = d\left(\int \cos x dx\right) = d(\sin x)\right] =$

$= \int \sin^4 x\left(1-\sin^2 x\right)^2 d(\sin x) = \int\left(\sin^4 x - 2\sin^6 x + \sin^8 x\right)dx = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{2\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C$.

Пример 2.
$\int \sin^3 x dx = \int \sin^2 x \sin x dx = \left[\sin x dx = d\int \sin x dx = -d(\cos x)\right] = -\int\left(1-\cos^2 x\right)d(\cos x) =$

$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$.

Пример 3. $\int \sin^5 x \cos^3 x dx = \int \sin^5 x \cos^2 x \cos x dx = \left[\cos x dx = d\left(\int \cos x dx\right) = d \sin x\right] =$

$= \int \sin^5 x\left(1-\sin^2 x\right)d(\sin x) = \int \sin^5 x dx - \int \sin^7 x dx = \frac{\sin^6 x}{6} - \frac{\sin^8 x}{8} + C$

7.4.3 **Метод интегрирования с прямой заменой переменной (с прямой подстановкой)**

В этом варианте метода замены переменной исходную переменную интегрирования заменяют на функцию новой переменной $x = \varphi(t)$. Введенная функция $\varphi(t)$ должна быть монотонной и непрерывно дифференцируемой. Эти условия необходимы для существования обратной функции, что позволяет после интегрирования сделать обратную замену переменной.

Пример 1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$ при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{bmatrix} x = \frac{1}{t};\ t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt \end{bmatrix} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$$

[поскольку $x > 0$ и $x = \frac{1}{t}$, то $t > 0$ и, следовательно, $t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = \sqrt{t^2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)} = \sqrt{1-t^2}$ (если $t < 0$, то было бы $t\sqrt{\frac{1}{t^2}-1} = -\sqrt{t^2\left(\frac{1}{t^2}-1\right)} = -\sqrt{1-t^2}$)]

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C.$$

Пример 2. Найти интеграл $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$.

Решение: $\int \sqrt{1+x^2}\,dx = \begin{bmatrix} x = sht \\ dx = chdt \\ t = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \end{bmatrix} = \int \sqrt{1+sh^2t}\cdot chtdt = \int ch^2tdt = \int \frac{1+ch2t}{2}dt =$

$$= \frac{1}{2}\left(\int dt + \int ch2tdt\right) = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}sh2t\right)+C = \frac{1}{2}t+\frac{1}{2}sht\sqrt{1+sh^2t}+C = \frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+\frac{1}{2}x\sqrt{1+x^2}+C$$

7.4.4 **Простейшие интегралы, содержащие квадратичную функцию (квадратный трехчлен)**

К простейшим интегралам, содержащим квадратичную функцию, относятся интегралы следующего вида: $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, $\int \frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$, $\int \sqrt{x^2+px+q}\,dx$ где p, q, M, N - постоянные коэффициенты.

Основной прием приведения таких интегралов к табличным заключается в следующем:

- выделение полного квадрата в трехчлене $x^2+px+q = x^2+2\cdot\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}$;

- применение обратной подстановки $t = x+\frac{p}{2}$.

Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. Найти интегралы $\int \frac{dx}{x^2-4x+20}$ и $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}}$;

Решение: $\int \frac{dx}{x^2-4x+20} = \left[x^2-4x+20 = x^2-2\cdot 2x+4+16 = (x-2)^2+4^2\right] = \int \frac{dx}{(x-2)^2+4^2} =$

$$= \begin{bmatrix} x-2 = u \\ dx = du \end{bmatrix} = \int \frac{du}{u^2+4^2} = \left[\int \frac{du}{u^2+a^2} - \textit{табличный интеграл}\right] = \frac{1}{4}arctg\frac{x-2}{4}+C.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+20}} = \ldots = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4^2}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4^2}\right|+C = \ln\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+20}\right|+C.$$

Пример 2. Найти значение интеграла $\int \frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}$.

Решение:

$$\int\frac{(3x-1)dx}{4x^2-4x+17}=\frac{3}{4}\int\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)dx}{x^2-x+\frac{17}{4}}=\left[x^2-x+\frac{17}{4}=x^2-2\cdot\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{17}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2^2\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\int\frac{x-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}dx=\left[\begin{matrix}x-\frac{1}{2}=u\\ dx=du\end{matrix}\right]=\frac{3}{4}\int\frac{u+\frac{1}{6}}{u^2+2^2}du=\frac{3}{4}\int\frac{udu}{u^2+2^2}+\frac{1}{8}\int\frac{du}{u^2+2^2}=$$

$$=\left[\int\frac{udu}{u^2+2^2}=\frac{1}{2}\ln\left(u^2+2^2\right),\int\frac{du}{u^2+2^2}=\frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}-\textit{табличные интегралы}\right]=$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\ln\left(u^2+4\right)+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}arctg\frac{u}{2}+C=\frac{3}{8}\ln\left(x^2-x+\frac{17}{4}\right)+\frac{1}{16}arctg\frac{2x-1}{4}+C.$$

Интегралы вида $\int\frac{(Mx+N)dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$ находятся аналогично.

7.4.5 **Метод интегрирования по частям**

Для интегрирования по частям используют формулу $\int udv=uv-\int vdu$, где $u=\varphi(x)$, $v=g(x)$ - дифференцируемые функции.

Алгоритм вычисления интеграла в развернутой математической форме можно представить так: $\int f(x)dx=\int\varphi(x)\psi(x)dx=\left[\begin{matrix}\varphi(x)=u\Rightarrow du=d\varphi(x)\\ dv=\psi(x)dx\Rightarrow v=g(x)-\textit{первообразная функции}\,\psi(x)\end{matrix}\right]=$

$$=\left[\int udv=uv-\int vdu\right]=\varphi(x)g(x)-\int g(x)d\varphi(x).$$

Удачный выбор функций u и v позволяет получить интеграл $\int vdu$ как табличный или более простой для вычислений, чем исходный интеграл. Кроме того, интегрирование по частям можно применять многократно.

Известны следующие общие рекомендации по выбору функций u и v при использовании метода интегрирования по частям:

- в интегралах вида $\int\log_a(P(x))\cdot Q(x)dx$, $\int arctg(P(x))\cdot Q(x)dx$, $\int\arcsin(P(x))\cdot Q(x)dx$, $\int\arccos(P(x))\cdot Q(x)dx$, где $P(x),Q(x)$ - многочлены, принимают $dv=Q(x)dx$, второй множитель полагают равным u;

- в интегралах вида $\int P(x)\cdot\sin(\alpha x+\beta)dx$, $\int P(x)\cdot\cos(\alpha x+\beta)dx$, $\int P(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, где $P(x)$ - многочлен принимают $u=P(x)$, второй множитель полагают равным dv;

- в интегралах вида $\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx$, $\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx$ принимают $u=e^{\alpha x}$, остальное относят к dv.

Пример 1. Найти значение интеграла $\int x^2\ln x dx$.

Решение: $\int x^2\ln x dx=\begin{bmatrix} u=\ln x, dv=x^2dx \\ du=\dfrac{1}{x}dx,\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{bmatrix}=\ln x\cdot\dfrac{x^3}{3}-\int\dfrac{x^3}{3}\cdot\dfrac{1}{x}dx=\dfrac{x^3}{3}\ln x-\dfrac{x^3}{9}+C$.

Пример 2. Найти интеграл $J=\int x^2e^xdx$.

Решение: $J=\int x^2e^xdx=\begin{bmatrix} u=x^2\ \ dv=e^xdx \\ du=2xdx,\ v=e^x\end{bmatrix}=x^2e^x-2\int xe^xdx=x^2e^x-2J_1$.

Для вычисления интеграла $J_1=\int xe^xdx$ снова используем метод интегрирования по частям.

$J_1=\int xe^xdx=\begin{bmatrix} u=x,\ dv=e^xdx \\ du=dx,\ v=e^x\end{bmatrix}=xe^x-\int e^xdx=xe^x-e^x+C_1$.

Окончательно получаем $J=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$ (переобозначили $2C_1=C$).

При многократном интегрировании по частям возможен вариант циклического интегрирования. В этом случае после n-кратного интегрирования получаем сумму функций и интеграл, который совпадает с точностью до постоянной с исходным интегралом. Полученное равенство рассматривают как уравнение относительно неизвестного интеграла и, решив это уравнение, находят значение интеграла.

Пример 3. Найти значение интеграла $\int e^x\sin x dx$.

Решение: $J=\int e^x\sin xdx=\begin{bmatrix} e^x=u, dv=\sin xdx \\ du=e^xdx,\ v=-\cos x\end{bmatrix}=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx=$

$$=\begin{bmatrix} \textit{используем интегрирование} \\ \textit{по частям вторично}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^x=u,\ dv=\cos xdx \\ du=e^xdx, v=\sin x\end{bmatrix}=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx=$$

$$e^x(\sin x-\cos x)-J\Rightarrow 2J=e^x(\sin x-\cos x);\ J=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$$

Тема 7: Определенный интеграл

7.1 **Исходные положения**

Определенный интеграл – это математический объект, обладающий свойством *аддитивности*, который представляется в символьной форме в виде

$$J = \int_a^b f(x)dx\,, \tag{1}$$

где $f(x)$ - подынтегральная функция, которую будем предполагать непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией на интервале $[a, b]$. При этом кусочно-непрерывная функция не должна иметь точек разрыва второго рода, а точек разрыва первого рода у нее должно быть конечное количество. Числовые величины a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Примечание: аддитивность - свойство числового математического объекта, определенного на некотором множестве M, состоящее в том, что значение объекта на всем множестве равно сумме значений объекта на частях этого множества при любом разбиении множества на непересекающиеся части. Простейшими примерами этого свойства являются длина, площадь, объем и т.п.

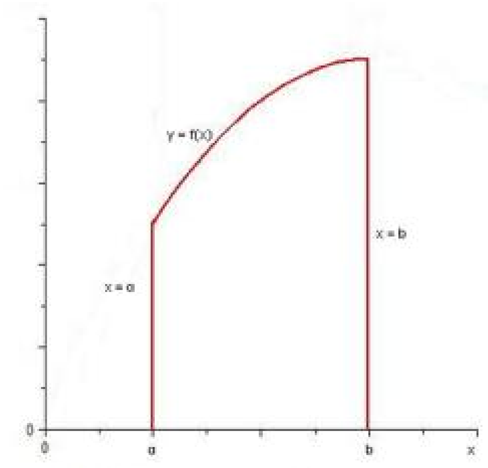


Рис.14.1. Площадь криволинейной трапеции

В общем случае один или оба предела интегрирования могут быть переменными величинами. Например, интеграл

$$J(x) = \int_a^x f(x)dx \tag{2}$$

называется интегралом с переменным верхним пределом.

С геометрической точки зрения при некоторых естественных ограничениях определенный интеграл можно интерпретировать как площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком подынтегральной функции, осью OX и отрезками прямых линий $x = a$ и $x = b$ (рис.14.1).

Если подынтегральная функция $f(x)$ является непрерывной, то для вычисления определенного интеграла можно использовать формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = \left[\int f(x)dx = F(x) + C\right]_a^b = F(b) - F(a) \tag{3}$$

Из формулы (3) следует, что для вычисления определенного интеграла необходимо:

1. Найти какую-либо первообразную подынтегральной функции;
2. Вычислить разность значений первообразной при значениях переменной равных верхнему и нижнему пределам интегрирования;

Замечание: определенный и неопределенный интегралы – это существенно разные математические объекты. Неопределенный интеграл – <u>множество</u>, состоящее из бесконечного количества функций $(F(x) + C,\, C \in R)$; определенный интеграл с постоянными пределами интегрирования – <u>число</u>; определенный интеграл с переменными пределами интегрирования - <u>функция</u>.

7.2 **Основные свойства определенного интеграла**

Определенный интеграл, как и неопределенный, обладает свойством линейности

$$\int_a^b \left(Af_1(x)+Bf_2(x)\right)dx = A\int_a^b f_1(x)dx + B\int_a^b f_2(x)dx,\ \ A,B\in R,$$

при условии, что оба интеграла в правой части равенства существуют.

Кроме того, определенные интегралы обладают существенными специфическими свойствами, которые очевидным образом следуют из геометрического смысла определенного интеграла и формулы Ньютона-Лейбница.

1. Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$ при условии, что переменные x,t,u не зависимы.
2. Если пределы интегрирования одинаковы, то определенный интеграл равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$.
3. При перемене местами пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(t)dt$.
4. Если промежуток интегрирования разбить на непересекающиеся части, то интеграл по полному отрезку $[a,\, b]$ равен сумме интегралов по частям этого отрезка: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $c\in[a,\, b]$.

Если подынтегральная функция $y = f(x)$ задана разными аналитическими формулами на разных частях отрезка $[a,\, b]$, то определенный интеграл находят, пользуясь правилом 4.

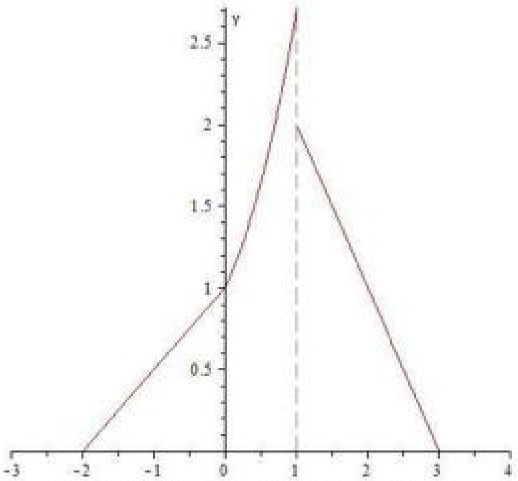


Рис.14.2. Интегрирование кусочно-непрерывной функции

Пример. Вычислить определенный интеграл на отрезке $[-2,\, 3]$ для функции

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{2}+1, & -2\le x\le 0\\ e^x, & 0<x\le 1\\ 3-x, & 1<x\le 3\end{cases}.$$

Решение: разбивая отрезок интегрирования $[-2,\,3]$ на три частичных отрезка $[-2,\,0]$, $[0,\,1]$ и $[1,\,3]$, на каждом из которых функция задается единой аналитической формулой (рис.14.2.), вычисляем определенный интеграл как сумму трех интегралов:

$$\int_{-2}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{0}\left(\frac{x}{2}+1\right)dx + \int_{0}^{1} e^x dx + \int_{1}^{3} f(x)dx = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_{-2}^{0} + e^x\Big|_0^1 + \left(3x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3 = e+2 \approx 4{,}718$$

5. Если подынтегральная функция четная $(f(-x)=f(x))$, то в случае симметричного относительно нуля промежутка интегрирования $(a=-b)$ интеграл можно упростить: $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

6. Если подынтегральная функция нечетная $(f(-x)=-f(x))$, то в случае симметричного относительно нуля промежутка интегрирования $(a=-b)$ интеграл равен нулю.

Пример. На основании свойства 6: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = 0$. Проверим это с использованием подробных промежуточных вычислений.

Решение. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \sin x dx = [\sin x dx = -d(\cos x)] = -\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2 x) d\cos x =$

$= \left[\cos x = t, \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0\right] = \int_{0}^{0} (1-t^2)dt$. На основании свойства 2 интеграл равен нулю.

7. Если $f(x) \ge 0$ при $x \in [a,\,b]$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx \ge 0$. Отсюда, в частности, следует, что если $f(x) \le g(x)$ при $x \in [a,\,b]$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx \le \int_{a}^{b} g(x)dx$.

7.3 **Вычисление определенного интеграла заменой переменной**

При использовании формулы Ньютона-Лейбница вычисление определенного интеграла сводится, по существу, к нахождению неопределенного интеграла: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Если при нахождении неопределенного интеграла используют замену переменной, то для последующего вычисления определенного интеграла можно использовать два подхода:

- в первообразной с новой переменной, полученной при неопределенном интегрировании, производят обратную замену переменной;

- используют первообразную с новой переменной с обязательной заменой исходных пределов интегрирования на новые, соответствующие новой переменной интегрирования;

Во многих случаях второй подход позволяет упростить вычисления. Его реализацию в символьной форме можно представить так:

$$\int_a^b f(x)dx = \begin{bmatrix} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{bmatrix} = \int_{t_a}^{t_b} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(t)\Big|_{t_a}^{t_b} = F(t_b) - F(t_a) \ .$$

При втором подходе к вычислению определенного интеграла достаточно выполнение следующих условий:

- заменяющая функция $\varphi(t) = x$ должна быть непрерывной вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке интегрирования $[a, b]$;

- должна существовать единственная обратная функция $t = \psi(x)$; это позволяет перейти к новым пределам интегрирования: $t_a = \psi(a)$, $t_b = \psi(b)$;

- при изменении новой переменной от t_a до t_b значения заменяющей функции $\varphi(t) = x$ не должны выходить за пределы отрезка $[a, b]$.

Пример. Вычислить $J = \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$.

Решение: $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)} = \begin{bmatrix} x = e^t \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{e^t dt}{e^t(1 + \ln^2 e^t)} = \int_{t_a}^{t_b} \frac{dt}{1+t^2} = \begin{bmatrix} a = 1 = e^{t_a} \Rightarrow t_a = 0 \\ b = e = e^{t_b} \Rightarrow t_b = 1 \end{bmatrix} =$

$$=\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctgt\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Задачи к разделу 14.3

14.3.1 Используя метод подведения под знак дифференциала с последующей заменой переменной, вычислить интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgx dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\cos x}$; г) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x+1}$;

д) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^4+1}$; е) $\int_0^1 x^3 e^{-x^4} dx$;

14.3.2. Используя подходящую замену переменной, вычислить интегралы: а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x+1}$;

б) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-2}+2} dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{x+\sqrt{x}+1}$;г) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$;

7.4 Вычисление определенного интеграла с использованием интегрирования по частям

Если $u = u(x)$ и $v = v(x)$ - дифференцируемые функции на отрезке $[a, b]$, то формула для вычисления определенного интеграла по частям имеет вид: $\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du$.

Пример. $J = \int_0^1 \arcsin x dx = \left[\begin{matrix} u = \arcsin x,\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}},\ v = x \end{matrix}\right] = x \arcsin x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} - J_1$;

$$J_1 = \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[xdx = -\frac{1}{2} d\left(1-x^2\right)\right] = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = \left[1-x^2 = t, t_a = 1, t_b = 0\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_0^1 \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_0^1 = 1;\ J = \frac{\pi}{2} - J_1 = \frac{\pi}{2} - 1.$$

7.5 Несобственные интегралы

Интегралы с бесконечными пределами интегрирования и интегралы, в которых подынтегральные функции имеют разрывы второго рода, называются несобственными интегралами. Такие интегралы *исследуют на сходимость* с помощью пределов.

7.5.1 **Интегралы с бесконечными пределами (несобственные интегралы первого рода)**

Пусть функция $y = f(x)$ не имеет разрывов второго рода, тогда сходимость интеграла с бесконечным верхним пределом определяют так:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\big(F(t)-F(a)\big).$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$, то несобственный интеграл является *сходящимся*, Если предел бесконечен или не существует, то несобственный интеграл является *расходящимся*.

Аналогично определяется сходимость интеграла с бесконечным нижним пределом:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx = \lim_{t\to-\infty}\big(F(b)-F(t)\big).$$

Замечание: в большинстве приложений несобственных интегралов в технике, как правило, интересуются только самим фактом сходимости или расходимости интеграла без конкретизации чему именно равен сходящийся интеграл. Это естественно, т.к. с одной стороны, зачастую вычисление первообразных связано с серьезными вычислениями, а с другой стороны, почти всегда можно вычислить интеграл приближенно с любой точностью (например, по методу трапеций или парабол). И если установлен факт сходимости интеграла, то задачу его приближенного вычисления уже можно поручить компьютеру. При вычислении же на компьютере численного значения расходящегося интеграла, компьютер может выдать какой-то результат, но этот результат заведомо будет неверным.

Пример 1. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$.

Решение: $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{t\to\infty}\int_1^t x^{-2}dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^t = \lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right) = 1$. Поскольку предел существует и равен числу (не бесконечности), то интеграл сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость интеграла $\int\limits_0^\infty \cos^2 x dx$.

Решение: $\int\limits_0^\infty \cos^2 x dx = \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_0^\infty \cos^2 x dx = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}\right)\Bigg|_0^t = \infty$. Интеграл расходится.

Сходимость несобственных интегралов с двумя бесконечными пределами определяется по формуле $\int\limits_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim\limits_{t\to-\infty}\int\limits_t^c f(x)dx + \lim\limits_{t\to\infty}\int\limits_c^t f(x)dx$, где $c \in R$ - любое число, которое в каждом конкретном случае можно выбрать из соображений удобства вычислений.

Если $|f(x)| \le |g(x)|$, то при проверке сходимости используют признак сравнения (14.2^0, п.9). При этом, если интеграл $\int\limits_0^\infty g(x)dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_0^\infty f(x)dx$.

Пример 3. Проверить сходимость интеграла $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$;

Решение: будем использовать признак сравнения

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{x^4\left(\frac{1}{x^4}+1\right)}} = \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^4}+1}} < \frac{1}{x^2};$$

Таким образом, подынтегральную функцию $\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ при исследовании сходимости интеграла можно заменить функцией $g(x)=\frac{1}{x^2}$. Интеграл с замененной функцией $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ сходится (Пример1), значит, исходный интеграл тоже сходится.

7.5.2 **Несобственные интегралы от неограниченных функций**

Если подынтегральная функция $f(x)$ неограниченна в любой окрестности внутренней точки c

отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \le x < c$ и при $c < x \le b$, то сходимость интеграла, в общем случае, определяют по формуле:

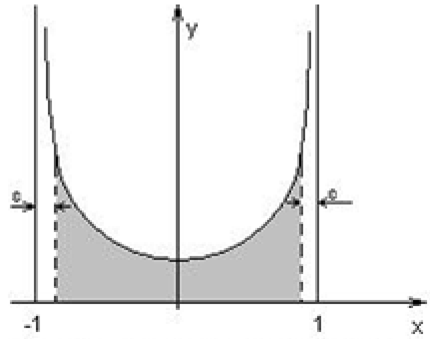


Рис. 14.6. Интегрирование несобственного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx,$$

где ε и δ - переменные величины, изменяющиеся независимо друг от друга.

Интеграл $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to 0}\int_{c+\delta}^b f(x)dx$ сходится,

если оба предела в правой части равенства существуют и конечны. Если $c = b$ или $c = a$, то получаем $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ или $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^b f(x)dx$;

Пример 4. Проверить сходимость интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение: подынтегральная функция имеет два разрыва второго рода: при $x = -1$ и при $x = 1$. Поэтому исходный интеграл представляем в виде двух интегралов, в каждом из которых придется вычислять один предел подынтегральной функции (Рис. 14.6). $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Вычисляем каждый из интегралов отдельно: $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-1+\varepsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\arcsin x\Big|_{-1+\varepsilon}^0 =$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin 0 - \arcsin(-1+\varepsilon)\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = ... = \frac{\pi}{2}$. Тогда $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$. Интеграл сходится.

Пример 5. Проверить сходимость интеграла $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$.

Решение: подынтегральная функция имеет разрыв второго рода при $x = 0$. Тогда $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2} = \int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} + \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$. Исходный интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части равенства. Проверим сходимость первого интеграла: $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-1+\varepsilon}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1+\varepsilon}^{0} =$

$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{-1}{0} - \frac{-1}{-1+\varepsilon} \right) = -\infty$. Первый интеграл в правой части расходится, значит, расходится и исходный интеграл.

Замечание: несобственный интеграл от неограниченной функции по форме записи ничем не отличается от обычного определенного интеграла, поэтому если требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, то прежде всего необходимо исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность. В зависимости от того, есть у этой функции разрывы второго рода или нет – вычислять либо несобственный интеграл по приведенным выше правилам, либо определенный интеграл.

Тема 8: Геометрические приложения определенных интегралов

В прикладных задачах при нахождении геометрических и физических величин с помощью определенных интегралов используют:

- метод интегральных сумм;

- метод дифференциалов;

Первый метод лежит в основе определения определенного интеграла. С помощью этого метода для типичных расчетных ситуаций по определению геометрических величин (площадей, объемов, длин и т.п.) выведены формулы, выражающие эти величины через определенные интегралы.

Второй метод требует предварительного определения дифференциала искомой величины и последующего интегрирования.

Сначала рассмотрим методики определения геометрических величин с использованием типовых формул, содержащих определенные интегралы.

8.1 **Определение площади плоской фигуры в прямоугольных координатах**

Возможность вычисления площади плоской фигуры с помощью определенного интеграла вытекает из геометрического смысла этого интеграла. Рассмотрим важнейшие частные случаи.

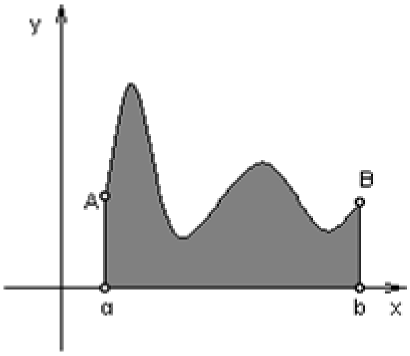


Рис. 15.1 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком неотрицательной функции

1) Если функция $y = f(x)$ является непрерывной (кусочно-непрерывной) и неотрицательной на отрезке $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции равна $S = \int_a^b f(x)dx$ (Рис.15.1.).

2) Если функция $y = f(x)$ является непрерывной (кусочно-непрерывной) и отрицательной (не положительной) на отрезке $[a, b]$, то ее график расположен под осью Ox и определенный интеграл будет отрицательным. Поэтому площадь криволинейной трапеции равна $S = -\int_a^b f(x)dx$ (Рис.15.2.).

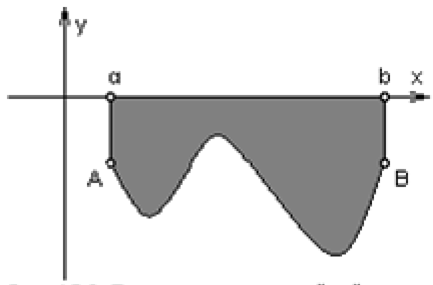


Рис. 15.2. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком отрицательной функции

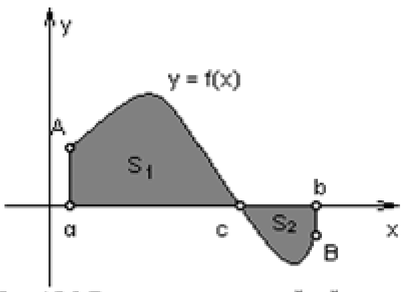


Рис.15.3 Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком произвольной функции

3) Если подынтегральная функция меняет свой знак в точке c на отрезке интегрирования $[a, b]$, то площадь криволинейной трапеции $aABb$ определяют так: $S = S_1 + S_2 = \int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx$ (Рис.15.3.).

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$, прямой $x = 2$ и осями координат.

Решение: $y = 1 - x^2$ - уравнение параболы. Уравнение, приведенное к почти каноническому виду - $y - 1 = -x^2$. Из уравнения следует, что вершина параболы находится в точке $A(0, 1)$, ось

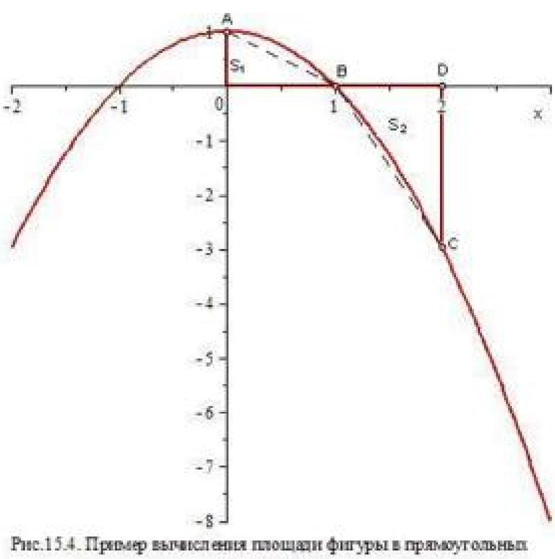


Рис.15.4. Пример вычисления площади фигуры в прямоугольных

симметрии параболы совпадает с координатной осью Oy, ветви параболы направлены вниз, точки пересечения параболы с осью Ox - $(-1,0)$ и $(1,\ 0)$. Парабола пересекает прямую $x=2$ в точке $C(2,-3)$. По исходным и полученным данным изображаем плоскую фигуру, площадь которой необходимо найти(Рис.15.4).

$$S=S_1+S_2=\int_0^1(1-x^2)dx-\int_1^2(1-x^2)dx=\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1-\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_1^2=2.$$

Для проверки правильности вычислений кривые линии в плоских фигурах S_1 и S_2 заменим прямыми (на Рис. 15.4 показаны пунктиром). В результате получаем два прямоугольных треугольника, общая площадь которых равна $S^*=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1\cdot3=2$. Точное и приближенное значения площадей плоских фигур совпали (в общем случае они должны были быть приближенно равны). Возможность такого совпадения следует из Рис.15.4.: площадь S_1 больше площади треугольника AOB, а площадь S_2 меньше площади треугольника BDC.

Замечание: при решении геометрических задач с помощью с помощью определенных интегралов прежде всего очень желательно построить графики всех линий, ограничивающих плоскую фигуру. Это позволяет избежать большинства ошибок при определении пределов интегрирования, и определить необходимое количество слагаемых определенных интегралов и знаки перед ними.

15.1.4 Пусть плоская фигура ограничена двумя линиями: линией $y=f(x)$ сверху и линией $y=g(x)$ снизу (рис.15.5).

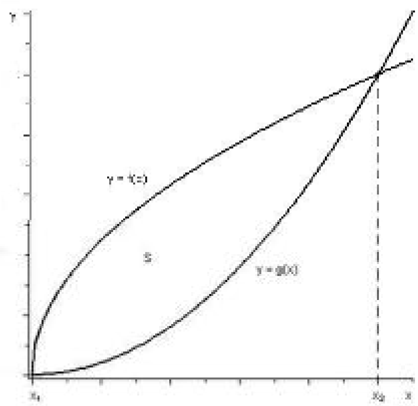


Рис.15.5. Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций

Точки пересечения линий $x_1,\ x_2$ определяются из системы уравнений $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \end{cases}$, затем площадь фигуры находят по формуле $S=\int\limits_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))dx$.

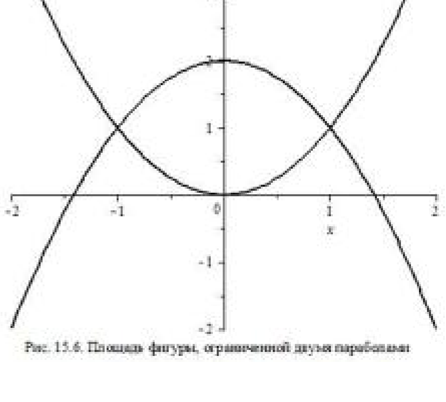


Рис. 15.6. Площадь фигуры, ограниченной двумя параболами

Пример. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$.

Решение: Находим координаты точек пересечения парабол: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow x = \pm 1$. Вторые координаты точек пересечения (ординаты) для интегрирования не нужны. Строим графики кривых (рис. 15.6). Уравнения парабол являются четными функциями, определенными на симметричном интервале, поэтому, используя свойство 5 из 14.2, получим

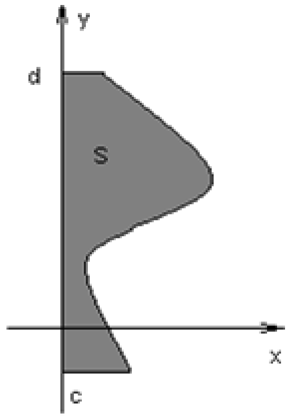


Рис.15.7 Вычисление площади с использованием переменной y

$$S = 2\int_0^1 \left(2 - x^2 - x^2\right)dx = 4\int_0^1 \left(1 - x^2\right)dx = 4\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

$15.1.5$ В некоторых случаях удобнее использовать в качестве переменной интегрирования y. Тогда площадь плоской фигуры (Рис.15.7) определяют по формуле $S = \int_c^d \varphi(y)dy$.

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ и осью Ox.

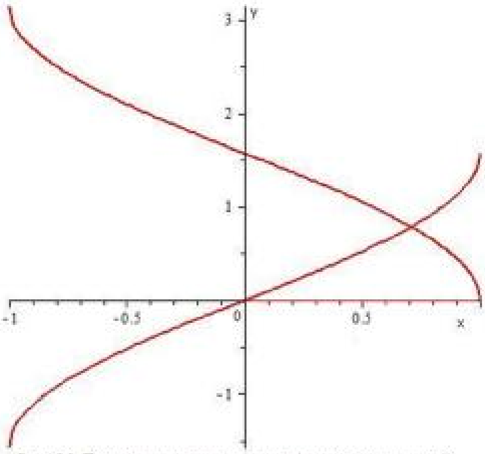


Рис.15.8. Пример вычисления площади фигуры, ограниченной

Решение: определяем координаты точки пересечения кривых: $\arcsin x = \arccos x$. В силу монотонности функций $\arcsin x$ и $\arccos x$, имеем $\sin y = \cos y$, откуда $y = \dfrac{\pi}{4}$ (поскольку интегрировать будем по переменной y

, абсцисса нам не понадобится). Площадь заданной плоской фигуры равна (рис. 15.8):

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos y - \sin y) dy = (\sin y + \cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1 \approx 0,41.$$

8.2 **Определение длины дуги кривой, заданной в прямоугольных координатах**

Длину дуги плоской линии, заданной явным уравнением в прямоугольных координатах $(y = f(x))$, определяют по формуле $L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dt$.

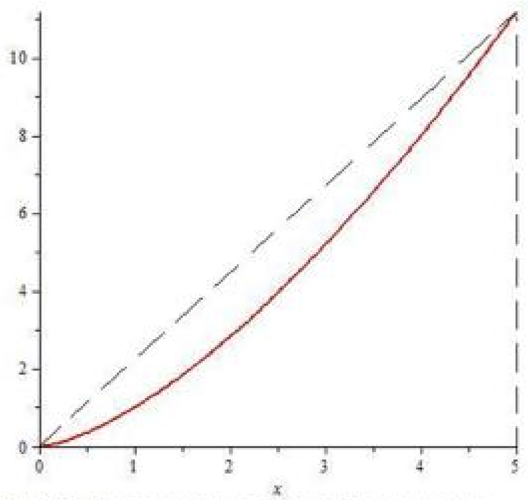


Рис.15.12. Пример вычисления длины кривой в прямоугольных координатах

Пример. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y = x^{\frac{3}{2}}$ на отрезке $[0, 5]$.

Решение: строим линию (см. Практикум по математике, Часть 2, Приложение 1).

$y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$;

$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx = \begin{bmatrix} u = 1 + \frac{9}{4}x; u_н = 1 + \frac{9}{4}\cdot 0,\ u_в = \frac{49}{4} \\ du = \frac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \frac{4}{9}du \end{bmatrix} =$$

$= \int_1^{\frac{49}{4}} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{\frac{49}{4}} = \ldots = \frac{335}{27} \approx 12,4$. Проверка (длина отрезка, соединяющего концы кривой): $L \approx \sqrt{5^2 + \left(5^{\frac{3}{2}}\right)^2} = \sqrt{25 + 125} \approx 12,25 < 12,4$ - верно.

8.3 **Определение длины дуги кривой, заданной в прямоугольных координатах в параметрической форме**

Пусть уравнение кривой задано в параметрической форме $x = x(t), y = y(t)$ при $t \in [t_н, t_в]$ и функции $x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_н, t_в]$, тогда длина кривой определяется по формуле $L = \int_{t_н}^{t_в} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$.

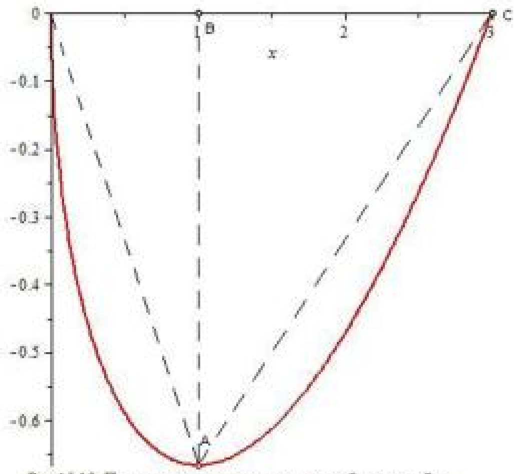


Рис.15.13. Пример вычисления длины кривой, заданной в параметрической форме в прямоугольных координатах

Пример. Найти длину кривой $x = t^2, y = \dfrac{t^3}{3} - t$ при $0 \le t \le \sqrt{3}$.

Решение: для решения задачи строить заданную кривую не обязательно, но для осуществления контроля правильности вычислений желательно это сделать.

Находим координаты характерных точек в заданной области определения $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$. При $t = 0$ получим $x(0) = y(0) = 0$, а при $t = \sqrt{3}$ - $x(\sqrt{3}) = 3, y(\sqrt{3}) = 0$. При $t \in \left[0, \sqrt{3}\right]$ кривая лежит ниже оси Ox, т.к. $y = \dfrac{t^3}{3} - t < 0$. Определяем наличие экстремумов: $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{t^2 - 1}{2t}$.; $y'_x = 0$ при $t_{1,2} = \pm 1$. Точка $t_1 = -1$ не входит в заданную область определения, а в точке $t_2 = 1$ может быть только минимум, т.к. $y = \dfrac{t^3}{3} - t < 0$ и при этом $x(1) = 1, y(1) = -\dfrac{2}{3}$. Используя полученные данные, строим линию (рис.15.13). находим длину кривой:

$$L = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{(2t)^2 + (t^2 - 1)^2}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1}\, dt = \int_0^{\sqrt{3}} (t^2 + 1) dt = \left(\frac{t^3}{3} + t\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} = \ldots = 2\sqrt{3} \approx 3{,}46$$

Проверка: приближенная оценка длины кривой снизу:

$$L \approx OA + AC = \sqrt{OB^2 + AB^2} + \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{1^2 + 0{,}67^2} + \sqrt{0{,}67^2 + 4} \approx 3{,}31 < 3{,}46$$

<u>Тема 9: Функции нескольких переменных (ФНП) и их производные</u>

9.1 **Исходные положения**

В прикладных задачах часто встречаются функции от нескольких независимых переменных.

Примеры: 1. Закон Ома, выражающий силу тока на участке электрической цепи как отношение напряжения к сопротивлению $I = \dfrac{U}{R}$ - функция двух переменных U, R.

2. $Ax + By + Cz + D = 0$ - неявно заданная функция двух переменных (например, функция z от переменных $x,\ y$). В аналитической геометрии эту функцию интерпретируют как общее уравнение плоскости.

3. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = abc$ со сторонами a, b, c - функция трех переменных a, b, c.

Упорядоченный набор независимых переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$ с геометрической точки зрения можно интерпретировать как координаты текущей точки в n- мерном координатном пространстве R^n. Тогда ФНП можно рассматривать как функцию $u = f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(M)$ текущей точки $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Область D n-мерного пространства, в которой ФНП имеет смысл называется *областью существования* (или *областью естественного определения*) ФНП. Множество значений, которые может принимать выражение $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, называется *областью значений* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Очевидно, что областью значений является какая-либо часть координатной прямой.

В случае функции двух переменных x, y областью существования функции $z = f(x, y)$ является некоторая часть координатной плоскости (или вся координатная плоскость. График функции $z = f(x, y)$ представляет собой поверхность в трехмерном пространстве.

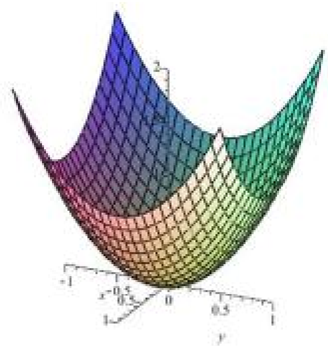


Рис.16.1. График функции $z = x^2 + y^2$

Пример1. $z = x^2 + y^2$ - функция двух переменных x, y. Поскольку действия, приведенные в определении функции (возведение в квадрат и сложение) можно производить над любыми действительными числами, то любая точка координатной плоскости входит в область существования функции, т.е. областью существования является вся координатная плоскость. Графиком функции является параболоид вращения (Рис. 16.1). Областью значений является множество всех неотрицательных чисел $z \in [0, \infty)$.

Пример2. Найти область существования функции $z = \sqrt{y - \sqrt{x-1}}$.

Решение. В отличие от предыдущего примера, действия, указанные в выражении $\sqrt{y - \sqrt{x-1}}$ можно производить уже не над любыми действительными числами. Функция имеет смысл при условиях $y \ge \sqrt{x-1}$ и $x - 1 \ge 0$.

В общем случае метод нахождения области существования функции двух переменных состоит в следующем: в ограничениях, задаваемых неравенствами, переходим к равенствам – получим уравнения некоторых линий, которые делят координатную плоскость на несколько частей $D_1, D_2, ..., D_m$; в каждой из полученных частей каждое из исходных неравенств (ограничений) одновременно во всех точках выполняется или одновременно не выполняется; в части D_1 выбираем произвольную точку, подставляем ее координаты в каждое из неравенств и проверяем правильность полученных числовых неравенств; если все неравенства верны – включаем D_1 в область существования; затем те же действия производим с частями $D_2, ..., D_m$.

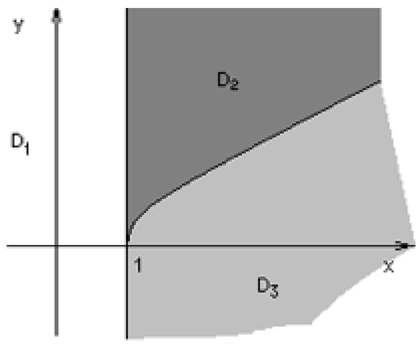


Рис.16.2. Пример2. Область определения

В нашем примере $y = \sqrt{x-1}$ - верхняя ветвь параболы $y^2 = x - 1$, а $x - 1 = 0$ - вертикальная прямая (Рис.16.2), они делят координатную плоскость на три области - D_1, D_2, D_3. Подстановкой координат точки $O(0, 0) \in D_1$ в неравенство $y \ge \sqrt{x-1}$, убеждаемся, что оно не имеет смысла, значит, область D_1 не входит в область существования функции. В область D_2 попадает, например, точка $(2,2)$. Неравенства $2 \ge \sqrt{2-1}$ и $2 - 1 \ge 0$ верны, поэтому область D_2 входит в область существования функции. В область D_3 попадает, например точка $(2,0)$. Неравенство $0 \ge \sqrt{2-1}$ неверно, значит, D_3 не входит в область существования функции. Итак, областью существования функции $z = \sqrt{y - \sqrt{x-1}}$ является область D_2.

Замечание: приведенный метод нахождения области существования функции, по сути, является обобщением на двумерный случай метода интервалов для решения неравенств, изучаемого в рамках школьной программы.

9.2 **Непрерывность ФНП и частные производные**

Определение: δ -окрестностью точки M_0 на плоскости называется открытый круг радиуса δ с центром в точке M_0. Более точно, δ -окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, это множество точек плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют неравенству $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2$.

Замечание: для функции трех переменных δ -окрестностью точки M_0 является шар с центром в этой точке и радиусом δ. В общем случае функции нескольких переменных δ -окрестностью точки $M_0(x_{10}, x_{20}, ..., x_{n0})$ называется множество точек $(x_1, x_2, ..., x_n)$ n-мерного координатного пространства, удовлетворяющих неравенству $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i0})^2 < \delta^2$.

Пусть функция $u = f(M)$ определена в некоторой δ -окрестности точки M_0. Тогда эта функция называется *непрерывной в точке* M_0, если справедливо равенство $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$, при этом точка M может стремиться к точке M_0 по любой траектории внутри δ -окрестности точки M_0.

Замечание1. При вычислении предела $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ прежде всего следует подставить в выражение $f(x, y)$ вместо переменных x, y их заданные числовые значения x_0, y_0. Если при этом не получится неопределенность, то полученное число или $\pm\infty$ и будет значением предела.

Замечание 2. Для доказательства не существования предела часто достаточно должным образом подобрать две траектории, при стремлении по которым $M \to M_0$ значения предела различны.

Если функция непрерывна в каждой точке области определения, то она называется *непрерывной в области* определения.

В прикладных задачах широко используют следующие функции, непрерывность которых в области их существования доказана:

1. Многочлены (целые рациональные функции), в частности

   1.1. Линейные функции (*линейные формы*) $u = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n$;

   1.2. *Квадратичные формы* $u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \ldots + a_{1n} x_1 x_n + \ldots + a_{nn} x_n^2$

2. Рациональные функции – дроби, числителями и знаменателями которых являются многочлены; в частности, *дробно-линейные функции* вида $u = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i x_i}$.

3. Тригонометрические, обратные тригонометрические, логарифмические, показательно-степенные функции;

4. Функции, полученные из непрерывных функций с использованием арифметических операций;

5. Сложные функции, полученные как результат композиции (суперпозиции) непрерывных функций.

Замечание: метод нахождения области существования функции, рассмотренный выше, по сути, является методом нахождения области непрерывности функции.

Для функции нескольких переменных можно ввести понятие частной производной: *частной производной (частной производной первого порядка)* функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$, где $\Delta_{x_i} u = f(x_1, ...x_i + \Delta x_i, ..., x_n) - f(x_1, ...x_i, ...x_n)$ - частное приращение функции $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при изменении только одной из ее переменных.

Замечание 1: предел, рассмотренный в определении частной производной, является пределом функции одной переменной Δx_i и при его вычислении можно использовать методы, рассмотренные в Части 2 Практикума (применение замечательных пределов, правило Бернулли-Лопиталя и т.п.)

Замечание 2: предел $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\Delta_{x_i} u}{\Delta x_i}$ может и не существовать; в этом случае говорят, что функция не имеет частной производной по переменной x_i.

Замечание 3: кроме обозначения $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ для частной производной также используется обозначение u'_{x_i}.

Частные производные функций с конечным числом аргументов вычисляют как обычные производные функции одной переменной. При этом все аргументы, кроме того, по которому происходит дифференцирование, условно считают постоянными величинами. Поэтому формулы и правила для вычисления частных производных совпадают с формулами и правилами для производных функции одного аргумента.

Частные производные в фиксированных точках являются числовыми величинами. Если частные производные функции существуют во всех точках области определения (или в части области определения), то эти производные сами являются функциями нескольких переменных.

Пример1. Найти частные производные первого порядка функции $z = \sin\left(x^2 y^3\right)$.

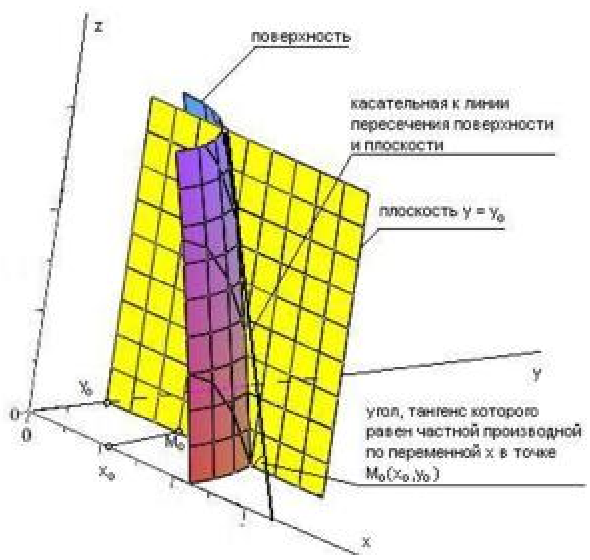
Решение: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \cos\left(x^2 y^3\right)\cdot\left(x^2 y^3\right)'_x = \cos\left(x^2 y^3\right)\cdot y^3\cdot\left(x^2\right)'_x = 2xy^3\cos\left(x^2 y^3\right)$;

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \cos\left(x^2 y^3\right)\cdot\left(x^2 y^3\right)'_y = \cos\left(x^2 y^3\right)\cdot x^2\cdot\left(y^3\right)'_y = 3x^2 y^2\cos\left(x^2 y^3\right).$$

Пример2. Вычислить частную производную по переменной y функции $u = x^2 - 2y^2 - 4yz$ в точке $M_0(9,\ 6, -1)$.

Решение: $\dfrac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2\right)'_y - \left(2y^2\right)'_y - \left(4yz\right)'_y = 0 - 4y - 4z\cdot 1 = -4y - 4z$;

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\left(-4y - 4z\right)\right|_{\substack{y=6\\ z=-1}} = -4\cdot 6 - 4\cdot(-1) = -20$$
.



Геометрический смысл частной производной функции двух переменных аналогичен геометрическому смыслу производной функции одной переменной: частная производная по переменной x в точке $(x_0,\ y_0)$- это тангенс угла наклона к положительному направлению оси Ox касательной к линии, полученной пересечением графика функции и плоскости $y = y_0$. Аналогичный смысл имеет частная производная по переменной y в точке $(x_0,\ y_0)$. Геометрический смысл частной производной по переменной x показан на рис.16.3.

На примере функций двух переменных рассмотрим *частные производные высших порядков*:

$$\left(z'_x\right)'_x = z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2};\ \left(z'_x\right)'_y = z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y};\ \left(z'_y\right)'_x = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x};\ \left(z'_y\right)'_y = z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Аналогично вводятся частные производные более высоких порядков:

$$\left(z''_{x^2}\right)'_x = z'''_{x^3} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3};\ \left(z''_{xy}\right)'_y = z'''_{xy^2} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$$ и т.п.

Частные производные, взятые по разным аргументам, называются *смешанными*. Для смешанных производных справедлива следующая теорема: если вторые частные производные как функции непрерывны в окрестности некоторой точки, то их смешанные производные, отличающиеся только порядком дифференцирования, совпадают в окрестности той же точки. Например,
$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 z}{\partial y \partial x^2}.$$

Пример. Найти смешанные производные третьего порядка $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ для функции
$$z = \frac{x^2}{\sqrt{y}}.$$

Решение: $z = \frac{x^2}{\sqrt{y}} = x^2 y^{-\frac{1}{2}}$. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{y\sqrt{y}}$.

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -xy^{-\frac{3}{2}}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = -y^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{y\sqrt{y}}$, как и следовало ожидать, смешанные производные оказались равны.

9.3 **Экстремумы ФНП в открытой области определения**

Определение. Пусть S - множество точек плоскости (пространства). *Внутренней точкой* множества S называется точка, для которой найдется окрестность, все точки которой принадлежат множеству S; *граничной точкой* множества S называется точка, любая окрестность которой содержит как точки, принадлежащие области, так и точки, ей не принадлежащие; множество всех граничных точек множества S называется *границей* этого множества;

Определение. *Открытой областью* называется множество точек плоскости (пространства), все точки которого являются внутренними.

Определение. Открытая область называется *связной,* если любые две ее точки можно соединить линией, полностью лежащей в этой области.

Замечание 1. Открытую связную область можно представить себе так: некоторая замкнутая линия (поверхность) делит плоскость (пространство) на две части – ограниченную и неограниченную; множество точек, попадающих в ограниченную часть – открытая связная область, сама линия или поверхность – граница этой области. Для наших дальнейших целей такого представления (хотя и не полного) будет вполне достаточно.

Замечание 2. Понятие открытой области и ее границы легко обобщается на случай функции любого количества переменных. К сожалению, в этом случае наглядная интерпретация уже не возможна. Понятие связной области также можно расширить на общий случай, но это уже не так просто и выходит за рамки нашего курса.

Пусть функция $f(M)$ задана в некоторой открытой области. Точка M_0, принадлежащая этой области, называется точкой максимума (минимума) функции $f(M)$, если существует некоторая δ -окрестность точки M_0, для всех точек M которой выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$ $\left(f(M_0) \leq f(M)\right)$.(Рис.17.2)

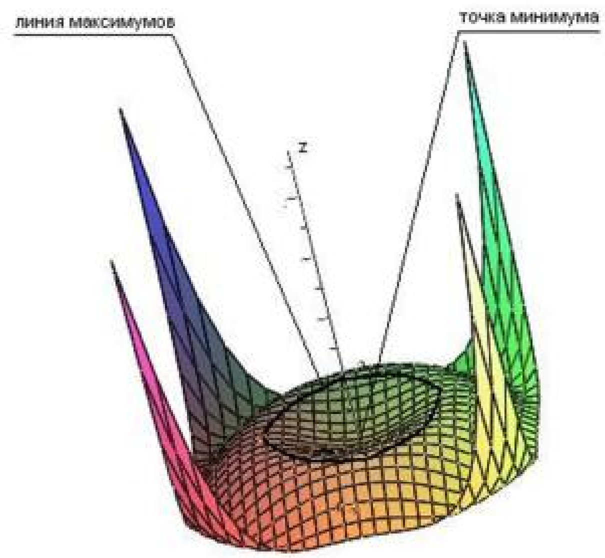


Рис.17.2. Экстремумы функции двух переменных

Необходимое условие экстремума определяются теоремой (многомерный аналог теоремы Ферма): если точка M_0 является точкой экстремума дифференцируемой функции $u = f(M)$, то все частные производные первого порядка этой функции в данной точке равны нулю.

Точки, в которых первые частные производные ФНП не существуют или равны нулю называются *критическими (стационарными)*.

Достаточные условия экстремума сформулируем для функции двух переменных $z = f(x, y)$ в открытой области. Пусть для функции $z = f(x, y)$ известна критическая точка $M_0(x_0, y_0)$ и конечные частные производные второго порядка в этой точке: $A = f''_{x^2}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{y^2}(M_0)$, тогда:

1) Если определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} > 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в критической точке $M_0(x_0, y_0)$;
2) При $\Delta < 0$ функция не имеет экстремума в критической точке;
3) При $\Delta = 0$ необходимы другие методы определения экстремума;

В экстремальных точках:

- при $\Delta > 0$ и $A > 0$ (или $A = 0, C > 0$) функция имеет минимум;

- при $\Delta > 0$ и $A < 0$ (или $A = 0, C < 0$) функция имеет максимум;

Алгоритм исследования функции двух переменных $z = f(x, y)$ на экстремум в открытой области:

- определяем частные производные функции z'_x, z'_y;

- находим координаты (x_i, y_i) критических точек $M_i\ (i = 1, 2, ..., n)$ как решения системы уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$;

- вычисляем частные производные второго порядка в критических точках:

$f''_{x^2}(M_1) = A_1$, $f''_{xy}(M_1) = B_1$, $f''_{y^2}(M_1) = C_1$; $f''_{x^2}(M_2) = A_2$, $f''_{xy}(M_2) = B_2$, $f''_{y^2}(M_2) = C_2$;...

$f''_{x^2}(M_n) = A_n$, $f''_{xy}(M_n) = B_n$, $f''_{y^2}(M_n) = C_n$;

- находим знаки определителей $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}$, … , $\Delta_n = \begin{vmatrix} A_n & B_n \\ B_n & C_n \end{vmatrix}$;

- используя достаточные условия экстремумов функции двух переменных, находим какие из критических точек являются экстремальными;

- находим экстремальные значения функции $z = f(x, y)$ в точках экстремума;

Пример. Найти экстремум функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение: находим частные производные первого порядка: $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$;

- решаем систему $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$: $\begin{cases} y = x^2 = 0 \\ x^4 - x = 0 \end{cases}$, $x_1 = 0,\ x_2 = 1;\ y_1 = 0,\ y_2 = 1$ (комплексные корни уравнения $x^4 - x = 0$ не учитываем, т.к. речь идет о функции действительных переменных); имеем две критические точки: $M_1(0,0)$, $M_2(1,1)$;

- вычисляем частные производные второго порядка в критических точках:

$$z''_{x^2} = 6x \Rightarrow z''_{x^2}(M_1) = A_1 = 0;\ z''_{x^2}(M_2) = A_2 = 6;\ z''_{xy} = -3 \Rightarrow z''_{x^2}(M_1) = B_1 = z''_{x^2}(M_2) = B_2 = -3;$$

$$z''_{y^2} = 6y \Rightarrow z''_{y^2}(M_1) = C_1 = 0;\ z''_{y^2}(M_2) = C_2 = 6;$$

- находим знаки определителей $\Delta_1 = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 27$;

- в первой критической точке экстремума нет; во второй критической точке – минимум;

- $z_{\min} = \left(x^3 + y^3 - 3xy\right)\Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = -1$.

9.4 **Наибольшее и наименьшее значения ФНП в замкнутой области**

Определение. Область на плоскости (в пространстве) называется замкнутой, если ее дополнение (в теоретико-множественном смысле) является открытой областью.

Замечание: более просто, но не совсем точно: замкнутая область – это открытая область вместе со своей границей. Для наших дальнейших целей хватит определения, приведенного в данном замечании.

Функция $z = f(x, y)$ или $z = f(x, y, z)$ может достигать в граничных точках таких значений, которые превышают максимальные значения внутри области, а минимальные значения внутри области могут оказаться больше некоторых значений на границе.

Для определения наибольших и наименьших значений в замкнутой области используют следующий алгоритм:

- определяем критические точки внутри области и значения функции в этих точках (после формального нахождения критических точек необходима проверка их попадания в заданную область);

- находим критические точки, лежащие на границе области и значения функции в этих точках: уравнение граничной линии $y = \varphi(x)$ (или уравнения $x = \psi(t), y = \chi(t)$, если линия задана параметрически) подставляем в уравнение функции $z = f(x, \varphi(x))$ (или $z = f(\psi(t), \chi(t))$ и получаем уравнение функции одной переменной, которое исследуется на экстремум известными методами;

- в угловых граничных точках, если таковые имеются, находим числовые значения функции $z = f(x, y)$;

- из сравнения экстремальных значений функции внутри области, на граничных линиях и в угловых точках устанавливаем наибольшее и наименьшее значения функции;

Замечание: как внутри области для функции $z = f(x, y)$, так и на границе для функции $z = f(x, \varphi(x))$ (или $z = f(\psi(t), \chi(t))$ после нахождения критических точек незачем проверять, являются ли они точками экстремума – в результате сравнения экстремальных значений на последнем этапе алгоритма неэкстремальные точки отсеются сами собой.

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в замкнутой области, ограниченной линиями $y = 0$ и $y = 4x^2 - 4$.

Решение: Изображаем замкнутую область определения функции (рис.17.3); имеются угловые точки - $M_1(-1,\ 0)$ и $M_2(1,\ 0)$;

- находим критические точки внутри области:

$\begin{cases} z'_x = 2x + y = 0 \\ z'_y = x = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0,\ y = 0$; имеем одну критическую точку $O(0,\ 0)$, которая лежит на границе области. Значит, внутри области экстремальных точек нет; $z(0,0) = -2$

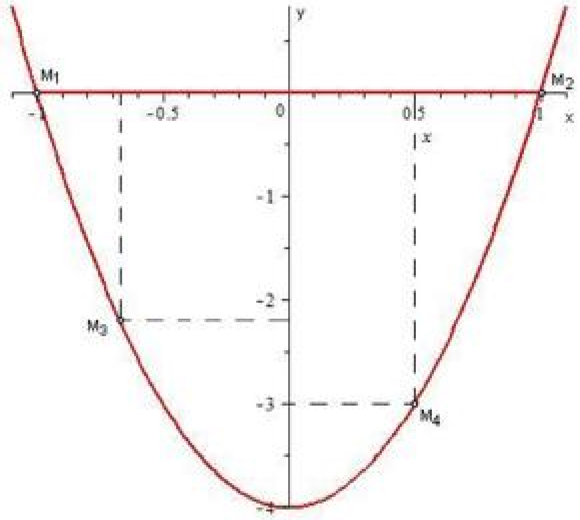


Рис.17.3. Пример нахождения наибольшего и наименьшего значений функции в замкнутой области

- определяем критические точки на граничной линии $y = 4x^2 - 4$ при $x \in (-1,\ 1)$; для этого подставляем в функцию $z = x^2 + xy - 2$ уравнение $y = 4x^2 - 4$: $z = x^2 + x(4x^2 - 4) - 2 = 4x^3 + x^2 - 4x - 2$; получили функцию одной переменной, которую теперь исследуем на наличие критических точек; $\dfrac{dz}{dx} = 12x^2 + 2x - 4 = 0$ $\Rightarrow x_1 = -\dfrac{2}{3},\ x_2 = \dfrac{1}{2}$; обе эти точки попадают в интервал $x \in (-1,\ 1)$ и, значит, являются критическими; при этом $\Rightarrow y_1 = -\dfrac{20}{9},\ y_2 = -3$; определяем числовые значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в критических точках $M_3\left(-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{20}{9}\right)$, $M_4\left(\dfrac{1}{2}, -3\right)$: $z(M_3) = -\dfrac{2}{27}$, $z(M_4) = -\dfrac{13}{4}$;

- определяем критические точки на граничной линии $y = 0$ при $x \in (-1,\ 1)$; для этого подставляем в функцию $z = x^2 + xy - 2$ уравнение $y = 0$: $z = x^2 - 2$; получили функцию одной переменной, которую теперь исследуем на наличие критических точек; $\dfrac{dz}{dx} = 2x = 0 \Rightarrow x_3 = 0$,при этом $y_3 = 0$ и $z(0,0) = -2$ (как и следовало ожидать получили уже найденную ранее точку $O(0,\ 0)$, однако при этом убедились, что на линии $y = 0$ других экстремальных точек нет);

- находим значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в угловых точках $M_1(-1,\ 0)$ и $M_2(1,\ 0)$: $z(-1,0) = -1$, $z(1,0) = -1$;

- сравниваем все числовые значения функции $z = x^2 + xy - 2$ в критических и угловых точках: $z(0,0) = -2$, $z(M_3) = -\frac{2}{27}$, $z(M_4) = -\frac{13}{4}$, $z(-1,0) = -1$, $z(1,0) = -1$; выбираем из них наибольшее и наименьшее значения функции: $z_{\min} = z(M_4) = -\frac{13}{4}$, $z_{\max} = z(M_3) = -\frac{2}{27}$.

Тема 10: Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка и их приложения

В первых двух разделах данной темы рассматриваются основные исходные положения, относящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ДУ) любого порядка на примерах ДУ первого порядка. Далее приведены методы решения обыкновенных ДУ первого порядка, имеющих широкое применение при математическом моделировании в физике, общетехнических науках и инженерных приложениях.

10.1 **Общие исходные положения**

Определение: *обыкновенным ДУ* называется уравнение, содержащее независимую переменную, неизвестную функцию этой переменной и производные этой функции, связанные между собой различными аналитическими операциями.

Замечание: в дифференциальном уравнении может в явном виде не присутствовать независимая переменная, или неизвестная функция этой переменной; отличительным признаком дифференциального уравнения является наличие в нем хотя бы одной производной (любого порядка) от неизвестной функции.

Определение: наивысший порядок производной в дифференциальном уравнении называется *порядком* этого *уравнения*.

Замечание: ДУ любого порядка может быть задано в явной, неявной форме или в дифференциалах.

Примеры: 1. $y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$- ДУ n- го порядка в явной форме (*разрешенное относительно старшей производной*);

2. $F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ - ДУ n - го порядка в неявной форме (*не разрешенное относительно старшей производной*);

3. $f(x,y)dx + g(x,y)dy = 0$ - *ДУ первого порядка в дифференциалах*;

Решением ДУ называется любая функция, обращающая это уравнение в тождество.

Замечание 1. Как правило (а в инженерных задачах практически всегда), дифференциальное уравнение имеет бесконечно много решений; простейшим примером, подтверждающим это, является дифференциальное уравнение вида $y' = f(x)$, решением которого является любая первообразная функции $f(x)$. В качестве примера ДУ, имеющего ровно одно решение, можно привести, например, такое: $\left(\frac{y}{x} - y'\right)^2 + (y' - 1)^2 = 0$; вообще говоря, чуть ли ни на каждое правило можно искусственно сконструировать какое-либо исключение; такие исключения, в большинстве случаев, не имеют никакого практического применения;

Среди решений ДУ в технических приложениях наибольший интерес представляют общее, частные и особые решения. Общее решение ДУ порядка n может быть представлено в явной форме $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$ или неявной форме $\Phi(x, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$, где $C_1, C_2, ..., C_n$ - произвольные постоянные, которые могут принимать любые числовые значения из множества действительных чисел в удобной для представления общего решения форме $(C, \ln|C|, e^C \; и\, т.п.)$

Замечание 2. Каждое решение ДУ является дифференцируемой функцией; это позволяет проводить проверку правильности решения ДУ – функцию и ее производные подставляют в ДУ и получают тождество, если все вычисления проведены правильно.

Пример 1. Показать, что функция $y = x + C\sqrt{1+x^2}$ является общим решением ДУ $(xy+1)dx - (x^2+1)dy = 0$.

Решение. Необходимо показать, что при подстановке заданной функции в ДУ получим тождество при любом значении $C \in R$. Преобразуем уравнение, заданное в дифференциалах, к явной форме: $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+1}{x^2+1}$. Находим производную функции $y = x + C\sqrt{1+x^2}$: $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}$. С другой стороны, подставляем заданную функцию в правую часть ДУ в явной форме:

$$\frac{xy+1}{x^2+1} = \frac{x \cdot \left(x + C\sqrt{1+x^2}\right) + 1}{x^2+1} = \frac{(x^2+1) + Cx\sqrt{1+x^2}}{x^2+1} = 1 + \frac{Cx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

В результате получили, что правая и левая части ДУ $\frac{dy}{dx}=\frac{xy+1}{x^2+1}$ при $y=x+C\sqrt{1+x^2}$ тождественно равны при любом значении постоянной C

Пример 2. Показать, что функция $y=arctg(x+y)+C$ при любом значении постоянной C является решением ДУ $(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1$.

Решение: функция $y=arctg(x+y)+C$ задана в неявной форме; дифференцируем ее как сложную функцию.

$y'=\frac{1}{1+(x+y)^2}\cdot(1+y')$; $y'\left(1-\frac{1}{1+(x+y)^2}\right)=\frac{1}{1+(x+y)^2}$; $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{(x+y)^2}$. Подставляя эту производную в дифференциальное уравнение, убеждаемся, что уравнение обращается в тождество при любом значении постоянной C.

Из общего решения можно получить частные решения, если произвольным постоянным придавать различные конкретные числовые значения. Это позволяет интерпретировать общее решение ДУ как семейство (множество) частных решений.

В прикладных задачах для определения конкретных числовых значений произвольных постоянных используют дополнительную информацию о процессе, описываемом исследуемым ДУ (см. 18.2.).

Замечание: конкретные представления о методике нахождения особых решений можно получить в разделе 18.3, пример 1.

Задача составления ДУ для любых инженерных задач не является задачей математики. Методы составления ДУ технических объектов изучаются общетехническими науками (теоретическая механика, теоретическая электротехника, теория автоматического управления и т.п.). В математике ДУ обычно изучаются как готовые математические объекты.

Простейшим способом составления ДУ является метод дифференциалов (см. раздел 15.9). В прикладных задачах часто используют физические закономерности в дифференциальной форме. Рассмотрим простой пример составления и решения ДУ первого порядка.

Пример 3. Температура вынутой из закалочной печи детали равна $200^{\circ}C$, температура окружающего воздуха $T_c = 20^{\circ}C$. Найти зависимость температуры остывающей детали от времени.

Решение: из физики известно (закон Фурье), что скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_c) = -k(T - 20)$, где t - текущее время, T - текущая температура детали в момент времени t, $T_c = 20^{\circ}C$ - температура окружающей среды, k - постоянный коэффициент пропорциональности, учитывающий массу остывающего тела, его площадь охлаждения, теплоемкость материала, из которого изготовлена деталь и т.п.).

Составленное дифференциальное уравнение является ДУ первого порядка в явной форме. Рассмотрев производную как отношение дифференциалов, получим $\frac{dT}{T-20} = -kdt$, откуда

$\int \frac{dT}{T-20} = -k\int dt$, $\ln|T - 20| = -kt + C_0$.

При $T > 20$ получим $\ln(T-20) = -kt + C_0$, $T = e^{-kt+C_0} + 20 = e^{C_0}e^{-kt} + 20$

Замечание: произвольную постоянную можно записывать в любой форме, удобной для упрощения решения; здесь удобно будет положить $C = e^{C_0}$.

$T = Ce^{-kt} + 20$.

10.2 **Задача Коши**

При исследовании реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями, для практического применения результата в большинстве случаев необходимо иметь в качестве решения не бесконечное множество функций (общее решение), а одну конкретную функцию (*частное решение*).

Задача нахождения частного решения при заданных начальных условиях называется *задачей Коши*.

Определение. Начальными условиями ДУ n- го порядка называют совокупность числовых значений неизвестной функции и ее производных до $(n-1)$- го порядка включительно при известном начальном значении аргумента.

Замечание: общее количество числовых значений функции и ее производных в начальных условиях должно быть равно порядку ДУ.

Задача Коши для ДУ n- го порядка формулируется следующим образом: найти решение заданного дифференциального уравнения $F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$ при начальных условиях $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, ... $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Замечание: для дифференциального уравнения первого порядка задача Коши сводится к нахождению частного решения ДУ $F(x, y, y') = 0$ при условии $y(x_0) = y_0$;

Рассмотрим методику нахождения частного решения, соответствующего известным начальным условиям, на конкретном примере.

Пример. В задаче об остывании твердого тела (пример 3, 18.1) получено общее решение $T = Ce^{-kt} + 20$ дифференциального уравнения. Найдем постоянную C по начальным условиям и определим время остывания детали до 30°.

Решение: если принять за начальный момент времени $t_0 = 0$ момент извлечения детали из печи, то начальное условие задачи Коши можно записать в виде $T(0) = 200^\circ C$. Подставив эти данные в общее решение, получим алгебраическое уравнение $200 = Ce^{-k \cdot 0} + 20$, из которого находим $C = 180$. Таким образом, получаем частное решение $T = 180e^{-kt} + 20$.

В графической форме зависимость температуры остывания детали от времени ее нахождения в воздушной среде при $T_c = 20^\circ C$ и различных начальных температурах показана на рис.18.1.

Используя формулу $T = 180e^{-kt} + 20$, определим время остывания детали до 30°. При $T = 30^\circ$

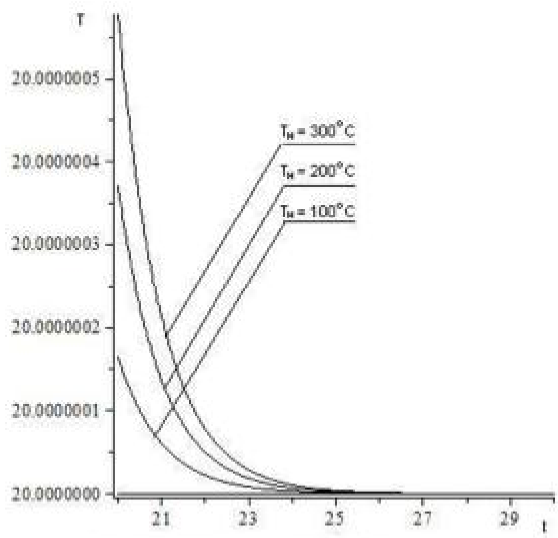


Рис.18.1 Пример. Остывание нагретой детали

получим $30 = 180e^{-kt} + 20 \Rightarrow t = \dfrac{\ln 18}{k}$.

Графики частных решений как функций при различных начальных условиях называются *интегральными кривыми*.

На рис.18.1 приведены три интегральные кривые, соответствующие различным начальным условиям.

Геометрически задачу Коши можно интерпретировать как задачу нахождения интегральной кривой, проходящей через заданную точку на плоскости.

Точки, в которых задача Коши имеет не единственное решение, называются *особыми точками*. Интегральная кривая, в каждой точке которой решение задачи Коши не единственно, соответствует *особому решению* дифференциального уравнения.

Не существует общих аналитических методов решения ДУ первого порядка. Для различных типов ДУ разработаны разные специальные методы решения. Многие важные для практических приложений ДУ можно решить только приближенными методами. Ниже рассмотрены методы решения важных для приложений типов ДУ первого порядка.

10.3 **Метод Эйлера для приближенного интегрирования ДУ первого порядка**

Наиболее простым и универсальным (т.е. применимым к любым типам уравнений первого порядка) является *метод Эйлера*, позволяющий решить задачу Коши на любом (как угодно большом, но конечном) интервале изменения независимой переменной x. Метод Эйлера лежит в основе других, более совершенных численных методов.

Пусть дано ДУ первого порядка, разрешенное относительно производной $y' = f(x, y)$ (функция $z = f(x, y)$ - непрерывна) с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Требуется решить поставленную задачу Коши на заданном отрезке $[x_0,\ x_n]$.

При приближенном решении ДУ интегральная кривая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, заменяется ломаной (*ломаной Эйлера*), которая строится следующим образом.

Делим отрезок $[x_0, x_n]$ на n равных частей $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$ некоторой длины h. По начальному условию $y(x_0) = y_0$ определяем тангенс угла наклона касательной в начальной точке: $tg\alpha_0 = y_0' = f(x_0, y_0)$. Интегральную кривую на отрезке $[x_0, x_1]$ заменяем отрезком касательной $y = y_0 + y_0'(x - x_0)$. Определяем в точке $x_1 = x_0 + h$ приближенное значение ординаты интегральной кривой $\overline{y}_1 = y_0 + h \cdot tg\alpha_0 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$. Затем последовательно определяем $tg\alpha_1 = y_1' = f(x_1, \overline{y}_1)$, $\overline{y}_2 = \overline{y}_1 + h \cdot f(x_1, \overline{y}_1)$; $tg\alpha_2 = y_2' = f(x_2, \overline{y}_2)$, $\overline{y}_3 = \overline{y}_2 + h \cdot f(x_2, \overline{y}_2)$; …; $tg\alpha_{n-1} = y_{n-1}' = f(x_{n-1}, \overline{y}_{n-1})$, $\overline{y}_n = \overline{y}_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}, \overline{y}_{n-1})$. В результате получаем приближенное значение задачи Коши в табличной форме. По данным таблицы можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной линии.

Пример. Решить задачу Коши $y' = x + y$, $y(1) = 1$ на отрезке $[1, 2]$, разбивая заданный интервал на 10 частей. Найти приближенное значение задачи Коши в точке $x = 2$.

Решение. Делим отрезок $[1, 2]$ на десять равных частей: шаг интегрирования $h = \frac{2-1}{10} = 0{,}1$.

Результаты вычислений сведем в таблицу.

i	x_i	$\overline{y}_i$	$\Delta y_i = 0{,}1(x_i + \overline{y}_i)$	$y_{i+1} = \overline{y}_i + \Delta y_i$
0	1	1	0,2	1,2
1	1,1	1,2	0,23	1,43
2	1,2	1,43	0,263	1,693
3	1,3	1,693	0,299	1,992
4	1,4	1,992	0,339	2,331
5	1,5	2,331	0,383	2,714
6	1,6	2,714	0,431	3,145
7	1,7	3,145	0,485	3,630

8	1,8	3,630	0,543	4,173
9	1,9	4,173	0,607	4,780
10	2	4,780		

На Рис.18.5 показана полученная ломаная Эйлера. Из-за достаточно мелкого разбиения эта ломаная кажется гладкой кривой. Приближенное решение задачи Коши в точке $x = 2$ равно 4,78. При точном решении линейного ДУ $y' = x + y$ получим $y(2) = 5{,}155$.

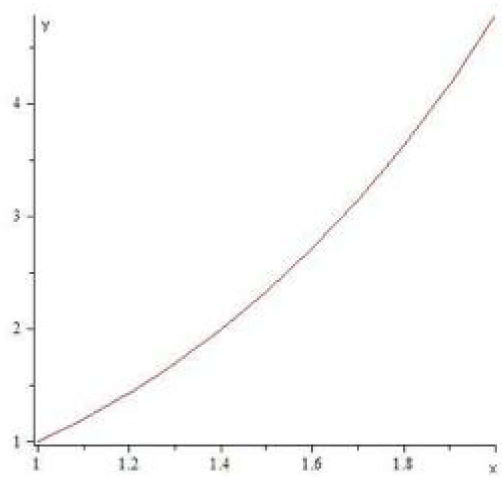


Рис.18.5. Пример применения метода Эйлера

Основные недостатки метода Эйлера:

- малая точность при большом шаге разбиения h;

- систематическое накопление ошибок при переходе от интервала к интервалу;

Эти недостатки в значительной мере устранены в современных методах численного решения ДУ, в основе которых во многих случаях лежит метод Эйлера.

Тема 12: Обыкновенные дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков

12.2 **Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

ДУ указанного типа всегда можно привести к стандартному (*каноническому*) виду

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{1}$$

где p и q - постоянные коэффициенты.

Общее решение ДУ вида (1) имеет вид $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где y_1, y_2 - линейно независимая (*фундаментальная*) система частных решений.

Два решения ДУ y_1, y_2 называются *линейно независимыми*, если из равенства $Ay_1(x) + By_2(x) = 0$, верного для всех значений независимой переменной x (где A, B - некоторые постоянные), следует, что $A = B = 0$. В частности, если отношение $\frac{y_1}{y_2}$ имеет смысл, то для линейно независимых решений оно не является постоянной величиной.

Замечание: если некоторая функция y_0 является решением уравнения (1), то при любом значении постоянной C_0 функция $C_0 y_0$ также будет решением этого уравнения. В частности, функция, тождественно равная нулю будет решением уравнения (1).

Пусть частное решение имеет вид $y = e^{kx}, k = const$. Подставляя эту функцию в уравнение (1) , получаем $k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$, откуда

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (2)$$

Квадратное уравнение (2) называется *характеристическим уравнением*, соответствующим ДУ (1).

Решая уравнение (2), получим два корня k_1, k_2, каждому из которых соответствует некоторое частное решение. При этом возможны три частных случая:

Случай 1. Корни k_1, k_2 - различные действительные числа. Тогда частные решения имеют вид $y_1 = e^{k_1 x}, y_2 = e^{k_2 x}$. Эти решения линейно независимы и общее решение ДУ имеет вид $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$.

Случай 2. Корни $k_1 = k_2 = k$ - равные действительные числа. Тогда линейно независимые решения ДУ (1) имеют вид $y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}$, а общее решение - $y = C_1 e^{kx} + C_2 xe^{kx}$.

Случай 3. Корни характеристического уравнения – комплексно сопряженные числа $k_1, k_2 = \alpha \pm i\beta$. В этом случае частные решения имеют вид $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, а общее решение - $y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Таким образом, линейные ДУ второго порядка с постоянными коэффициентами решаются элементарными методами без использования интегрирования. Возможные варианты общих решений таких ДУ приведенные в Таблице 1, выбирают на основе определения вида корней (действительные или комплексные) и соотношений между ними.

Таблица 1

	Корни характеристического уравнения	Общее решение
1	$D = p^2 - 4q > 0$ $k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
2	$D = p^2 - 4q = 0$ $k_1 = k_2 = k \in R$	$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$
3	$D = p^2 - 4q < 0$ $k_1, k_2 = \alpha \pm i\beta \notin R$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$
4	(частный случай 3) $D = -4q = 0$, $k_1, k_2 = \pm i\beta \notin R$	$y = C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$

Замечание. Таблицу 1 можно использовать и при выборе общих решений неполных линейных однородных уравнений $y'' + py' = 0$, $y'' + qy' = 0$.

Пример 1. Найти решение ДУ $2y'' - 5y' + 2y = 0$ при начальных условиях $y(0) = y'(0) = 2$ (Задача Коши).

Решение. 1. Составляем характеристическое уравнение, соответствующее заданному ДУ (производную y'' заменяем на k^2 , y' - на k , y - на 1): $2k^2 - 5k + 2 = 0$; $k_1 = \frac{1}{2}, k_2 = 2$.

2. при $k_1, k_2 \in R, k_1 \neq k_2$ общее решение представляется в виде (Табл.1, п.1) $y = C_1 e^{\frac{x}{2}} + C_2 e^{2x}$;

3. находим частное решение, соответствующее начальным условиям; $y(0) = C_1 e^{\frac{0}{2}} + C_2 e^{2\cdot 0}$

$\Rightarrow y(0) = C_1 + C_2 = 2$, $y' = \frac{1}{2} C_1 e^{\frac{x}{2}} + 2C_2 e^{2x}$; $y'(0) = \frac{1}{2} C_1 + 2C_2 = 2$ $\Rightarrow C_1 + 4C_2 = 4$.

Полученная система линейных уравнений $\begin{cases} C_1 + C_2 = 2 \\ C_1 + 4C_2 = 4 \end{cases}$ имеет единственное решение

$C_1 = \frac{4}{3}$, $C_2 = \frac{2}{3}$. Тогда частное решение записывается в виде $y = \frac{4}{3} e^{\frac{x}{2}} + \frac{2}{3} e^{2x}$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 5 = 0$, его корни - $k_{1,2} = 2 \pm i$. Общее решение представляется в виде (Табл. 1 п.3): $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.

Для дифференциальных уравнений второго порядка (не только линейных) кроме двух основных задач – нахождения общего решения и решения задачи Коши, существует еще и третья (*Краевая задача*). Она формулируется следующим образом: найти определенную на заданном отрезке $[a, b]$ дважды дифференцируемую функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $F(x, y, y', y'') = 0$ и *краевым (граничным) условиям* $y(a) = y_1, y(b) = y_2$, где $y_1, y_2 \in R$ - заданные числа.

Пример 3. Решить краевую задачу $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Решение. 1.Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm 2i$. Общее решение представляется в виде (табл.1 п.4) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$.

2. Находим частное решение, соответствующее граничным условиям: $y(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = C_1 = 2$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = C_1 \cos\frac{\pi}{2} + C_2 \sin\frac{\pi}{2} = C_2 = 3$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид $y = 2\cos 2x + 3\sin 2x$.

Замечание. В рассмотренном примере числовые значения постоянных определились сразу. В общем случае могла получиться система линейных уравнений относительно неизвестных C_1, C_2.

12.2 **Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами**

В прикладных задачах, в частности в задачах динамики машин, широко используются линейные ДУ второго порядка со специальными правыми частями, которые в общем виде можно представить так: $f(x)=e^{\gamma x}\left(M_n(x)\cos\omega x+N_m(x)\sin\omega x\right)$ (2)

где $M_n(x), N_m(x)$ - многочлены степеней n и m соответственно.

Обычно в приложениях используют ДУ с правыми частями, которые являются частными случаями формулы (2):

1. $f(x)=M_n(x)$, т.е. $\gamma=\omega=0$;
2. $f(x)=M_n(x)e^{\gamma x}$, т.е. $\gamma\neq 0, \omega=0$;
3. $f(x)=M\cos\omega x+N\sin\omega x$, т.е. $\gamma=n=m=0$; один из постоянных коэффициентов может быть равным нулю

Для всех частных случаев и для общего вида правой части (2) можно выбрать готовую структуру частного решения с неопределенными постоянными коэффициентами на основе сравнения корней k_1, k_2 характеристического уравнения и параметров γ, ω правой части $f(x)$. Сведения, необходимые для выбора вида частных решений неоднородных линейных ДУ вида (1) с правой частью вида (2) приведены в таблице 2.

Таблица 2

1	Правая часть	$f(x)=P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$
	Частное решение	$\bar{y}=x^r\left(A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1 x+A_0\right)$, где $A_n, A_{n-1}, \ldots, A_1, A_0$ - неопределенные коэффициенты а) $r=0$ при $k_1\neq 0$, $k_2\neq 0$; б) $r=1$ при $k_1=0$ или $k_2=0$
2	Правая часть	$f(x)=P_n(x)e^{\gamma x}=\left(a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0\right)e^{\gamma x}$
	Частное решение	$\bar{y}=x^r\left(A_n x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1 x+A_0\right)e^{\gamma x}$, где

		$A_n, A_{n-1}, ..., A_1, A_0$ - неопределенные коэффициенты, а) $r=0$ при $k_1 \neq \gamma$, $k_2 \neq \gamma$; б) $r=1$ при $k_1=\gamma$ или $k_2=0$ в) $r=2$ при $k_1=k_2=\gamma$
3	Правая часть	$f(x)=M\cos\omega x+N\sin\omega x$
	Частное решение	$\bar{y}=x^r(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$, где A, B - неопределенные коэффициенты а) $r=1$ при $k_{1,2}=\pm i\omega$, б) $r=0$ в остальных случаях
4	Правая часть	$f(x)=M_n(x)\cos\omega x+N_m(x)\sin\omega x$
	Частное решение	$\bar{y}=x^r(P_s(x)\cos\omega x+Q_s(x)\sin\omega x)$, где $s=\max\{m,n\}$, а) $r=1$ при $k_{1,2}=\pm i\omega$, б) $r=0$ в остальных случаях
5	Правая часть	$f(x)=e^{\gamma x}(M_n(x)\cos\omega x+N_m(x)\sin\omega x)$
	Частное решение	$\bar{y}=e^{\gamma x}x^r(P_s(x)\cos\omega x+Q_s(x)\sin\omega x)$, где $s=\max\{m,n\}$, а) $r=1$ при $k_{1,2}=\gamma\pm i\omega$, б) $r=0$ в остальных случаях

Замечание: в задачах в качестве аргумента вместо x могут использоваться другие независимые переменные (t, φ и т.п.). Это же относится и к зависимым переменным.

Для правых частей вида 1,2,3 (Табл.2) выбор частного решения можно существенно упростить, используя второй способ выбора частных решений по Таблице 3.

Таблица 3

	Вид правой части ДУ	Ограничения на коэффициенты и параметры правой части	Вид частного решения ДУ

1	$f(x)=P_n(x)$	а) $p \neq 0, q \neq 0$		$\overline{y}=Q_n(x)$
		б) $p=0, q \neq 0$		$\overline{y}=Q_n(x)$
		в) $p \neq 0, q=0$		$\overline{y}=xQ_n(x)$
		г) $p=0, q=0$		$\overline{y}=x^2Q_n(x)$
2	$f(x)=P_n(x)e^{\gamma x}$	а) $\gamma^2+p\gamma+q \neq 0$		$\overline{y}=Q_n(x)e^{\gamma x}$
		$\gamma^2+p\gamma+q=0$	б) $\dfrac{p^2}{4}>q$	$\overline{y}=xQ_n(x)e^{\gamma x}$
			в) $\dfrac{p^2}{4}=q$	$\overline{y}=x^2Q_n(x)e^{\gamma x}$
3	$f(x)=M\cos\omega x+N\sin\omega x$	а) $q-\omega^2 \neq p$		$\overline{y}=A\cos\omega x+B\sin\omega x$
		б) $q=\omega^2$		$\overline{y}=x(A\cos\omega x+B\sin\omega x)$

Первый способ выбора частных решений (Табл.1) является наиболее общим, но несколько более сложным. Второй способ (Табл.3) проще, но может использоваться только для правых частей вида 1,2,3. Поэтому второй способ целесообразно использовать для проверки правильности выбора по первому способу.

Пример 1. Найти общее решение ДУ $y''-3y'+2y=2x^2-4x-17$.

Решение. 1. ДУ является линейным, поэтому его общее решение представляется так: $y=\widetilde{y}+\overline{y}$. Находим общее решение однородного уравнения $y''-3y'+2y=0$: $k^2-3k+2=0$, $k_1=1,\ k_2=2$, значит, $\widetilde{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2. определяем вид частного решения, соответствующего правой части $f(x)=2x^2-4x-17$. Вид частного решения находится из первой строки Таблицы 2 при $r=0$: $\overline{y}=Ax^2+Bx+C$ - многочлен второй степени с неопределенными коэффициентами.

Проверка (второй способ): Коэффициенты ДУ $p=-3\neq 0, q=2\neq 0$, правая часть $2x^2-4x-17$ соответствует табличной правой части $f(x)=P_n(x)$ при $n=2$, поэтому $\overline{y}=Ax^2+Bx+C$.

3.Находим числовые значения неопределенных коэффициентов A,B,C, подставляя в заданное ДУ частное решение $\overline{y}=Ax^2+Bx+C$ и его производные $\overline{y}'=2Ax+B$, $\overline{y}''=2A$: $2A-3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=2x^2-4x-17$. Группируем коэффициенты в левой части тождества $2Ax^2+(2B-6A)x+(2A-3B+2C)=2x^2-4x-17$ затем приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях в левой и правой частях тождества: $\begin{cases} 2A=2 \\ 2B-6A=-4 \\ 2A-3B+2C=-17 \end{cases}$. Решив систему, получим $A=1, B=-5, C=-2$ и $\overline{y}=x^2-5x-2$. Общее решение уравнения имеет вид $y=\widetilde{y}+\overline{y}=C_1e^x+C_2e^{2x}+x^2-5x-2$.

Пример 2. Найти общее решение ДУ $y''+4y'-12y=8\cos 2x$ и частное решение при начальных условиях $y(0)=0, y'(0)=0$.

Решение. 1. Находим общее решение однородного уравнения $y''+4y'-12y=0$: $k^2+4k-12=0$, $k_1=-6, k_2=2$, значит, $\widetilde{y}=C_1e^{-6x}+C_2e^{2x}$.

2.Определяем вид частного решения, соответствующего правой части заданного неоднородного уравнения: правая часть $f(x)=8\cos 2x$ соответствует табличной правой части $f(x)=M\cos\omega x+N\sin\omega x$, при этом $r=0$. Значит, частное решение будет иметь вид $\overline{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$.

Проверка (второй способ). Коэффициенты ДУ: $p=4, q=-12, \omega=2.$ При $q-\omega^2\neq p\,(-12-4\neq 4)$ правая часть $f(x)=8\cos 2x$ соответствует табличной правой части $f(x)=M\cos\omega x+N\sin\omega x$ при $N=0$, поэтому частное решение ДУ имеет вид $\overline{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$.

3.Находим значения неопределенных коэффициентов A,B, подставляя в заданное уравнение функцию $\overline{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$ и ее производные $\overline{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$,

$\bar{y}'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x$. Получим тождество $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x + 4(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) - 12(A\cos 2x + B\sin 2x) = 8\cos 2x$;

$(-16A + 8B)\cos 2x + (-8A - 12B)\sin 2x = 8\cos 2x$. Ввиду линейной независимости синуса и косинуса приравниваем отдельно коэффициенты при синусе и коэффициенты при косинусе: $\begin{cases} -16A + 8B = 8 \\ -8A - 12B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{2}{5}, B = \frac{1}{5}$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$\bar{y} = -\frac{2}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x$, общее решение - $y = \tilde{y} + \bar{y} = C_1 e^{-6x} + C_2 e^{2x} - \frac{2}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x$.

4.Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = C_1 + C_2 - \frac{2}{5} = 0$,

$y' = -6C_1 e^{-6x} + 2C_2 e^{2x} + \frac{4}{5}\sin 2x + \frac{2}{5}\cos 2x$; $y'(0) = -6C_1 + 2C_2 + \frac{2}{5} = 0$. Решив систему

$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{2}{5} \\ -6C_1 + 2C_2 = -\frac{2}{5} \end{cases}$, получим $C_1 = \frac{3}{20}$, $C_2 = \frac{1}{20}$. Искомое частное решение имеет вид

$y = \frac{3}{20}e^{-6x} + \frac{1}{20}e^{2x} - \frac{2}{5}\cos 2x + \frac{1}{5}\sin 2x$.

Пример 3. Найти общее решение ДУ $y'' + 2y' + y = (x+1)e^{-x}$.

Решение. 1. Общее решение однородного уравнения $y'' + 2y' + y = 0$: $k^2 + 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = -1$, $\tilde{y} = (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

2.Определяем вид частного решения. Правая часть ДУ $f(x) = (x+1)e^{-x}$ соответствует табличной правой части (Табл.2) $f(x) = P_n(x)e^{-x}$ при $n = 1, \gamma = -1$. При этом $k_1 = k_2 = -1 = \gamma$, значит, $r = 2$, $Q_n(x) = Ax + B$ и частное решение имеет вид $\bar{y} = x^2(Ax + B)e^{-x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{-x}$.

Проверка предоставляется читателю.

3. $\bar{y}' = (3Ax^2 + 2Bx)e^{-x} - (Ax^3 + Bx^2)e^{-x} = (-Ax^3 + 3Ax^2 - Bx^2 + 2Bx)e^{-x}$;

$\bar{y}'' = (Ax^3 - 6Ax^2 + Bx^2 + 6Ax - 4Bx + 2B)e^{-x}$. Подставляем частное решение и его производные в ДУ, делим равенство на e^{-x} и приводим подобные слагаемые: $6Ax + 2B = x + 1$. Значит,

$6A=1,\ 2B=1 \Rightarrow A=\frac{1}{6}, B=\frac{1}{2}$. Частное решение ДУ имеет вид $\bar{y}=\left(\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}$, общее решение - $\tilde{y}=\left(C_1+C_2x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}\right)e^{-x}$.

Рассмотренные табличные способы выбора решения можно использовать и для неполных линейных неоднородных ДУ с постоянными коэффициентами.

Пример 4. Найти решение ДУ $y''+5y'=10x^2+2$ на отрезке $[0,\ 1]$ при граничных условиях $y(0)=0, y(1)=-\frac{62}{75}$.

Решение. 1. Общее решение однородного уравнения: $k^2+5k=0$, $k_1=-5,\ k_2=0$; $\tilde{y}=C_1e^{-5x}+C_2e^0=C_1e^{-5x}+C_2$.

2.Определяем вид частного решения неоднородного уравнения первым способом: правая часть уравнения соответствует первой строке Таблицы 2 при $n=2$. Поскольку $k_1=-5,\ k_2=0$, то $r=1$ и частное решение следует искать в виде $\bar{y}=x\left(Ax^2+Bx+C\right)=Ax^3+Bx^2+Cx$. Проверка вторым способом предоставляется читателю.

3. $\bar{y}'=3Ax^2+2Bx+C$, $\bar{y}''=6Ax+2B$; подставляем производные частного решения в уравнение: $6Ax+2B+5\left(3Ax^2+2Bx+C\right)=10x^2+2$, откуда $\begin{cases} 15A=10 \\ 6A+10B=0 \\ B+5C=2 \end{cases}$

$\Rightarrow A=\frac{2}{3}, B=-\frac{2}{5}, C=\frac{14}{25}$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $\bar{y}=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{14}{25}x$, общее - $y=C_1e^{-5x}+C_2+\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{14}{25}x$.

4. Подставляем граничные условия в общее решение неоднородного ДУ: $\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ \frac{C_1}{e^5}+C_2-\frac{62}{75}=-\frac{62}{75} \end{cases}$,

откуда $C_1=C_2=0$ и искомое решение краевой задачи совпадает с частным решением $\bar{y}=\frac{2}{3}x^3-\frac{2}{5}x^2+\frac{14}{25}x$.

Тема 13: Числовые и степенные ряды

13.1 **Исходные положения**

Рядом называется бесконечная сумма вида $u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, где слагаемые (*члены ряда*) $u_1, u_2, u_3, ...u_n...$ являются числами или функциями.

Сумма конечного числа последовательных членов ряда $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$ называется *частичной суммой* ряда порядка n.

Ряды являются важнейшими математическими объектами для представления функций и различных приближенных вычислений. Например, бесконечную десятичную дробь можно представить в виде суммы ряда: $\frac{1}{3} = 0{,}333... = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + ... + \frac{3}{10^n} + ...$.

Замечание: в общем случае понятие ряда можно ввести на любом множестве объектов, на котором определены операции сложения и предельного перехода, например, на векторах или комплексных числах. В рамках данного курса мы будем различать *числовые ряды,* членами которых являются действительные числа и *функциональные ряды*, членами которых являются функции одной действительной переменной.

13.2 **Числовые ряды**

Числовым рядом будем называть математический объект, представляющий собой бесконечную сумму членов последовательности действительных чисел (см. Практикум, часть II, тема 5).

Например, последовательности $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ... = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ соответствует ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} ...$, а последовательности $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{n}, ... = \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ - ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{(-1)^{n+1}}{n} ...$.

Суммируя подряд, различное конечное число первых членов ряда, получают последовательность частичных сумм ряда $\{S\} = S_1, S_2, ..., S_n, ...$ Если предел последовательности частичных сумм ряда является конечным числом $\left(\lim_{n\to\infty} S_n = A, |A| < \infty\right)$, то числовой ряд называется *сходящимся*. Если предел частичных сумм не существует или равен $\pm\infty$, то ряд называется *расходящимся.*

Определение факта сходимости (или расходимости) ряда является наиболее важной для приложений математической задачей. Если ряд сходится, то приближенное вычисление его суммы можно поручить компьютеру.

В прикладных задачах, как правило, используют сходящиеся ряды. Эти ряды обладают важными свойствами:

1. Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ сходится и имеет в пределе сумму S, то ряд $\lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + \ldots + \lambda u_n + \ldots$ также сходится и имеет в пределе сумму λS;
2. Если ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots$ сходятся и имеют в пределе суммы S_u и S_v соответственно, то ряды $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots + (u_n + v_n) + \ldots$ и $(u_1 - v_1) + (u_2 - v_2) + (u_3 - v_3) + \ldots + (u_n - v_n) + \ldots$ также сходятся и имеют в пределе суммы $S_u + S_v$ и $S_u - S_v$ соответственно;
3. Если исходный ряд сходится, то ряд, полученный отбрасыванием конечного числа его первых членов (*остаток ряда*) также сходится. Если сходится какой-нибудь из остатков ряда, то сходится и сам ряд;

Замечание 1: если заранее не известно сходится ряд или расходится, то при суммировании нельзя произвольно расставлять скобки в бесконечной сумме. Например, в сумме $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$ расстановка скобок $(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots$ приводит к ответу 0, а расстановка скобок $1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1.)..$ - к ответу 1. Если сумма ряда зависит от расстановки скобок, то ряд является расходящимся.

Замечание 2: даже у сходящихся рядов нельзя произвольно переставлять слагаемые – от этого может зависеть сумма ряда. Более того, в некоторых сходящихся рядах можно так переставить слагаемые, что сумма станет равна любому наперед заданному числу или бесконечности. Расстановка скобок в сходящихся рядах не влияет на сумму.

Способ определения сходимости с помощью частичных сумм является во многих случаях сложным и трудоемким. Для упрощения вычислений используют специальные признаки (условия) сходимости, которые делят на необходимые и достаточные.

Необходимый признак сходимости Если ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член в пределе стремится к нулю $\left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$.

Следовательно, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Если необходимый признак сходимости $\left(\lim_{n\to\infty} u_n = 0\right)$ выполняется, то еще нельзя делать вывод о сходимости или расходимости ряда. Окончательный ответ можно получить при использовании достаточных признаков. Эти признаки существенно различаются для различных видов рядов. Доказано, что универсального достаточного признака сходимости, пригодного для всех рядов, не существует (кроме способа определения сходимости с помощью частичных сумм).

При использовании различных признаков сходимости (расходимости) рядов фактически вычисляют пределы числовых последовательностей и применяют основные свойства этих пределов (см. Практикум, частьII, тема 5).

Замечание: при вычислении пределов монотонно изменяющихся последовательностей при $n \to \infty$ можно использовать правило Бернулли-Лопиталя, если заменить дискретный аргумент n на непрерывную переменную $x \to \infty$.

13.3 **Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов**

Знакоположительным рядом называется числовой ряд все члены которого являются положительными числами.

Замечание1: если знакоположительный ряд сходится, то его сумма не зависит ни от расстановки скобок, ни от перестановки суммируемых членов ряда;

Замечание 2: в соответствии со свойством остатков ряда, знакоположительным рядом можно считать ряд, все члены которого, начиная с некоторого (не обязательно первого) номера являются положительными числами;

Достаточные признаки сходимости делятся на две группы:

1. Признаки сравнения исследуемого ряда с некоторым эталонным рядом, сходимость (расходимость) которого известна;
2. Признаки, основанные на сравнении различных членов исследуемого ряда или использующие особенности свойств членов этого ряда;

Первый признак сравнения (в неравенствах): пусть даны исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, сходимость (расходимость) которого известна.

1. Если известно, что эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходится, то при $u_n \le v_n$, $\forall n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится;
2. Если известно, что эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходится, то при $u_n \ge v_n$, $\forall n$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также расходится;

Замечание: в силу свойств остатка ряда требование $u_n \le v_n$, $\forall n$ можно заменить более мягким – «$u_n \le v_n$ начиная с некоторого номера n_0». То же касается и условия $u_n \ge v_n$, $\forall n$.

Второй признак сравнения (предельный): пусть даны исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, сходимость (расходимость) которого известна; если $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = A$, где $0 < A < \infty$, то исследуемый и эталонный ряды сходятся или расходятся одновременно.

В качестве эталонных рядов широко используют следующие числовые ряды:

1. *Геометрический ряд* $q + q^2 + ... + q^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} q^n$, являющийся суммой геометрической прогрессии, сходящийся при $|q| < 1$ и расходящийся при $|q| \geq 1$;
2. *Гармонический ряд* (расходящийся) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$;
3. *Обобщенный гармонический ряд* $1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + ... + \frac{1}{n^p} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, сходящийся при $p > 1$ и расходящийся при $p < 1$;

Пример 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n + 3}$

Решение. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости: $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\cdot 2^n + 3} = \left[\frac{1}{4\cdot 2^{\infty} + 3} = \frac{1}{\infty}\right] = 0$. Признак выполняется – возможно, ряд сходится.

Для окончательного решения вопроса о сходимости ряда воспользуемся достаточным признаком сравнения в неравенствах. Для этого преобразуем общий член исследуемого ряда для сравнения его с общим членом какого-либо эталонного ряда из приведенных выше.

$$u_n = \frac{1}{4\cdot 2^n + 3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2^n + 0{,}75} < \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{1}{2}\right)^n = v_n .$$

В качестве эталонного ряда можно выбрать геометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, который сходится, поскольку $q = \frac{1}{2} < 1$. По достаточному признаку сравнения сходится и исследуемый ряд.

Пример 2. Исследовать сходимость числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{2n^3 - n - 25}$

Решение. Проверяем выполнение необходимого признака сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-1}{2n^3-n-25}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{4}{n^2}-\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{25}{n^3}}=\left[\dfrac{0-0}{2-0-0}\right]=0$. Признак выполняется – возможно, ряд сходится.

Степень числителя равна 1, степень знаменателя – 3. Для определения эталонного ряда отбросим в числителе и знаменателе дроби все младшие степени: $u_n^*=\dfrac{4n}{2n^3}=\dfrac{2}{n^2}$. Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4n-1}{2n^3-n-25}$ в качестве эталонного ряда выбираем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. Это обобщенный гармонический ряд с показателем степени $p=2>1$ и, значит, сходящийся.

Используя предельный признак сравнения, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(4n-1)n^2}{2n^3-n-25}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-n^2}{2n^3-n-25}=\dfrac{4}{2}=2$. Поскольку $2\in(0;\,\infty)$, то исследуемый ряд сходится.

13.3.1 **Достаточный признак сходимости Даламбера**

Пусть дан знакоположительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=q$, тогда:

- если $0\le q<1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится,

- если $q>1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится,

- если $q=1$, то признак не позволяет ответить на вопрос о сходимости ряда и необходимо применять другие, более сильные, признаки.

Применение признака Даламбера эффективно, если общий член ряда содержит факториалы или факториальные выражения, а также степенные или показательные выражения.

Замечание: из определения факториала следует, что $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$, $(2n+2)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot 2n\cdot(2n+1)\cdot(2n+2)$; кроме того, $0!=1!=1$.

Пример 3. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n)!}{n^{2n}}$

Решение. В общий член ряда включен факториал, поэтому будем использовать признак Даламбера.

$$u_n = \frac{(2n)!}{n^{2n}};\ u_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)^{2n+2}} = \frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^{2n}(n+1)^2};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!\cdot(2n+1)(2n+2)n^{2n}}{(n+1)^{2n}\cdot(n+1)^2\cdot(2n)!} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = A_1\cdot A_2;$$

$$A_1 = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)-2}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^n = \left[\frac{2}{n+1} = \frac{1}{k};\ n = 2k-1\right] =$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{2k-1} = \left(\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^k\right)^2\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{-1} = \left(e^{-1}\right)^2\cdot 1 = \frac{1}{e^2};$$

$$A_2 = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2\left(2+\frac{2}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = 4;\quad \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = A_1\cdot A_2 = \frac{4}{e^2} = \left(\frac{2}{e}\right)^2 < 1$$

- в соответствии с признаком Даламбера ряд сходится.

13.3.2 **Достаточные признаки сходимости Коши**

Радикальный признак Коши: если для знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$, то :

- при $0 \le q < 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится,

- при $q > 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится,

- при $q = 1$ признак не позволяет ответить на вопрос о сходимости ряда и необходимо применять другие, более сильные, признаки.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2}$.

Решение: используем радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{2n+3}{2n-1}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n-1)+4}{2n-1}\right)^n = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4}{2n-1}\right)^n =$$

$$=\left[\frac{4}{2n-1}=\frac{1}{k};\ n=2k+\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{2k+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}\right)^{2}\cdot\lim_{k\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{k}\right)}=\frac{1}{2}e^{2}\cdot 1=\frac{e^{2}}{2}.$$

Поскольку $\frac{e^2}{2}>1$, ряд расходится.

Заменяя дискретный аргумент n в общем члене ряда $u_n = f(n)$ на непрерывную переменную x, получим заменяющую функцию $f(x)$; если функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и монотонно убывает, то для определения сходимости (расходимости) ряда можно использовать

Интегральный признак Коши: ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$ сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом $\int_k^{\infty}f(x)dx$ (см. Практикум, часть III, тема 14). Нижний предел интегрирования k может быть любым положительным числом $k\geq 1$.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

Решение: последовательность $u_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$ заменяется функцией $f(x)=\frac{1}{x\ln^2 x}$, очевидно, монотонно убывающей.

Проверяем сходимость несобственного интеграла $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$:

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\left[\frac{dx}{x}=d\left(\int\frac{dx}{x}\right)=d\left(\ln|x|\right)\right]=\int_2^{\infty}\frac{d\ln x}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)-\left(-\frac{1}{\ln 2}\right)=0+\frac{1}{\ln 2}<\infty,$$

значит, интеграл $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$ сходится и, следовательно, сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

13.4 **Знакочередующиеся ряды**

Знакочередующимся рядом называется ряд, у которого положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно: $u_1-u_2+u_3-u_4+...+(-1)^{n+1}u_n+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$, $u_n>0$.

Замечание: ряд вида $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + ... + (-1)^n u_n + ... = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n$ также естественно считать знакочередующимся.

Сходимость (расходимость) таких рядов определяют с помощью *признака Лейбница*;

Знакочередующийся ряд сходится тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

1. Последовательность абсолютных значений членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > u_4 > ...$
2. Общий член ряда при $n \to \infty$ стремится к нулю $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

При выполнении этих двух условий сумма ряда S удовлетворяет неравенствам $0 < S < u_1$

Замечание: ряд, составленный из абсолютных значений членов знакочередующегося ряда будем называть модульным рядом.

Знакочередующийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится его модульный ряд.

Модульный ряд является, очевидно, знакоположительным рядом и его сходимость проверяется с помощью достаточных признаков знакопостоянных рядов (21.2). Доказано, что если сходится модульный ряд, то сходится и исходный ряд.

Ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится, а его модульный ряд расходится.

Замечание. Знакочередующиеся ряды могут быть трех видов:

1. *Абсолютно сходящиеся ряды*; в таких рядах можно произвольным образом расставлять скобки и произвольным образом переставлять слагаемые – от этого сумма ряда не изменится;
2. *Условно сходящиеся ряды*; в таких рядах можно произвольным образом расставлять скобки – от этого сумма ряда не изменится, но произвольно переставлять слагаемые нельзя – это может повлиять на сумму ряда;
3. *Расходящиеся ряды*; в таких рядах нельзя ни переставлять слагаемые, ни произвольно расставлять скобки;

Замечание. При исследовании сходимости знакочередующегося ряда можно сначала проверить его абсолютную сходимость, затем, при необходимости, условную. Если знакочередующийся ряд абсолютно сходится, то исследование его условной сходимости является излишним.

Пример. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}$;

Решение. 1. проверяем необходимый признак сходимости: $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3} = \pm \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}\right)}{3n^3} = \frac{0}{3} = 0$. Необходимый признак выполняется. Возможно, ряд сходится.

2. Проверяем абсолютную сходимость ряда. Модульный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^3}$. Преобразуем его общий член для определения эталонного ряда, с которым будем проводить сравнение. $a_n=\frac{2n^2-1}{3n^3}=\frac{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\cdot 3n}=\frac{2-\frac{1}{n^2}}{3n}\approx\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}$. В качестве эталонного ряда можно использовать гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}v_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Воспользуемся достаточным предельным признаком сравнения для проверки сходимости исходного ряда.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{v_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n^2-1)n}{3n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(2-\frac{1}{n^2}\right)}{3n^3}=\frac{2}{3}>0$. Значит исследуемый ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2-1}{3n^3}$ расходится, т.к. расходится эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2-1}{3n^3}$ не является абсолютно сходящимся.

3. Проверим условную сходимость исходного знакочередующегося ряда по признаку Лейбница. Первое условие: из сравнения членов ряда $a_n=\frac{2-\frac{1}{n^2}}{3n}$ и $a_{n+1}=\frac{2-\frac{1}{(n+1)^2}}{3(n+1)}$ видно, что при достаточно больших значениях переменной n числители этих дробей почти одинаковы и приблизительно равны 2, а знаменатель второй дроби на 3 единицы больше знаменателя первой. Значит, начиная с некоторого номера n_0 каждый последующий член ряда будет меньше предыдущего и условие $|u_1|>|u_2|>|u_3|>|u_4|>\ldots$ выполняется, по крайней мере, для какого-то остатка исходного ряда.

Второе условие: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n^3}\right)}{3n^3}=\frac{0}{3}=0$. Второе условие также выполнено, значит некоторый остаток исходного ряда сходится условно. По свойствам остатков исходный ряд также сходится условно.

Замечание. В рамках данной темы мы лишь слегка затронули вопрос о достаточных признаках сходимости ряда. Существует множество других, более мощных признаков сходимости (*признак Раабе, признак Куммера, признак Гаусса, признак Ермакова, признак Абеля, признак Дирихле* и многие другие), изучение которых выходит за рамки данного пособия.

13.5 **Степенные ряды**

Степенным рядом называется функциональный ряд, который можно представить в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + a_2\left(x-x_0\right)^2 + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots, \qquad (1)$$

где $x_0, a_n \in R, n = 0,1,2,3\ldots$

Замечание 1: в частном случае $x_0 = 0$ ряд запишется в более простом виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2)$$

С помощью замены переменной $x - x_0 = y$ ряд вида (1) приводится к ряду вида (2).

Замечание 2: обратите внимание, что в отличие от числовых рядов, в степенных рядах суммирование начинается с индекса $n = 0$ (если первый член ряда – число, не равное нулю).

Замечание 3: очевидно что ряд (2) при любых значениях коэффициентов $a_n, n = 0,1,2,3\ldots$ сходится при $x = 0$

Сходимость (расходимость) степенных рядов при других значениях переменной x определяется с помощью теоремы Абеля и следствия из нее.

Теорема Абеля Если степенной ряд (2) сходится при $x = x_c \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях $|x| < |x_c|$.

Следствие: если степенной ряд расходится при $x = x_c \neq 0$, то он расходится при всех значениях переменной $|x| > |x_c|$.

Из теоремы Абеля следует, что степенной ряд (2) сходится во всех точках интервала $\left(-|x_c|, |x_c|\right)$, если он имеет точку сходимости $x_c \neq 0$. Среди всех интервалов сходимости существует наибольший по длине интервал, за пределами которого ряд расходится (о поведении ряда на концах интервала будет сказано ниже); будем считать, что это интервал $\left(-|x_c|, |x_c|\right)$. Такой наибольший интервал называется *интервалом сходимости* степенного ряда.

Расстояние от центра сходимости, которым для ряда (2) является точка 0, до граничных точек интервала $\left(-|x_c|, |x_c|\right)$ называется *радиусом сходимости* степенного ряда.

Формулы для определения радиуса сходимости выводят из признака Даламбера и радикального признака Коши: $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$, при условии, что указанные пределы существуют.

Для ряда (1) интервал сходимости будет иметь вид $\left(x_0 - R,\ x_0 + R\right)$. Средняя точка x_0 интервала сходимости называется *центром сходимости.* Для ряда (2) интервалом сходимости является $\left(-R, +R\right)$, а центр сходимости – точка $x_0 = 0$.

Степенной ряд будем называть неполным степенным рядом, если в нем бесконечное количество коэффициентов $a_n, n = 0,1,2,3...$ равно нулю. Например, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ - неполный, так как в нем отсутствуют члены с нечетными степенями, т.е. все коэффициенты вида $a_{2n+1}, n = 0,1,2,3...$ равны нулю. Для неполного степенного ряда интервал сходимости определяют непосредственно с помощью достаточных признаков Даламбера или Коши, не используя формулы радиуса сходимости.

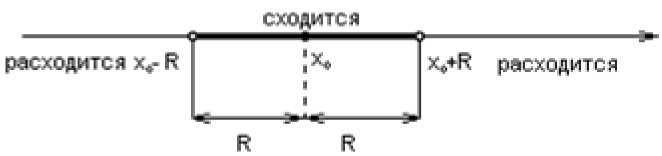


Рис.21.1 Интервал сходимости степенного ряда

После определения интервала сходимости дополнительно исследуют сходимость (расходимость) степенного ряда в граничных точках интервала сходимости. Подставляя в степенной ряд числовые значения координат граничных точек, определяют сходимость (расходимость) полученных числовых рядов. Граничные точки, в которых ряд сходится, присоединяют к интервалу сходимости. В результате получают область сходимости степенного ряда, которая может оказаться открытым, замкнутым или полуоткрытым интервалом (в частности, таким интервалом может оказаться вся числовая прямая или единственная точка).

Пример 1. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

Решение. С помощью замены переменной $x + 2 = y$ приведем ряд к виду (2): $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n \cdot 2^{n-1}}$.

Коэффициенты $a_n = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}}$ ряда не равны нулю ни при каком значении переменной n, значит имеем полный степенной ряд, для нахождения радиуса сходимости которого можно воспользоваться формулой $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \left[a_n = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}},\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) \cdot 2^n}{n \cdot 2^{n-1}} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 2.$$

Радиус сходимости $R = 2$ интервал сходимости - $y \in (-2;\ 2)$. Возвращаясь к переменной x, получим $-2 < x + 2 < 2$. Решив неравенство, получим интервал сходимости для переменной x: $x \in (-4;\ 0)$.

Проверяем сходимость степенного ряда в граничных точках интервала сходимости;

При $x=-4$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-4+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ - знакочередующийся ряд.

Применим признак Лейбница $\left(u_n=\frac{1}{n}\right)$:

1. $u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1}$, т. е каждый последующий член ряда по модулю меньше предыдущего и первое условие признака Лейбница выполнено;
2. $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, значит, второе условие также выполнено и ряд сходится в точке $x=-4$;

При $x=0$: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(0+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n}=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ - гармонический ряд, который расходится.

Присоединив к интервалу сходимости $x\in(-4;\,0)$ точку $x=-4$, получим область сходимости исходного степенного ряда $x\in[-4;\,0)$.

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(n^2+1)\cdot 3^n}$.

Решение: степенной ряд является неполным, так как отсутствуют члены с четными степенями x^{2n}. Для определения интервала сходимости будем использовать достаточный признак Даламбера: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=q=\begin{cases}0<q<1 \quad \text{ряд сходится}\\ q>1 \ \text{ряд расходится}\\ q=1 \ \text{сходимостьне определяется}\end{cases}$.

Для данного степенного ряда имеем: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left[u_n=\frac{x^{2n-1}}{(n^2+1)\cdot 3^n},\ u_{n+1}=\frac{x^{2n+1}}{(n^2+2n+2)\cdot 3^{n+1}}\right]=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x}{3^n\cdot 3\cdot(n^2+2n+2)}\cdot\frac{(n^2+1)\cdot 3^n}{x^{2n}\cdot x^{-1}}\right|=\frac{1}{3}\left|x^2\right|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+1}{n^2+2n+2}\right|=\frac{1}{3}x^2.$$

Ряд сходится, согласно признаку Даламбера, если $\frac{1}{3}x^2<1$, т.е. $|x|<\sqrt{3}$. Отсюда получаем интервал сходимости $x\in(-\sqrt{3};\,\sqrt{3})$.

Проверим сходимость степенного ряда в граничных точках интервала $(-\sqrt{3};\,\sqrt{3})$.

При $x=-\sqrt{3}$ имеем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\sqrt{3})^{2n-1}}{(n^2+1)\cdot 3^n}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{3})^{2n}}{\sqrt{3}\cdot(n^2+1)\cdot 3^n}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Поскольку $\frac{1}{n^2+1}<\frac{1}{n^2}$, то в качестве эталонного ряда для сравнения с рядом $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ можно выбрать сходящийся обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ сходится. Но тогда сходится и ряд $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ (см. 21.2).

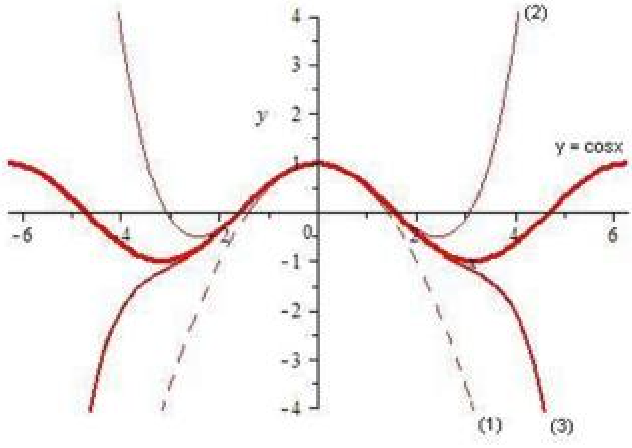
При $x=\sqrt{3}$ имеем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n-1}}{\left(n^2+1\right)\cdot 3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{3}\right)^{2n}}{\sqrt{3}\cdot\left(n^2+1\right)\cdot 3^n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$, который отличается от рассмотренного сходящегося ряда $-\frac{1}{\sqrt{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ только знаком и, значит, тоже сходится.

Таким образом, областью сходимости исходного степенного ряда является отрезок $x\in\left[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}\right]$.

В общем случае при вычислении сходимости (расходимости) степенных рядов используют основные свойства таких рядов:

1. Сумма $S(x)$ степенного ряда в интервале сходимости является непрерывной функцией;
2. Степенные ряды $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ с радиусами сходимости R_1 и R_2 можно почленно складывать, вычитать. и перемножать. При этом радиус сходимости рядов, полученных с помощью суммы, разности и произведения не меньше, чем меньшее из чисел R_1, R_2.
3. Если R - радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$, то каково бы ни было число $r<R$, этот ряд можно почленно интегрировать и дифференцировать на отрезке $[-r;\ r]$. При этом радиус сходимости ряда при дифференцировании и интегрировании не меняется. Область сходимости может сузиться при дифференцировании ряда за счет исключения из нее одной или обеих граничных точек.

13.6 **Разложение функций в степенные ряды (ряд Тейлора, ряд Маклорена)**



Пусть функция $y=f(x)$ на некотором интервале $x\in\left(x_0-R,\ x_0+R\right)$ имеет производные любых порядков $f'(x), f''(x),\ldots, f^{(n)}(x),\ldots$ (в частности, таким интервалом может быть вся числовая прямая). Тогда такой функции можно поставить в соответствие степенной ряд (*ряд Тейлора*)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (1)$$

сходящийся на интервале $(x_0-R,\ x_0+R)$ или на некоторой его части $(x_0-r,\ x_0+r)$. Для всех элементарных функций (см. Практикум, часть II) для каждой точки $x\in(x_0-r,\ x_0+r)$ ряд Тейлора сходится к значению функции $y=f(x)$ в этой точке. Представление функции в виде степенного ряда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ называется разложением функции в ряд Тейлора.

Замечание 1. Если для функции существует ряд Тейлора, то он единственный.

Замечание 2. При $x_0=0$ ряд Тейлора называется *рядом Маклорена* и имеет более простой вид

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots \quad (2)$$

Замечание 3. Область сходимости ряда Тейлора каждой конкретной функции можно найти либо по методу Даламбера, либо используя одну из формул для радиуса сходимости степенного ряда.

При приближенных вычислениях используют конечное число членов ряда Тейлора (Маклорена). Погрешность вычисления оценивают по остатку ряда.

Если функция $y=f(x)$ имеет лишь конечное число ограниченных производных $f'(x), f''(x),\ldots, f^{(n+1)}(x)$, то при приближенных вычислениях используют формулу Тейлора $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x)$, где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора, использующийся для оценки погрешности вычислений. В частности, применяют остаточный член в форме Лагранжа $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^n$, где $0<\theta<1$.

Формула Тейлора с остаточным членом применима для более широкого класса функций по сравнению с рядом Тейлора, так как для этой формулы достаточно наличие лишь конечного числа производных. Тем не менее, если возможно, то предпочтение необходимо отдавать рядам Тейлора (Маклорена), так как в этом случае существенно упрощается оценка погрешности и, кроме того, во многих случаях можно делать эту погрешность как угодно малой.

Геометрический смысл приближения функции по формуле Тейлора в точке $x_0=0$ по формулам $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$ (1), $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}$ (2) и $\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}$ (3) показан на рисунке 21.2.

13.7 **Способы разложения функций в степенные ряды (ряд Тейлора, ряд Маклорена)**

При разложении функции $y = f(x)$ в ряд Маклорена используют один из четырех способов:

1. Способ непосредственного разложения в ряд Маклорена с многократным дифференцированием функции $y = f(x)$ и нахождением значений производных при $x_0 = 0$;
2. Использование операций почленного суммирования, вычитания, умножения, а также дифференцирования и интегрирования степенных рядов;
3. Способ приведения разлагаемой в ряд функции к табличному виду с помощью замены переменной;
4. Комбинированный способ, использующий совместно способы 2 и 3;

13.7.1 **Способ непосредственного разложения функции в ряд Маклорена**

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = \dfrac{2}{3-x}$ в ряд Маклорена.

Решение. Результаты дифференцирования и вычисления производных в точке $x_0 = 0$ представим в табличной форме:

$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
$f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{2}{3-x} = 2(3-x)^{-1}$	$f^{(0)}(0) = f(0) = \dfrac{2}{3-0} = 2 \cdot \dfrac{1}{3}$
$f'(x) = \left(2(3-x)^{-1}\right)' = 2(3-x)^{-2}$	$f'(0) = 2(3-0)^{-2} = 2 \cdot \dfrac{1}{3^2}$
$f''(x) = \left(2(3-x)^{-2}\right)' = 2 \cdot 2(3-x)^{-3}$	$f''(0) = 2 \cdot 2(3-0)^{-3} = 2 \cdot \dfrac{2}{3^3}$
$f'''(x) = \left(2 \cdot 2(3-x)^{-3}\right)' = 2 \cdot 2 \cdot 3(3-x)^{-4}$	$f'''(0) = 2 \cdot 2 \cdot 3(3-0)^{-4} = 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 3}{3^4}$
$f^{(4)}(x) = \left(2 \cdot 2 \cdot 3(3-x)^{-4}\right)' = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(3-x)^{-5}$	$f^{(4)}(0) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(3-0)^{-5} = 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3^5}$
$f^{(5)}(x) = \left(2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4(3-x)^{-5}\right)' = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(3-x)^{-6}$	$f^{(5)}(0) = 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3^6}$

Очевидна закономерность: $f^{(n)}(0)=\frac{2n!}{3^{n+1}}$, значит, $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n!\cdot x^n}{n!\cdot 3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^n}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{3^2}+\ldots\right)$. Получен полный степенной ряд.

Определим его радиус сходимости: $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left[a_n=\frac{1}{3^n};a_{n+1}=\frac{1}{3^{n+1}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{3^n}\cdot\frac{3^{n+1}}{1}\right|=3$.

Интервал сходимости - $x\in(-3;\,3)$. Проверим, являются ли граничные точки интервала точками сходимости ряда. При $x=-3$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-3)^n}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ - расходящийся ряд (см. 21.2 или примените необходимый признак сходимости). При $x=3$ также получаем расходящийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-3)^n}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}(1+1+1+\ldots)$, суммой которого является ∞. Таким образом, область сходимости полученного степенного ряда совпадает с интервалом сходимости $x\in(-3;\,3)$.

Замечание. нахождение интервала сходимости ряда Маклорена имеет важное практическое значение – при приближенных вычислениях нельзя подставлять в этот ряд значения переменной x, выходящие за пределы области сходимости.

Используя способ непосредственного разложения, получаем разложения в ряд Маклорена важнейших элементарных функций:

$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$ область сходимости - $x\in(-\infty;\,\infty)$;

$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ область сходимости - $x\in(-\infty;\,\infty)$;

$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$ область сходимости - $x\in(-1;\,1)$.

13.7.2 **Способ разложения функции с использованием операций дифференцирования и интегрирования степенных рядов**

Пример 2. Известно, что $(\sin x)'=\cos x$. Используя известное разложение синуса в степенной ряд, $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$, получим

$$\cos x=\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\right)'=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

В данном примере для упрощения структуры общего члена u_n, полученного после дифференцирования, он заменен следующим членом u_{n+1} с соответствующими алгебраическими преобразованиями. Область сходимости ряда - $x \in (-\infty;\ \infty)$.

Замечание. Из школьного курса алгебры известно, что функция $y = \sin x$ - нечетная, а функция $y = \cos x$ - четная. Обратите внимание на то, что в ряде Маклорена функции $y = \sin x$ присутствуют только нечетные степени переменной x, а в ряде Маклорена функции $y = \cos x$ - только четные. Это не случайно: какова бы ни была четная функция, допускающая разложение в ряд Маклорена, этот ряд будет содержать только четные степени переменной; и какова бы ни была нечетная функция, допускающая разложение в ряд Маклорена, этот ряд будет содержать только нечетные степени переменной (из-за этого факта четные и нечетные функции и получили свои названия). Этот факт позволяет упростить нахождение рядов Маклорена для четных и нечетных функций.

Пример 3. Известно, что $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$. Интегрируя обе части этого равенства, получим $\int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\right) dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots$. А поскольку $\int \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)$, то получаем ряд Маклорена для логарифма:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots$$

После интегрирования исходная область сходимости ряда может расшириться за счет включения граничных точек интервала сходимости. Проверим сходимость ряда $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$ в граничных точках $(x_1 = -1,\ x_2 = 1)$. При $x = -1$ получим расходящийся гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

При $x = 1$ получим условно сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. . Таким образом, область сходимости ряда Маклорена для логарифма имеет вид $x \in (-1;\ 1]$.

13.7.3 **Способ приведения разлагаемой в ряд функции к табличному виду с помощью замены переменных**

Используя способы 1 и 2, получают разложения важнейших элементарных функций в ряд Маклорена. Эти разложения будем называть табличными. По аналогии с неопределенными интегралами табличные разложения можно ввести для промежуточной переменной $u = u(x)$.

Табличные разложения элементарных функций

Функция $y=f(u)$, при $u=u(x)$	Ряд Маклорена функции $y=f(u)$	Область сходимости ряда
$y=e^u$	$1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots$	$u\in(-\infty;\,\infty)$
$y=\sin u$	$u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\frac{u^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}u^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$	$u\in(-\infty;\,\infty)$
$y=\cos u$	$1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}+\ldots$	$u\in(-\infty;\,\infty)$
$y=\ln(1+u)$	$u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}u^n}{n}+\ldots$	$u\in(-1;\,1]$
$y=arctgu$	$u-\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}u^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$	$u\in(-1;\,1]$
$y=(1+u)^\alpha$	$1+\alpha u+\frac{\alpha(\alpha-1)u^2}{2!}+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)u^n}{n!}+\ldots$	$u\in(-1;\,1)$ при $\alpha<-1$ $u\in(-1;\,1]$ при $\alpha\in(-1;0)$ $u\in[-1;\,1]$ при $\alpha\ge 0$
$y=\frac{1}{1+u}$	$1-u+u^2-u^3+\ldots+(-1)^n u^n+\ldots$	$u\in(-1;\,1)$
$y=\frac{1}{1-u}$	$1+u+u^2+u^3+\ldots+u^n+\ldots$	$u\in(-1;\,1)$

В рассматриваемом способе разлагаемую функцию с помощью алгебраических преобразований и замены переменной приводят к табличному разложению, затем возвращаются к исходной переменной.

Пример 4. Разложить в ряд Маклорена функцию $\cos^2 x$.

Решение. Представляем исходную функцию в виде $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Известно табличное разложение косинуса - $\cos u=1-\frac{u^2}{2!}+\frac{u^4}{4!}-\frac{u^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}+\ldots$. При $u=2x$ получим

$$\cos 2x = 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots;$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + 1 - \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{2^4 x^4}{4!} - \frac{2^6 x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n} \cdot x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) =$$

$= 1 - \frac{2x^2}{2!} + \frac{2^3 x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n 2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$. Область сходимости ряда - $x \in (-\infty;\ \infty)$.

Пример 5. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x) = \frac{-3}{x^2 + x - 2}$.

Решение. Приведем исходную функцию с помощью алгебраических преобразований к функциям, для которых известны табличные разложения. Для этого разложим рациональную дробь $\frac{-3}{x^2 + x - 2}$ на сумму простейших дробей: $\frac{-3}{x^2 + x - 2} = \frac{-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$. Для определения неизвестных коэффициентов A и B используем метод неопределенных коэффициентов, который применяли ранее при нахождении неопределенных интегралов от рациональных дробей (Практикум, часть II, 13.2.3.):

$$\frac{-3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A(x+2) + B(x-1)}{(x-1)(x+2)}; \qquad -3 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + (2A - B);$$

$$\begin{cases} A + B = 0 \Rightarrow A = -B \\ 2A - B = -3 \Rightarrow 2A + A = -3 \end{cases}; \ A = -1,\ B = 1;\ f(x) = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}}.$$

Далее используем известное табличное разложение $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^3 + \ldots + u^n + \ldots$.

При $u = x$ получаем $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$, $x \in (-1;\ 1)$;

Аналогично, при $u = \frac{x}{2}$ получаем $\frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \ldots + (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^n + \ldots$. Находим область сходимости полученного ряда: $u \in (-1;\ 1)$, значит, $\frac{x}{2} \in (-1;\ 1)$ и $x \in (-2;\ 2)$.

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \left(x - \frac{x}{4}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right) + \left(x^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right) + \ldots$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{9x^2}{8} + \frac{15x^3}{16} + \ldots + \frac{2^{n+1} x^n + (-1)^n x^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}\right) x^n.$$

Область сходимости полученного ряда равна пересечению областей сходимости слагаемых рядов: $(-1;\ 1) \cap (-2;\ 2) = (-1;\ 1)$.

При разложении функции в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 \neq 0$ обычно производят замену переменной, чтобы функцию с новой переменной можно было разложить в ряд Маклорена. После получения такого разложения возвращаются к исходной переменной.

Пример 6. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Произведем замену переменной и преобразуем функцию к виду, позволяющему обеспечить возможность использования табличного разложения. Пусть $x - x_0 = x - 2 = t$, тогда $x = t + 2$ и при $x \to 2$ имеем $t \to 0$. Преобразуем функцию: $\dfrac{1}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{t+2-1}} = (t+1)^{-\frac{1}{2}}$

.Используя табличное разложение функции $y = (1+u)^{\alpha}$ при $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, получим

$$(t+1)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{t}{2 \cdot 1!} + \frac{3t^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{15t^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)t^n}{n!} + \ldots.$$

Возвращаемся к исходной переменной:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} = 1 - \frac{x-2}{2 \cdot 1!} + \frac{3(x-2)^2}{2^2 \cdot 2!} - \frac{15(x-2)^3}{2^3 \cdot 3!} + \ldots + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)(x-2)^n}{n!} + \ldots$$

Область сходимости ряда относительно переменной t имеет вид (по таблице) $t \in (-1;\, 1)$. Значит, $x - 2 \in (-1;\, 1)$ и область сходимости относительно переменной x имеет вид $x \in (1;\, 3)$.

Пример 7. Разложить в ряд Тейлора функцию $f(x) = \sin\dfrac{\pi x}{4}$ в точке $x_0 = 2$.

Решение. Преобразуем функцию с помощью замены переменной $x - 2 = t$. Тогда $x = t + 2$, $t = 0$ при $x = 2$ и $\sin\dfrac{\pi x}{4} = \sin\dfrac{\pi(t+2)}{4} = \sin\left(\dfrac{\pi t}{4} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\dfrac{\pi t}{4}$.

Известно табличное разложение косинуса в ряд Маклорена $\cos u = 1 - \dfrac{u^2}{2!} + \dfrac{u^4}{4!} - \dfrac{u^6}{6!} + \ldots + \dfrac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!} + \ldots$, $u \in (-1;\, 1)$. Примем $u = \dfrac{\pi t}{4}$, тогда

$$\cos\frac{\pi t}{4} = 1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi t}{4}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{\pi t}{4}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{\pi t}{4}\right)^6 + \ldots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi t}{4}\right)^{2n} + \ldots.$$

Переходя к исходной переменной, получим

$$\sin\frac{\pi x}{4} = 1 - \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \frac{(x-2)^2}{2!} + \left(\frac{\pi}{4}\right)^4 \frac{(x-2)^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n} \frac{(x-2)^{2n}}{(2n)!} + \ldots.$$

Определяем область сходимости: $u \in (-\infty;\, \infty)$, $\dfrac{\pi(x-2)}{4} \in (-\infty;\, \infty)$; $x \in (-\infty;\, \infty)$.

13.8 **Приближенные вычисления с помощью степенных рядов**

13.8.1 **Приближенные вычисления численных значений функций**

Пусть для функции $f(x)$, допускающей разложение в ряд Тейлора, необходимо определить численное значение при $x = x_1$ с точностью $\varepsilon > 0$. Для этого функцию разлагают в степенной ряд и, подставляя в него числовое значение $x = x_1$, получают числовой ряд. Затем определяют необходимое количество суммируемых членов ряда для того, чтобы не превысить заданную погрешность вычислений ε.

Если ряд знакочередующийся, то в соответствии с теоремой Лейбница, остаток ряда (сумма отбрасываемых членов) по модулю не превышает первого отброшенного члена $\left(|R_n| < u_{n+1}\right)$. Поэтому для обеспечения заданной погрешности ε первый отброшенный член ряда u_{n+1} по абсолютной величине должен быть меньше ε: $|u_{n+1}| < \varepsilon$.

Пример 1. Определить численное значение величины $\frac{1}{\sqrt[4]{e}}$ с погрешностью $\varepsilon \le 0{,}001$.

Решение. Величину $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} = e^{-\frac{1}{4}}$ можно считать числовым значением функции $y = e^u$ при $u = -\frac{1}{4}$.

По табличному разложению $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \ldots + \frac{u^n}{n!} + \ldots$ при $u = -\frac{1}{4}$ получаем числовой ряд $e^{-\frac{1}{4}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2!}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{4}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{4}\right)^n + \ldots$. Ряд знакочередующийся, поэтому максимальная погрешность разложения функции в ряд не будет превышать величину первого из отброшенных слагаемых. Необходимое число членов ряда, которые нужно оставить, определяем методом проб.

Если оставить три члена, то фактическая погрешность составит $\varepsilon_{факт} \le \frac{1}{3!\cdot 64} = \frac{1}{384} \approx 0{,}0026$, если четыре, то $\varepsilon_{факт} \le \frac{1}{4!\cdot 256} \approx 0{,}00016 < \varepsilon = 0{,}001$. Таким образом, удерживаем четыре члена и получаем $\frac{1}{\sqrt[4]{e}} \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{32} - \frac{1}{384} \approx 1 - 0{,}25 + 0{,}03125 - 0{,}0026 \approx 0784$.

Пример 2. Определить численное значение величины $\ln 0{,}6$ с точностью $\varepsilon \le 0{,}01$.

Решение. Величину $\ln 0{,}6$ можно рассматривать как числовое значение функции $\ln(1+u)$, для которой известно табличное разложение в ряд Маклорена: $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}u^n}{n} + \ldots$ при $u \in (-1;\, 1]$. Поэтому

$$\ln 0{,}6 = \ln(1 + (-0{,}4)) = -0{,}4 - \frac{(-0{,}4)^2}{2} + \frac{(-0{,}4)^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}(-0{,}4)^n}{n} + \ldots =$$

$= -\left(0{,}4 + \dfrac{0{,}4^2}{2} + \dfrac{0{,}4^3}{3} + \ldots + \dfrac{0{,}4^n}{n} + \ldots\right)$. Записанный в скобках ряд является знакопостоянным. Для оценки погрешности можно использовать формулу остатка ряда в форме Лагранжа, но в данном случае можно поступить проще. Предположим, что для обеспечения погрешности $\varepsilon \le 0{,}01$ достаточно учесть пять членов ряда (если мы ошибаемся, то после проверки нашего предположения можно рассмотреть шесть или более членов ряда). Тогда фактическая погрешность равна сумме отбрасываемых членов ряда (остатка ряда): $\varepsilon_{факт} = \dfrac{0{,}4^6}{6} + \dfrac{0{,}4^7}{7} + \dfrac{0{,}4^8}{8} + \ldots < \dfrac{0{,}4^6}{6} + \dfrac{0{,}4^7}{6} + \dfrac{0{,}4^8}{6} + \ldots = \dfrac{0{,}4^4}{6}\left(1 + 0{,}4 + 0{,}4^2 + \ldots\right)$. Ряд $1 + 0{,}4 + (0{,}4)^2 + \ldots$ является суммой геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = 1$ и знаменателем $q = 0{,}4$. Сумма такой прогрессии (согласно школьному курсу алгебры) равна $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{1}{1-0{,}4} = \dfrac{1}{0{,}6} = \dfrac{5}{3}$. Следовательно, $\varepsilon_{факт} < \dfrac{0{,}4^4}{6}\left(1 + 0{,}4 + 0{,}4^2 + \ldots\right) = \dfrac{0{,}4^4}{6} \cdot \dfrac{5}{3} < 0{,}01$. Таким образом, для определения численного значения величины $\ln 0{,}6$ с погрешностью $\varepsilon \le 0{,}01$ достаточно взять пять членов ряда $-\left(0{,}4 + \dfrac{0{,}4^2}{2} + \dfrac{0{,}4^3}{3} + \dfrac{0{,}4^4}{4} + \dfrac{0{,}4^5}{5} + \ldots\right) \approx -0{,}51$

Замечание 1. Табличное разложение функции $\ln(1+u)$ можно использовать и при $u \notin (-1;\, 1]$, хотя напрямую такие значения переменной в соответствующий ряд Маклорена подставлять нельзя (ряд расходится). При $u \notin (-1;\, 1]$ используют известное свойство логарифма $\ln ab = \ln a + \ln b,\quad a, b > 0$. Например, $\ln 3 = \ln(2 \cdot 1{,}5) = \ln(1+1) + \ln(1+0{,}5)$.

Замечание 2. При значениях переменной u, близких к единице, ряд Маклорена, хотя и сходится, но очень медленно – приходится складывать достаточно большое число членов ряда, особенно, если требуется высокая точность вычислений. В этом случае используют табличные разложения в виде $\ln\dfrac{u+1}{u-1} = \ln(u+1) - \ln(1-u) = 2\left(u + \dfrac{u^3}{3} + \dfrac{u^5}{5} + \ldots + \dfrac{u^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\right)$. Например,

$$\ln 0{,}8 = \ln\frac{8}{10} = \ln\frac{1+\left(-\frac{1}{9}\right)}{1-\left(-\frac{1}{9}\right)} \Rightarrow u = -\frac{1}{9}.$$

Замечание 3. Похожие идеи используются и при вычислении корней из чисел, где область сходимости степенного ряда также не совпадает со всей числовой прямой - $(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + \dfrac{\alpha(\alpha-1)u^2}{2!} + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)u^n}{n!} + \ldots, \qquad \alpha \in (0,\, 1), \qquad u \in (-1;\, 1)$.

Например, $\sqrt{5} = \sqrt{1+4} = \sqrt{4(1+0{,}25)} = 2(1+0{,}25)^{\frac{1}{2}}$, $u = 0{,}25$.

13.8.2 **Приближенные вычисления определенных интегралов**

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ с известной предельной погрешностью $\varepsilon > 0$.

Алгоритм вычисления:

1. Раскладываем подынтегральную функцию в ряд Маклорена $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ и определяем область сходимости ряда. Эта область должна содержать в себе область $[\alpha;\ \beta]$;
2. Заменяем подынтегральную функцию $f(x)$ ее рядом Маклорена и применяем формулу Ньютона-Лейбница.
3. В полученном числовом ряде удерживаем столько членов, чтобы сумма отброшенных членов ряда (остаток ряда) была меньше предельной погрешности ε.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл $J=\int\limits_{0}^{0,5}\frac{x-arctgx}{x^2}dx$ с погрешностью $\varepsilon \le 0{,}001$.

Решение. Для разложения функции в ряд Маклорена используем совместно второй и третий способы разложения (см. 21.6.2. и 21.6.3). Известно табличное разложение функции $arctgx = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-...+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2n+1}+...$, область сходимости которого – отрезок $x\in[-1;\ 1]$. Выполняем алгебраические операции для разложения подынтегральной функции: $\frac{x-arctgx}{x^2}=\frac{x-x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-...}{x^2}=\frac{x}{3}-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{7}-\frac{x^7}{9}+...+(-1)^{2n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...$. Определяем интервал сходимости полученного ряда. Ряд неполный, поэтому непосредственно воспользуемся признаком Даламбера.

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=\left|x^2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}=\left|x^2\right|=x^2.$$ При $q=x^2<1$,

согласно признаку Даламбера ряд сходится. Интервал сходимости - $x\in(-1;\ 1)$ содержит в себе область интегрирования $x\in[0;\ 0{,}5]$, поэтому подынтегральную функцию можно заменить рядом Маклорена: $J=\int\limits_{0}^{0,5}\left(\frac{x}{3}-\frac{x^3}{5}+\frac{x^5}{7}-\frac{x^7}{9}+...\right)dx$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$J=\left(\frac{x^2}{6}-\frac{x^4}{20}+\frac{x^6}{42}-\frac{x^8}{72}+...\right)\Bigg|_0^{0,5}=\frac{0,5^2}{6}-\frac{0,5^4}{20}+\frac{0,5^6}{42}-\frac{0,5^8}{72}+...$. Получен знакочередующийся числовой ряд, значит, фактическая погрешность не будет превышать абсолютной величины первого отбрасываемого члена ряда. Поскольку $\frac{0,5^8}{72}<0,001$, то для достижения необходимой точности достаточно взять первые три члена ряда: $J\approx\frac{0,5^2}{6}-\frac{0,5^4}{20}+\frac{0,5^6}{42}\approx 0,045$.

Пример 2. Вычислить определенный интеграл $J=\int\limits_0^1\frac{e^{x^2}-1}{x}dx$ с погрешностью $\varepsilon\le 0,001$.

Решение. Выразим подынтегральную функцию $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$ в виде степенного ряда, используя известное разложение $e^u=1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\frac{u^4}{4!}+...+\frac{u^n}{n!}+...$.

$e^{x^2}-1=-1+1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\frac{x^8}{4!}+...+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+...$; $\quad\frac{e^{x^2}-1}{x}=x+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{4!}+...+\frac{x^{2n-1}}{(2n)!}+...$.

Определяем интервал сходимости полученного ряда: $q=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right|=\left|x^2\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!}=\left|x^2\right|\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n(2n+1)}=0$. При $q=0<1$, согласно признаку Даламбера ряд сходится. Поскольку полученное неравенство $0<1$ не содержит переменной x, значит, эта переменная может принимать любое значение. Интервал сходимости - $x\in(-\infty;\infty)$ содержит в себе область интегрирования $x\in[0;0,5]$, поэтому подынтегральную функцию можно заменить рядом Маклорена: $J=\int\limits_0^1\left(x+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\frac{x^7}{4!}+\frac{x^9}{5!}+...\right)dx$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$J=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4\cdot 2!}+\frac{x^6}{6\cdot 3!}-\frac{x^8}{8\cdot 4!}+\frac{x^{10}}{10\cdot 5!}...\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{6\cdot 3!}+\frac{1}{8\cdot 4!}+\frac{1}{10\cdot 5!}...$.Этот ряд знакопостоянный, остаток ряда начиная с пятого члена имеет вид $R_5=\frac{1}{10\cdot 5!}+\frac{1}{12\cdot 6!}+\frac{1}{14\cdot 7!}+\frac{1}{16\cdot 8!}+...<\frac{1}{10\cdot 5!}\left(1+\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{6^3}+...\right)=\frac{1}{1200}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{6}}=0,001$.

Значит, для приближенного вычисления с заданной погрешностью $\varepsilon\le 0,001$ достаточно взять четыре первых члена ряда: $J\approx\frac{1}{2}+\frac{1}{4\cdot 2!}+\frac{1}{6\cdot 3!}+\frac{1}{8\cdot 4!}=0,659$.