ПРЕДИСЛОВИЕ

Высшая математика необходима студентам и будущим инженерам, в первую очередь, как эффективный инструмент исследования математических моделей технических объектов, соответствующих их будущей специальности. Метод математического моделирования является основным методом построения и изучения учебных дисциплин физико-математического цикла (физика, теоретическая механика, сопротивление материалов, теория автоматического управления и т.д.).

В практической инженерной деятельности этот метод, реализуемый в виде вычислительных экспериментов на компьютере с математическими моделями исследуемых объектов, является наиболее быстрым, эффективным и экономически выгодным средством получения новой информации об указанных объектах. Такая информация необходима для научно обоснованного принятия решений при проектировании новых объектов, при диагностике отказов, анализе и моделировании нештатных и аварийных ситуаций, возможных при эксплуатации объектов техники.

При обучении высшей математике будущих инженеров должны быть успешно решены две наиболее важные и взаимосвязанные учебные проблемы:

1) формирование устойчивых знаний, навыков и умений решения различных типов математических задач, широко используемых при изучении учебных дисциплин физико-математичес-кого цикла и в инженерных расчетах, основанных на математическом моделировании технических объектов, соответствующих будущей инженерной специальности;

2) развитие знаний, навыков и умений по технологии математического моделирования технических систем на примерах прикладных задач, адаптированных к уровню математических, физических и технических знаний студентов первого и второго курсов. При этом основное внимание должно быть уделено

вычислительным аспектам метода математического моделирования.

На старших курсах при изучении большинства учебных инженерных дисциплин продолжается более полное и осознанное овладение методом математического моделирования инженерных задач с применением компьютеров. В дальнейшем искусство математического моделирования должно совершенствоваться в течение всей активной инженерной деятельности.

В настоящем сборнике все задачи делятся на «чисто» математические и прикладные.

Математические задачи предназначены для решения первой учебной проблемы. В настоящем сборнике такие задачи составляют около 80 % от общего числа задач. Для решения указанных задач необходимы и достаточны знания школьной математики, а также изученные и изучаемые разделы высшей математики.

К прикладным задачам относятся задачи, поставленные вне математики и решаемые средствами математики. Каждую такую задачу в общем случае необходимо предварительно формализовать и преобразовать в математическую, т.е. получить математическую модель реального объекта, описанного в постановке прикладной задачи на языке математики (см. приложение).

В учебных прикладных задачах, приведенных в практикуме, использованы известные математические модели технических объектов, которые адаптированы для учебных целей и кратко описываются в качестве пояснений к задаче. Основное внимание уделено решению математической задачи, соответствующей математической модели инженерного объекта и цели исследования.

В приложении к практикуму приведены исходные положения метода математического моделирования и пример решения реальной инженерной задачи указанным методом.

Практикум включает все разделы математики, которые соответствуют учебным рабочим программам по математике для инженеров технических специальностей по направлениям: строительство зданий, сооружений, железных и автомобильных дорог; эксплуатация подъемно-транспортных, строительных и дорожных машин, а также транспортного оборудования с общим объемом от 570 до 650 часов.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N — множество натуральных чисел

Z — множество целых чисел

Q — множество рациональных чисел

R — множество действительных чисел

C — множество комплексных чисел

$\overline{r}$ — алгебраический (арифметический) вектор

$\vec{r}$, $\overrightarrow{OA}$ — геометрический вектор

V_n — векторное пространство размерности n

R^n — точечное координатное пространство размерности n

$M(a_1, a_2, a_3)$ — точка с координатами a_1, a_2, a_3

$\vec{r} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор с координатами a_1, a_2, a_3

Δ — определитель

$\Delta(A), |A|, \det A$ — определитель матрицы A

СЛАУ — система линейных алгебраических уравнений

$\Rightarrow$ — следует

$\Leftrightarrow$ — равносильно

$\equiv$ — тождественно равно

$\cong$ — эквивалентно

$\subset$ — включает

$\subseteq$ — включает или равно

$\in$ — принадлежит

$\notin$ — не принадлежит

$\cup$ — объединение множеств

$\cap$ — пересечение множеств

$\uparrow\uparrow$ — сонаправленность векторов

$\uparrow\downarrow$ — противоположная направленность коллинеарных векторов

Σ — сумма

$n!$ — факториал

$= \ldots =$ — промежуточные вычисления в примере опущены и должны бытии восстановлены студентами при изучении примера самостоятельно

Тема 1: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Центральной задачей линейной алгебры является решение систем линейных уравнений с конечным числом неизвестных. Такие системы уравнений широко встречаются в задачах строительной механики, теоретической электротехнике, теории автоматического управления.

Для решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вводятся новые математические объекты (определители, матрицы, векторы) и алгебраические операции с ними. Умение выполнять алгебраические операции с указанными математическими объектами и решать СЛАУ с их использованием является одной из основных задач изучения данного раздела высшей математики.

1.1⁰. Определители: вычисление и применение

О п р е д е л е н и е: Определитель n-го порядка — это математический объект, представляющий число, вектор или функцию в виде квадратной таблицы, содержащей по n элементов в каждой строке и каждом столбце (рис. 14).

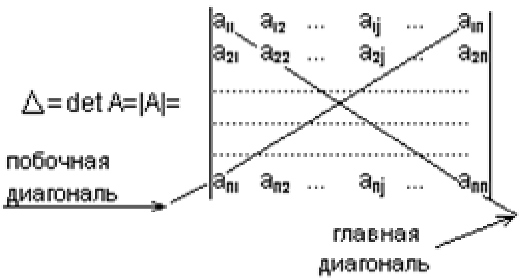


Рис. 14. Опреде

Число строк (столбцов) в определителе определяет его порядок. Элементами в определителе могут быть действительные или комплексные числа, а также функции.

a_{ij} — элемент определителя (i — номер строки, j — номер столбца).

Представление векторов и числовых функций с помощью определителей существенно повышает компактность записи математических соотношений и является эффективным способом сокращения вычислений.

О п р е д е л е н и е: *Определителем второго порядка* называется математический объект вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Левая часть равенства является свернутой (табличной) формой определителя. Правая часть представляет собой определитель в развернутой форме и одновременно правило вычисления определителя в символьной форме.

П р и м е р ы: 1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot(-3) - 4\cdot 1 = -6-4 = -10$;

2) $\begin{vmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - i\cdot i = 1-(-1) = 2$;

3) $\begin{vmatrix} x+1 & x-1 \\ x & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2 - x(x-1) = 3x+1$.

О п р е д е л е н и е: *Определителем третьего порядка* называется математический объект, представленный в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{31}a_{22} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Развернутую форму представления определителя третьего порядка в правой части равенства запоминать не нужно. Ее можно записать и при необходимости вычислить, используя следующие правила:

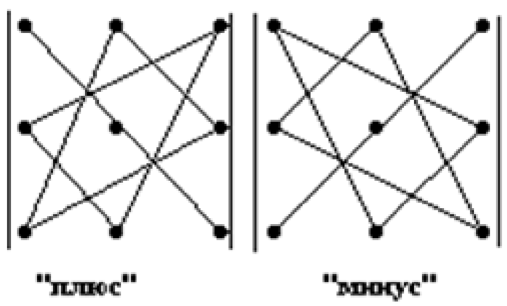
1) правило треугольников (правило Саррюса);

2) правило дополнительных столбцов;

3) правило разложения по элементам строки или столбца.

Сущность *правила треугольников* легко понять, запомнить и использовать согласно схеме (рис. 15).

Для запоминания *правила дополнительных столбцов* также удобно использовать мнемоническую схему (рис. 16).



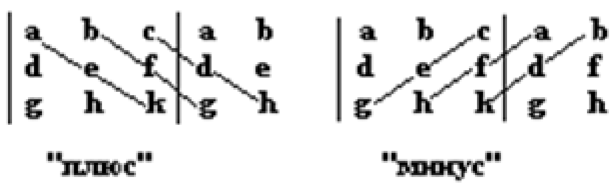


Рис. 15. Правило треугольников

Рис. 16. Правило дополнительных столбцов

Замечание. Элементы, перечеркнутые по диагонали, перемножаются. В результате получаем одночлены, которые суммируются или вычитаются согласно схеме.

Пример. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1\cdot 5\cdot 9 + 2\cdot 6\cdot 7 + 3\cdot 4\cdot 8 - 3\cdot 5\cdot 7 - 2\cdot 4\cdot 9 -$

$$-1\cdot 6\cdot 8 = 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$$

Правило разложения по элементам строки или столбца является частным случаем способа разложения, который можно использовать для определителя любого порядка. Для определителя третьего порядка правило разложения в символьной форме можно представить так (если разложение производить по элементам первой строки):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix},$$

где M_{11}, M_{12}, M_{13} — миноры элементов первой строки определителя.

Миноры определителя третьего порядка — это определители второго порядка, которые получаются удалением из исходного определителя элементов строки и столбца, соответствующих индексам минора. В рассмотренном примере миноры M_{11}, M_{12}, M_{13} получены удалением элементов первой строки и соответственно первого, второго и третьего столбца.

Разложение определителя можно производить по элементам любой строки или столбца. Знаки слагаемых в разложении определителя располагают в шахматном порядке согласно схеме

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Пример. Разложить определитель по элементам второго столбца.

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & -a \\ a & a & x \end{vmatrix} = -aM_{12} + xM_{22} - aM_{32} =$$

$$= -a\begin{vmatrix} a & -a \\ a & x \end{vmatrix} + x\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} x & a \\ a & -a \end{vmatrix} = x\left(x^2 - a^2\right).$$

1.1.1^0. Решение неоднородных СЛАУ с помощью определителей (по формулам Крамера)

Определение: *Системой* m *линейных уравнений* от n неизвестных называется система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где a_{ij} $\left(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n\right)$ – постоянные коэффициенты; b_i – свободные члены (постоянные числа); x_i — неизвестные, значения которых требуется определить. Первый индекс i числа a_{ij} означает номер уравнения в системе, второй индекс j – номер неизвестного.

Решением СЛАУ называют множество действительных чисел $x_1^0,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0$, которые при подстановке их вместо неизвестных x_1, x_2, ..., x_n в каждое уравнение системы обращают его в тождество.

Система линейных алгебраических уравнений называется неоднородной, если хотя бы один из свободных коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_n$ не равен нулю.

Если число уравнений равно числу неизвестных $\left(m = n\right)$, то такую неоднородную систему называют *крамеровской*. Ее можно решить при определенных условиях с помощью определителей по формулам Крамера.

Для системы $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$

корни находят по формулам Крамера (при $\Delta \neq 0$)

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – основной определитель из коэффициентов СЛАУ;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – первый вспомогательный определитель, полученный заменой в основном определителе элементов первого столбца соответствующими свободными членами;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$ – второй вспомогательный определитель, полученный заменой в основном определителе элементов второго столбца соответствующими свободными членами и так далее до определителя Δ_n включительно.

Замечание. Формулы Крамера компактны и удобны при изложении теоретических вопросов. Практическое вычисление корней СЛАУ по указанным формулам является трудоемким, так как объем вычислений резко возрастает с увеличением порядка определителя. Поэтому по формулам Крамера решают СЛАУ не выше четвертого порядка.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}.$$

Решение: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 24$; $\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 24$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = 24; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 4 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 24.$$

По формулам Крамера получим:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{24}{24} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{24}{24} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{24}{24} = 1.$$

1.1.2⁰. Вычисление определителей четвертого и более высоких порядков

Определители высоких порядков $(n > 3)$ можно вычислять методом понижения порядка, используя разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

(разложение по i-й строке)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение по j-му столбцу)

$A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}, A_{1j}, A_{2j}, \dots, A_{nj}$ –- алгебраические дополнения элементов определителя; $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}; M_{ij} – минор определителя, полученный удалением из него i-й строки и j-го столбца.

Полученные после такого разложения миноры являются определителями $(n-1)$-го порядка, которые можно снова разложить по какой-либо строке или столбцу. После многократного разложения придем к минорам третьего или второго порядков, которые вычисляются по правилам, разобранным выше.

Данный алгоритм приводит к большому объему вычислений. Например, вычисление определителя пятого порядка в общем случае сводится к вычислению пяти определителей четвертого порядка после первого разложения или двадцати определителей третьего порядка после второго разложения.

Чтобы уменьшить объем вычислений предварительно производят «обнуление элементов» определителя с использованием следующих свойств:

1) Если в определителе Δ все элементы какой-либо строки или столбца равны нулю, то $\Delta = 0$.

2) Если в определителе поменять местами две строки или столбца, то определитель изменит знак на противоположный.

3) Если в определителе имеются две одинаковые строки или два одинаковых столбца, то определитель равен нулю.

4) Если все элементы какой-либо строки или столбца умножить на одно и то же число, то значение определителя умножится на то же число.

5) Если в определителе имеются две пропорциональные строки или два пропорциональных столбца, то значение определителя равно нулю.

6) Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число, то значение определителя не изменится.

П р и м е р. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение: пользуясь свойством 6, получим нули вместо элементов a_{21}, a_{41}.

Для этого умножим первую строку на (–4) и поэлементно

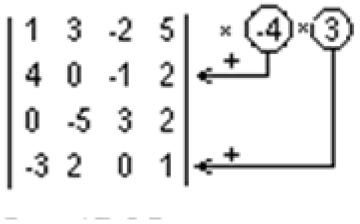


Рис. 17. Обнуление элементов столбца

прибавим ко второй строке (рис. 17):

$$\begin{array}{rrrrr} & -4 & -12 & 8 & -20 \\ + & 4 & 0 & -1 & 2 \\ = & 0 & -12 & 7 & -18 \end{array}$$

Затем умножим первую строку на 3 и прибавим к четвертой строке:

$$\begin{array}{rrrrr} & 3 & 9 & -6 & 15 \\ + & -3 & 2 & 0 & 1 \\ = & 0 & 11 & -6 & 16 \end{array}$$

Получим, раскладывая определитель по первому столбцу:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -12 & 7 & -18 \\ 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно уже вычислить по правилу треугольников или по правилу дополнительных столбцов, но можно снова воспользоваться методом «обнуления элементов», примененным выше к определителю четвертого порядка.

$$\begin{vmatrix} -12 & 7 & -18 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ 11 & -6 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 8 \\ 5 & -6 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-8 - 40) = 48.$$

Были произведены следующие действия:

1) к первой строке прибавили третью;

2) к первому столбцу прибавили второй и к третьему столбцу прибавили второй, умноженный на 2;

3) разложили определитель по второму столбцу;

4) вычислили определитель второго порядка.

Для контроля промежуточных вычислений рекомендуется использовать дополнительный контрольный столбец. Элемент контрольного столбца равен сумме элементов соответствующей строки. При преобразовании строки тем же преобразованиям подвергается и соответствующий элемент контрольного столбца. Затем элементы преобразованной строки суммируются и сравниваются с преобразованным элементом контрольного столбца. При несовпадении полученных чисел ищем ошибку.

П р и м е р. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение: введем контрольный столбец:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & | & 2 \\ 3 & -4 & -1 & -2 & | & -4 \\ 4 & 3 & 2 & -1 & | & 8 \end{vmatrix}.$$

С помощью первой строки обнуляем элементы первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 5 & -10 & -5 & | & -10 \\ 0 & 2 & -10 & -14 & | & -22 \\ 0 & 11 & -10 & -17 & | & -16 \end{vmatrix}.$$

Сумма чисел по каждой строке совпадает с соответствующим контрольным элементом. Вынесем общий множитель 5 из второй строки и общий множитель 2 из третьей строки:

$$10 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 1 & -5 & -7 & | & -11 \\ 0 & 11 & -10 & -17 & | & -16 \end{vmatrix}.$$

Сумма чисел по каждой строке совпадает с соответствующим контрольным элементом. С помощью второй строки обнуляем соответствующие элементы второго столбца:

$$10\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -3 & -6 & | & -9 \\ 0 & 0 & 12 & -6 & | & 6 \end{vmatrix}.$$

Сумма чисел по каждой строке совпадает с соответствующим контрольным элементом. Вынесем общий множитель (-3) из третьей строки и общий множитель (-6) из четвертой строки:

$$180\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & | & -1 \end{vmatrix}.$$

Сумма чисел по каждой строке совпадает с соответствующим контрольным элементом. С помощью третьей строки обнулим последний элемент (в четвертой строке):

$$180\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 & | & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & | & 5 \end{vmatrix}.$$

Сумма чисел по каждой строке совпадает с соответствующим контрольным элементом. Значение определителя равно $180\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 5 = 900$.

1.2^0. Матрицы и операции с ними

При исследовании технических, экономических и производственных систем в линейном приближении матрицы являются наиболее удобными и, по существу, незаменимыми математическими объектами для записи и обработки количественной информации на компьютерах. В строительной механике широко используются матричные методы расчета в форме метода конечных элементов. Матричные методы лежат в основе многих методов оптимизации технических и производственных систем.

Определение: *матрицей* называется математический объект с общим числом элементов $n \times m$, которые расположены в виде прямоугольной таблицы из n строк и m столбцов ($n \times m$ – размер матрицы, в общем случае $n \neq m$).

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Элементами матрицы a_{ij} $\left(i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., m\right)$ могут быть числа, функции, матрицы меньших размеров. В отличие от определителей матрицы нельзя выразить в виде одного числа (кроме простейшего случая $n = m = 1$).

Замечание 1. В записи a_{ij} первый индекс i является номером строки, в которой расположен элемент a_{ij}, второй индекс j – номером столбца.

Замечание 2. Если $n = m$, то матрица называется квадратной матрицей.

Замечание 3. Говорят, что элементы квадратной матрицы a_{11}, $a_{22}, ..., a_{nn}$ расположены на главной диагонали квадратной матрицы, а элементы $a_{1n}, ..., a_{n1}$ – на побочной диагонали.

Замечание 4. Матрицы будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита: $A, B, C, D\ldots$

Определение: Если $n = 1$, то матрицу называют *матрицей-строкой.* Если $m = 1$, то матрицу называют *матрицей-столбцом.*

Определение: Две матрицы называются *равными*, если у них одинаковые порядки $\left(n \times m\right)$ и равны числа, стоящие на соответственных местах этих матриц.

Определение: Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю. Нулевые матрицы будем обозначать буквой $\hat{I}$.

Квадратная матрица называется *единичной*, если все элементы ее главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны нулю.

Определение: Матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю.

Матрица называется *правой верхнетреугольной*, если все ее элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Матрица называется *левой нижнетреугольной*, если все ее элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.

Замечание. Совокупность элементов квадратной матрицы ($n = m$) при необходимости можно рассматривать как определитель, который является числовой характеристикой матрицы и позволяет устанавливать, является ли матрица вырожденной ($\Delta = 0$).

Над матрицами можно выполнять следующие линейные операции, после выполнения которых получаются матрицы того же размера:

1) умножение матрицы на число;
2) сложение (вычитание) матриц.

Обе эти операции производятся поэлементно.

Замечание 1. Очевидно, что для любых матриц A, B и C выполняются равенства: $A + B = B + A$ и $\left(A + B\right) + C = A + \left(B + C\right)$

Замечание 2. Очевидно, что для любой матрицы A верно $A + O = A$.

Пример 1.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 14 & 0 & 10 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 13 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение матриц

Определение: Матрицы A и B в произведении $A \cdot B$ будем называть согласованными, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом и только в этом случае матрицу A можно умножать на матрицу B.

О п р е д е л е н и е: Если матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$ имеет порядок $n\times m$, а матрица $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$ – порядок $m\times k$ (т.е. матрицы согласованы), то матрицу A можно умножать на матрицу B. При этом получится матрица C порядка $n\times k$, элементы которой находятся по правилу

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{im}b_{mj},$$

т.е. каждый элемент i-й строки матрицы A умножается на соответствующий (по порядку) элемент j-го столбца матрицы B, и полученные попарные произведения складываются.

П р и м е р 2. $A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$. Найти AB.

Решение: $c_{11}=4\cdot 1+3\cdot 3+2\cdot(-5)+1\cdot 7=10;$

$c_{12}=4\cdot(-2)+3\cdot 4+2\cdot 0+1\cdot 8=12;$

$c_{13}=4\cdot 6+3\cdot(-1)+2\cdot(-3)+1\cdot 5=20;$

$c_{21}=5\cdot 1+6\cdot 3+7\cdot(-5)+8\cdot 7=44;$

$c_{22}=5\cdot(-2)+6\cdot 4+7\cdot 0+8\cdot 8=78;$

$c_{23}=5\cdot 6+6\cdot(-1)+7\cdot(-3)+8\cdot 5=43;$

$C=AB=\begin{pmatrix} 10 & 12 & 20 \\ 44 & 78 & 43 \end{pmatrix}.$

Для проверки правильности умножения матриц $A\cdot B=C$ рекомендуется использовать следующее равенство: $S_A\cdot S_B=S_C$, где S_A – матрица-строка, в которой каждый элемент равен сумме всех элементов соответствующего столбца матрицы A; S_B – матрица-столбец, в которой каждый элемент равен сумме всех элементов соответствующей строки матрицы B; S_C равно сумме всех элементов матрицы C.

В рассмотренном примере:

$$S_A = \begin{pmatrix} 4+5 & 3+6 & 2+7 & 1+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix};$$

$$S_B = \begin{pmatrix} 1+(-2)+6 \\ 3+4+(-1) \\ -5+0+(-3) \\ 7+8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix};$$

$$S_A \cdot S_B = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \\ 20 \end{pmatrix} = 207;$$

$$S_C = 10+44+12+78+20+43 = 207 = S_A S_B.$$

Если бы равенство $S_A \cdot S_B = S_C$ не выполнялось, это значило бы, что вычисления содержат ошибки.

Операция умножения в общем случае не обладает свойством коммутативности: $AB \neq BA$. В связи с этим различают умножение матрицы A на матрицу B справа и слева. Кроме того, у прямоугольных матриц $(m \neq n)$ может существовать одно из произведений AB, BA, а второе – нет.

П р и м е р. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 4 & -1 \\ -5 & 0 & -3 \\ 7 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ произведение AB существует, а произведение BA не существует.

Замечание. Если E – единичная матрица, A – согласованная с ней квадратная матрица, то $AE = EA = A$.

Транспонированием матрицы называется операция, при которой каждая строка становится столбцом с тем же номером (условное обозначение операции транспонирования матрицы A^T).

Пример. Если $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2\\ 7 & 0 & 5\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & 7\\ -3 & 0\\ 2 & 5\end{pmatrix}$.

Операция транспонирования обладает следующими свойствами:

1) $\left(A^T\right)^T=A$; 2) $\left(A+B\right)^T=A^T+B^T$; 3) $\left(AB\right)^T=B^TA^T$.

1.3⁰. Обратная матрица: вычисление и применение

Операции деления матриц нет. Вместо этой операции используют операцию умножения матрицы B справа или слева на матрицу, обратную к матрице A.

Матрица A имеет обратную, если:

1) она является квадратной ($m=n$);

2) она является невырожденной ($|A|\neq 0$).

Определение: Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если оба их произведения равны единичной матрице: $A^{-1}A=AA^{-1}=E$.

Обратную матрицу вычисляют двумя способами:

1) способ присоединенной матрицы;

2) способ элементарных преобразований объединенной матрицы.

1.3.1⁰. Нахождение обратной матрицы способом присоединенной матрицы

В способе *присоединенной матрицы* обратную матрицу находят по формуле $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$ – *присоединенная* (*союзная*) матрица:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

где $A_{ij}=\left(-1\right)^{i+j}M_{ij}$ – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}; M_{ij} – минор, соответствующий элементу a_{ij}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы способом присоединенной матрицы:

1. Находим определитель $|A|$ исходной матрицы A. Если $|A| = 0$, то матрица A не имеет обратной.

2. Если $|A| \neq 0$, то транспонируя исходную матрицу, получим матрицу A^T.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A^T и строим присоединенную матрицу $\tilde{A}$.

4. Находим обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$.

5. Проверяем правильность вычислений, используя равенство $A^{-1}A = E$.

Замечание 1. Алгебраические дополнения A_{ij} и соответствующие миноры M_{ij} всегда равны по абсолютной величине, но могут различаться только знаками. Числа A_{ij} и M_{ij} имеют одинаковые знаки, если сумма индексов $i + j$ является четным числом, и имеют противоположные знаки, если $i + j$ – нечетное число. Учитывая это, можно вычислять миноры матрицы A^T и подставлять их в присоединенную матрицу $\tilde{A}$ с соответствующими знаками. Например, для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

получим $\tilde{A} = \begin{pmatrix} M_{11} & -M_{21} & M_{31} \\ -M_{12} & M_{22} & -M_{32} \\ M_{13} & -M_{23} & M_{33} \end{pmatrix}$.

Замечание 2. После деления элементов присоединенной мвтрицы $\tilde{A}$ на числовое значение определителя $|A|$ элементы обратной матрицы во многих случаях становятся дробными числами. Для упрощения вычислений при использовании обратной матрицы лучше представлять ее с вынесенным общим множителем $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\tilde{A}$. Если элементами матрицы A были целые числа, то матричные операции при таком представлении также будут производиться с целыми числами.

П р и м е р. Вычисляя алгебраические дополнения элементов матриц, найти матрицы, обратные к данным, и произвести проверку

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 9\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}$.

Решение: а) Вычислим определитель матрицы: $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 9\end{vmatrix}=$ $=9-6=3$. Вычеркивая первую строку и первый столбец, получим $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 9=9$. Аналогично, вычеркивая первую строку и второй столбец, получим $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3$. Аналогично $A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=-2$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1$. Значит,

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}9 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -\dfrac{2}{3}\\ -1 & \dfrac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1}A=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}9 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 9\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

б) Вычислим определитель матрицы:

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{vmatrix}=50+84+96-105-48-80=-3.$$

Вычисляем алгебраические дополнения элементов:

$B_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 6\\ 8 & 10\end{vmatrix}=2$, $\quad B_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}4 & 6\\ 7 & 10\end{vmatrix}=2$,

$B_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}4 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-3$, $\quad B_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 8 & 10\end{vmatrix}=4$,

$B_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 7 & 10\end{vmatrix}=-11$, $\quad B_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=6$,

$$B_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix}=-3, \qquad B_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 4 & 6\end{vmatrix}=6,$$

$$B_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{vmatrix}=-3.$$

$$B^{-1}=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1\\ -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Проверка: $$B^{-1}B=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

1.3.2^0. Нахождение обратной матрицы способом элементарных преобразований

Трудоемкость вычисления обратной матрицы с помощью присоединенной (союзной) матрицы резко возрастает при увеличении порядка матрицы. Например, для получения союзной матрицы третьего порядка необходимо вычислить 9 миноров второго порядка, для нахождения союзной матрицы четвертого порядка – уже 16 миноров третьего порядка.

Объем вычислений можно существенно сократить, если использовать специальную матрицу, которую получают, приписывая к квадратной матрице A справа единичную матрицу того же размера. Указанная специальная матрица называется объединенной. Например, для матрицы $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}$

объединенная матрица имеет вид

$$B\,|\,E=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0\\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0\\ 7 & 8 & 10 & | & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрицу $A\,|\,E$ приводят к матрице $E\,|\,A^{-1}$ с помощью элементарных преобразований строк:

1) умножения всех элементов любой строки на одно и то же число;

2) прибавления ко всем элементам любой строки соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;

3) перестановки строк.

Замечание. Вместо элементарных преобразований строк можно использовать элементарные преобразования столбцов:

1) умножение всех элементов любого столбца на одно и то же число;

2) прибавление ко всем элементам любого столбца соответствующих элементов другого столбца, умноженных на одно и то же число;

3) перестановка столбцов.

Пример 1. Методом элементарных преобразований найти матрицы, обратные к данным

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 9\end{pmatrix}$; $\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}$.

Решение: а) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 1 & 0\\ 3 & 9 & | & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Вычтем из второй строки матрицы первую строку, умноженную на 3: $\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 1 & 0\\ 0 & 3 & | & -3 & 1\end{pmatrix}$.

Умножим вторую строку на $\frac{1}{3}$: $\begin{pmatrix}1 & 2 & | & 1 & 0\\ 0 & 1 & | & -1 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

Прибавим к первой строке вторую строку, умноженную на -2:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 3 & -\dfrac{2}{3} \\ 0 & 1 & | & -1 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$. Слева от черты получили единичную матрицу, значит справа – матрицу, обратную к матрице A.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -\dfrac{2}{3} \\ -1 & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

б) Рассмотрим матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & | & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 10 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -4, а к третьей строке – первую, умноженную на -7:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -11 & | & -7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к третьей строке вторую, умноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & | & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке третью, умноженную на 6, а к первой строке – третью, умноженную на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 0 & | & 2 & -11 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на -3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Прибавим к первой строке вторую, умноженную на -2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{2}{3} & \frac{11}{3} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

При элементарных преобразованиях матрицы $A \,|\, E$ для исключения текстовых пояснений целесообразно применять условные обозначения, использованные при «обнулении» элементов определителя (см. 2.1^0). При этом необходимо учитывать следующие отличия:

1) при перестановке двух строк (столбцов) множитель (–1) перед матрицей не ставят;

2) при выносе общего множителя строки (столбца) за знак матрицы его просто отбрасывают;

3) в любую строку (столбец) матрицы можно внести общий множитель, при этом матрицу в целом не нужно умножать на величину, обратную этому множителю.

Замечание. Для контроля правильности вычислений можно использовать контрольный столбец.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ способом элементарных преобразований объединенной матрицы с контрольным столбцом.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 4 \;\; -2 \;\; -3 \\ 2 \\ 8 \end{array} \to$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&4&0&1&0\\0&0&-5&1&-2&0\\0&5&-7&0&-3&1\end{array}\right)\begin{matrix}4\\-6\\-4\end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&4&0&1&0\\0&5&-7&0&-3&1\\0&0&-5&1&-2&0\end{array}\right)\begin{matrix}4\\-4\leftarrow(-5)\\-6\leftarrow(-7)\end{matrix}\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&4&0&1&0\\0&-25&35&0&15&-5\\0&0&-35&7&-14&0\end{array}\right)\begin{matrix}4\\20\xleftarrow{+}1\\-42\leftarrow(-7)\end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&-2&4&0&1&0\\0&-25&0&7&1&-5\\0&0&-5&1&-2&0\end{array}\right)\begin{matrix}4\leftarrow 5\\-22\\-6\leftarrow 4\end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&-10&20&0&5&0\\0&-25&0&7&1&-5\\0&0&-20&4&-8&0\end{array}\right)\begin{matrix}20\\-22\\-24\leftarrow 1\leftarrow 4\end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}5&-10&0&4&-3&0\\0&-25&0&7&1&-5\\0&0&-5&1&-2&0\end{array}\right)\begin{matrix}-4\leftarrow(-5)\\-22\leftarrow 2\\-6\end{matrix}\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-25&50&0&-20&15&0\\0&-50&0&14&2&-10\\0&0&-5&1&-2&0\end{array}\right)\begin{matrix}20\xleftarrow{+}1\\-44\leftarrow 2\\-6\leftarrow 5\end{matrix}\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}-25&0&0&-6&17&-10\\0&-25&0&7&1&-5\\0&0&-25&5&-10&0\end{array}\right)\begin{matrix}20\leftarrow 25\\-22\leftarrow 25\\-30\leftarrow 25\end{matrix}\to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{6}{25}&-\frac{17}{25}&\frac{10}{25}\\0&1&0&\frac{-7}{25}&-\frac{1}{25}&\frac{1}{5}\\0&1&1&\frac{-1}{25}&\frac{2}{5}&0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1}=-\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-6&17&-10\\7&1&-5\\5&-10&0\end{pmatrix}.$$

1.3.3⁰. Решение СЛАУ методом обратной матрицы

Систему уравнений $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$

можно представить в виде матричной формы

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\ldots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{n1}&a_{n2}&\ldots&a_{nn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\ldots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\ldots\\b_n\end{pmatrix}.$$

Если обозначить $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец правой части, то матричное уравнение запишется в краткой форме: $AX = B$. Умножим обе части этого равенства слева на матрицу A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Тогда $EX = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}B$. То есть, для решения системы достаточно найти обратную матрицу и умножить ее на матрицу-столбец правой части.

Пример. Решить неоднородную СЛАУ с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 4x + 5y + 6z = 38 \\ 7x + 8y + 10z = 47 \end{cases}$.

Решение: запишем систему в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 38 \\ 47 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу, обратную к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$:

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & -11 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матричное произведение

$$A^{-1}\cdot B=-\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}2 & 4 & -3\\ 2 & -11 & 6\\ -3 & 6 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 38\\ 47\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\\ 1\end{pmatrix},$$

значит, $x=3;\ y=2;\ z=1$.

Проверка: подставим найденные корни в уравнения системы: $3+2\cdot2+3\cdot1=10$ – верно, $4\cdot3+5\cdot2+6\cdot1=38$ – верно, $7\cdot3+8\cdot2+10\cdot1=47$ – верно.

1.4^0. Ранг матрицы.

При решении СЛАУ возможны три случая:

1) СЛАУ имеет единственное решение;
2) СЛАУ имеет бесконечное множество решений;
3) СЛАУ не имеет решений.

Для определения того, к какому случаю относится рассматриваемая система, используют числовые характеристики матриц, которые называются рангами.

Определение: Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы.

Для определения ранга матрицы используют два способа:

1) способ окаймляющих миноров;
2) способ элементарных преобразований матрицы.

Условное обозначение ранга матрицы – $rangA\equiv r(A)$.

В способе *окаймляющих миноров* выбирают не равный нулю элемент матрицы и вычисляют окаймляющие его миноры второго порядка. Если все окаймляющие миноры второго порядка матрицы равны нулю, то ранг матрицы равен 1. Если найден отличный от нуля минор второго порядка, то вычисляют все окаймляющие его миноры третьего порядка. Если все они равны нулю, то ранг матрицы равен 2; если найден отличный от нуля минор третьего порядка, то вычисляют окаймляющие его миноры четвертого порядка и т.д.

Вычисления прекращают тогда, когда все окаймляющие миноры наивысшего возможного порядка меньшего или равного числу строк матрицы равны нулю или когда уже нет окаймляющих миноров.

П р и м е р. Найти ранг матрицы $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 & -8 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 12 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: если не все элементы матрицы равны нулю, а в данном примере это так, значит, ранг матрицы не меньше 1. Отличным от нуля минором первого порядка можно считать, например, $\Delta_1 = -2$ (число в левом верхнем углу матрицы).

Будем искать какой-либо отличный от нуля минор второго порядка, окаймляющий Δ_1; обычно начинают с первых двух строк или первых двух столбцов. Нам удобнее будет начать со столбцов, так как в этом случае предстоит считать меньшее количество миноров.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Поскольку найден отличный от нуля минор второго порядка, то ранг матрицы не меньше двух. Полагаем $\Delta_2 = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ и будем искать отличный от нуля минор третьего порядка, окаймляющий Δ_2. Начнем с первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 \\ 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -10 \neq 0.$$

Найден отличный от нуля минор третьего порядка, значит, ранг матрицы не меньше трех. Найденный минор обозначим Δ_3, и будем искать окаймляющий его минор четвертого порядка, отличный от нуля.

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 & -8 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 6 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Других миноров, окаймляющих Δ_3, нет, значит, все окаймляющие миноры четвертого порядка равны нулю и ранг матрицы меньше 4. Ранг матрицы равен 3.

Способ окаймляющих миноров является достаточно трудоемким, и используют его обычно только для проверки.

С помощью элементарных преобразований матрицу приводят к ступенчатому виду (см. метод вычисления обратной матрицы). В такой матрице все элементы a_{ij} при $j > i$ равны нулю. Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Пример. Найти ранг матрицы способом элементарных преобразований $\begin{pmatrix} -2 & 4 & -6 & -8 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 12 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: переставим строки: $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -6 & 9 & 12 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & -6 & -8 & 0 \end{pmatrix}$.

Переставим столбцы: $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 12 & -6 & 9 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ -8 & 4 & -6 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Эти преобразования были проведены только ради удобства дальнейших вычислений с целью получить в левом верхнем углу матрицы число, равное по модулю 1.

Умножим первую строку на 12 и сложим со второй, затем умножим первую сроку на (–8) и сложим с четвертой:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & 63 & 24 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -6 & -42 & -16 \end{pmatrix}.$$

Поделим вторую строку на (–3), а четвертую – на 2:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & -8 \\ 0 & -3 & 4 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & -8 \end{pmatrix}.$$

Умножим вторую строку на 1,5 и прибавим к третьей, затем умножим вторую строку на (–1) и прибавим к четвертой:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -21 & -8 \\ 0 & 0 & -0{,}5 & -29{,}5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразования завершены, так как матрице все элементы $a_{ij}=0$ при $j>i$. Ненулевых строк – три, значит, ранг матрицы равен трем.

Пример. Найти ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ способом элементарных преобразований с использованием условных обозначений преобразований и с контрольным столбцом.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 11 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 17 & 12 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ 26 \\ 42 \\ 12 \end{matrix}\quad \begin{matrix} -11 & -5 & -4 \end{matrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -30 & -6 & -39 & -9 \\ 0 & -10 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & -10 & -2 & -13 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ -84 \\ -8 \\ -28 \end{matrix}\begin{matrix} \\ -3 \\ -1 \\ \end{matrix}\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 13 & 3 \\ 0 & -10 & -2 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ 28 \\ -8 \\ -20 \end{matrix}\begin{matrix} \\ 1 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -10 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ 28 \\ 20 \\ -20 \end{matrix}\begin{matrix} \\ 10 \\ 1 \\ \end{matrix}\qquad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & 2 & 13 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} 10 \\ 28 \\ 2 \\ 0 \end{matrix}$$

Получена ступенчатая матрица, три строки которой не полностью состоят из нулей, значит, ранг матрицы равен трем.

Проверка способом окаймляющих миноров:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} \neq 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 10 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, любой минор четвертого порядка равен нулю, так как его последняя строка – нулевая.

1.5^0. Методы Гаусса и Гаусса-Жордана для решения СЛАУ

Методы Крамера и обратной матрицы пригодны только для решения крамеровских СЛАУ, в которых число неизвестных равно числу уравнений и определитель матрицы не равен нулю. С другой стороны, при большом количестве уравнений эти методы являются достаточно трудоемкими.

Метод Гаусса является, с одной стороны, наиболее общим, пригодным для решения произвольных СЛАУ, с другой – наименее трудоемким.

Основная идея метода заключается в последовательном исключении неизвестных и приведении СЛАУ к специальному виду: все уравнения, начиная со второго, не содержат первой неизвестной; все уравнения, начиная с третьего, – второй неизвестной; все уравнения, начиная с четвертого, – третьей неизвестной и т.д.

Такие преобразования можно производить не с уравнениями, а с расширенной матрицей СЛАУ, приводя эту матрицу к ступенчатому виду. При этом одновременно решается вопрос о совместности СЛАУ.

Пример 1. Решить СЛАУ методом Гаусса с использованием расширенной матрицы и контрольного столбца

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \end{cases}.$$

Решение: Составляем расширенную матрицу и приводим ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\2&1&-3&7\\1&-2&1&-4\\4&-2&-1&1\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\7\\-4\\2\end{matrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&3&-5&11\\0&-1&0&-2\\0&2&-5&9\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\9\\-3\\6\end{matrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&-1&0&-2\\0&3&-5&11\\0&2&-5&9\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\-3\\9\\6\end{matrix}\rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&-1&0&-2\\0&0&-5&5\\0&0&-5&5\end{array}\right)\begin{matrix}-1\\-3\\0\\0\end{matrix}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&-1&0&-2\\0&0&-5&5\\0&0&0&0\end{array}\right)\rightarrow 5\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-2\\0&-1&0&-2\\0&0&-1&1\end{array}\right)$$

Ранги расширенной матрицы и матрицы коэффициентов СЛАУ равны и совпадают с числом неизвестных, поэтому система уравнений имеет единственное решение. По ступенчатой матрице составляем эквивалентную систему уравнений и решаем ее:

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3=-2\\ -x_2=-2\\ -x_3=1\end{cases};\qquad\begin{cases}x_1=1\\ x_2=2\\ x_3=-1\end{cases}.$$

Замечание. Для проверки правильности решения СЛАУ лучше использовать одно из исходных уравнений, которое подвергалось наибольшим преобразованиям. Судя по преобразованной расширенной матрице, таким уравнением является четвертое.

Проверка: $4\cdot1-2\cdot2-(-1)=1$. Верно.

Дальнейшим развитием метода Гаусса с расширенной матрицей является метод Гаусса-Жордана. Этот метод заключается в том, что с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов СЛАУ в составе расширенной матрицы приводят к диагональному виду, а затем к единичной матрице. После этого можно сразу выписать решение СЛАУ.

Пример 2. Решить методом Гаусса-Жордана систему уравнений

$$\begin{cases}3x+y+4z+-6t=8\\ 6x+2y+5z-9t=7\\ 3x-y+3z-7t=-1\\ 3x+y+2z-5t=5\end{cases}.$$

Решение: Результаты действий прямого хода в матричном виде представлены ниже

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -3 \end{array}\right); \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим к первой строке четвертую, умноженную на –6, ко второй – четвертую, умноженную на –1, к третьей – четвертую, умноженную на –1 (цель – избавиться от неизвестной t в первых трех уравнениях); получим матрицу $(*)$. Теперь с помощью третьей строки избавимся от неизвестной z в первых двух строках, получим матрицу $(**)$. Поделим вторую строку на –2, получим матрицу $(***)$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)(*); \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)(**);$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)(***).$$

К первой строке прибавим вторую, умноженную на –1, получим матрицу $(****)$. Поделим первую строку на 3 – получим ответ в виде последнего столбца расширенной матрицы.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)(****); \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-11}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)(****);$$

$$x = -\frac{11}{3};\ y = 6;\ z = 0;\ t = 3.$$

Тема 2: ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

В векторной алгебре изучаются геометрические векторы как направленные отрезки прямых, в которых определены начальные и конечные точки. Такое представление векторов позволяет дать наглядную геометрическую интерпретацию важнейшим физическим величинам (скорости и ускорения точек, силы, моменты сил и т.д.). Большинство физических законов представляется в векторной форме. Поэтому хорошо усвоенные навыки владения основными операциями с геометрическими векторами являются существенно необходимыми для понимания и осмысленного запоминания современных вузовских курсов физики, теоретической механики, теоретической электротехники, сопротивления материалов и т.д.

2.1⁰. Общие сведения о геометрических векторах

При математическом описании геометрических векторов совмещают алгебраические и геометрические методы.

В математике используются *свободные векторы* и векторы с фиксированной начальной точкой (*радиус-векторы*).

Определение: Свободным называют геометрический вектор, который можно переносить параллельно самому себе в любую область пространства.

С позиции линейной алгебры геометрический вектор – это математический объект, заданный в векторном пространстве упорядоченным набором трех действительных чисел $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Эти числа являются коэффициентами в разложении вектора $\vec{a}$ по базису $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и называются координатами вектора в указанном базисе. При этом вектор $\vec{a}$ можно единственным образом разложить по заданному базису в виде $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$.

Рис. 21. Вектор как геометрический о

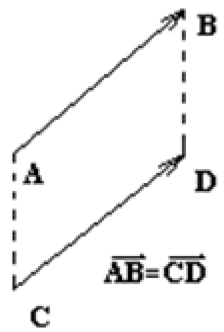
С позиции геометрии геометрический вектор – это направленный отрезок, который характеризуется (рис. 21):

а) линией действия;

б) направлением действия;

в) начальной и конечной точками вектора;

г) модулем (длиной) вектора $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$.



Все определения и теоремы, справедливые для алгебраических (арифметических) векторов, справедливы и для геометрических векторов той же размерности. Обратные утверждения справедливы не всегда.

Введем определения векторов, часто используемые при решении задач.

Рис. 23. Пример: сонаправленные векторы скоростей точек тела при его поступательном непрямолинейном движении

Определение: *коллинеарны-ми* называются векторы, линии действия которых совпадают или параллельны;

Эти векторы могут иметь одинаковые направления (быть *сонаправленными* $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, рис. 23) или быть *противоположно направленными* $\left(\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}\right)$. Если существенным является только параллельность линий действия, то используется условное обозначение $\vec{a}\parallel\vec{b}$.

Определение: векторы, лежащие в одной плоскости или параллельных плоскостях, называются *компланарными*.

Определение: *Свободным* называется геометрический вектор, который можно переносить параллельно самому себе в любую область пространства. Иными словами, два свободных вектора считаются *равными,* если один из них можно получить из другого параллельным переносом (см. рис. 22).

Определение: Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым вектором*. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

Определение: Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* или *ортом*.

2.2⁰. Декартовы системы координат с ортонормированным репером

Пространство геометрических векторов V_3 является важным частным случаем n-мерного векторного пространства.

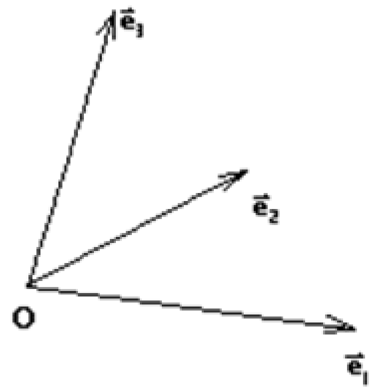
В трехмерном пространстве V_3 геометрических векторов любые три линейно независимых вектора образуют базис. Если объединить трехмерное пространство V_3 геометрических векторов и точечное координатное пространство R^3, то получим *трехмерное аффинное пространство*. В этом пространстве свободные векторы базиса параллельным переносом приведем к общему началу (полюсу).

Определение: Совокупность трех базисных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ и общей начальной точки (полюса) называется репером $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$.

Если с линиями действия векторов репера совместим координатные оси с общей начальной точкой, то получим общую декартову (аффинную) систему координат. В общем случае такие системы являются косоугольными с разными масштабами для разных координатных осей. Указанные системы координат широко используют при описании свойств кристаллических структур и анизотропных материалов (анизотропными называют материалы, которые имеют различные физические свойства в разных направлениях. Например, дерево имеет различную прочность вдоль и поперек волокон).

Если в качестве базиса выбрать взаимно ортогональные векторы единичной длины ($\vec{i} = (1,0,0)$; $\vec{j} = (0,1,0)$; $\vec{k} = (0,0,1)$), то получим ортонормированный репер.

Реперы разделяют на правосторонние и левосторонние. *Правосторонним* (*правым*) называют репер $\left\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, в котором векторы расположены друг относительно друга так, что глядя с конца третьего вектора, поворот от первого вектора ко второму на наименьший угол виден против часовой стрелки. В противном случае репер называется *левосторонним* (*левым*) (рис. 24).



Ри

Замечание. Если в правом репере поменять местами два вектора, то репер станет левым. И наоборот: если в левом репере поменять местами два вектора, то репер станет правым.

Если координатные оси совместить с линиями действия правого ортонормированного репера $\left\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$, то получим правую прямоугольную систему координат. Далее будем использовать в основном только такую систему.

2.3⁰. Линейные операции над векторами

К линейным операциям относятся:

1) сложение и разложение векторов;

2) вычитание векторов;

3) умножение векторов на действительные числа.

1. *Сложение векторов* производится по правилу параллелограмма, треугольника и многоугольника (рис. 25).

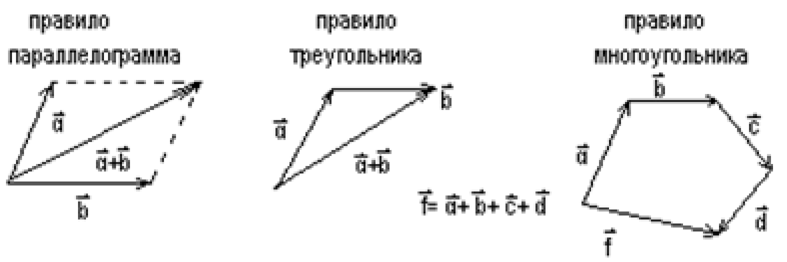
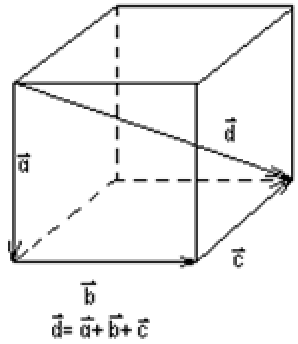


Рис. 25. Сложение векторов

При сложении по правилу параллелограмма и треугольника все три вектора $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ расположены в одной плоскости (компланарны).

Параллельными переносами векторы переводят в положения, указанные на рисунке, и суммируют.

По правилу многоугольника можно суммировать некомпланарные векторы в трехмерном пространстве (рис. 26).



Свойства операции сложения:

1) *коммутативность* $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ для любых векторов $\vec{a},\vec{b}$;

2) *ассоциативность* $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ для любых векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$;

3) существует нулевой вектор такой, что для любого вектора $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;

4) для каждого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $\vec{a}'$ такой, что $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$.

2. *Разложение вектора на составляющие.*

При выполнении этой операции применяют правило параллелограмма, используя разлагаемый вектор $\vec{a}$ как диагональ параллелограмма. Схема разложения вектора на составляющие векторы приведена на рис. 27.

Операция разложения вектора на составляющие неоднозначна.

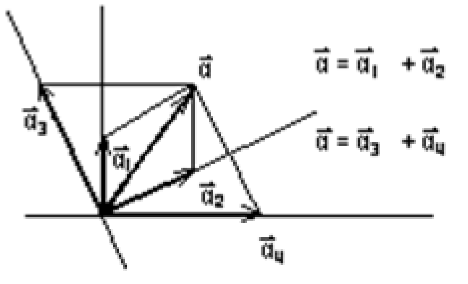


Рис. 27. Разложение вектора на составляющие

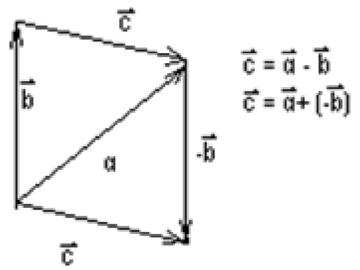


Рис. 28. Вычитание векторов

3. *Вычитание* (*разность*) *векторов.*

Определение: Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ приложены к одному началу, то вектор $\vec{c}$ с началом в конце вектора $\vec{a}$ и с концом в конце вектора $\vec{b}$ называется *разностью* $\vec{c}=\vec{b}-\vec{a}$ (рис. 29).

Определение: После умножения вектора $\vec{a}$ на скаляр λ получаем новый вектор $\vec{b}$ с модулем $|\lambda\vec{a}|$, коллинеарный вектору $\vec{a}$.

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}.$$

При $\lambda > 0$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены.

При $\lambda < 0$ векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположно направлены.

При $\lambda = 0$ вектор $\vec{b} = \vec{0}$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1) *ассоциативность* $\lambda_1(\lambda_2\vec{a}) = (\lambda_1\lambda_2)\vec{a}$;

2) *дистрибутивность* $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$, $(\lambda_1+\lambda_2)\vec{a} = \lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{a}$.

Если использовать единичный вектор $\overline{l}^{\,0}$, сонаправленный с вектором $\overline{l}$, то этот вектор можно представить в виде $\vec{l} = \left|\vec{l}\right|\vec{l}^{\,0}$.

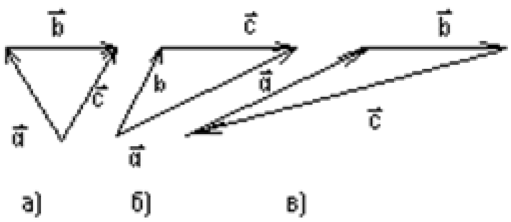


Рис. 29. Пример 1

Пример 1. Выразить вектор $\vec{c}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 29).

Решение: а) по правилу треугольника получим $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$;

б) по правилу треугольника: $\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}$ или, по правилу вычитания векторов, $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, что одно и то же; в) по правилу многоугольника $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$.

Пример 2. Какому условию удовлетворяют ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$,

а) если $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;

б) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| > \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$;

в) $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| < \left|\vec{a}-\vec{b}\right|$.

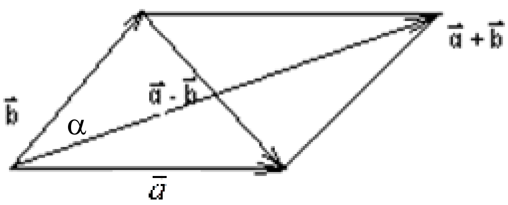


Рис. 30. Пр

Решение: В общем случае при сложении по правилу параллелограмма имеем, что одна из диагоналей соответствует сумме векторов, а другая – разности этих векторов (рис. 30).

Равенство а) выполняется, если диагонали равны, т.е. параллелограмм является прямоугольником $\left(\alpha = \dfrac{\pi}{2}\right)$; равенство б) выполняется, если угол α – острый $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$; равенство в) выполняется, если угол α – тупой $\left(\alpha > \frac{\pi}{2}\right)$.

2.4⁰. Основные геометрические свойства линейно зависимых и независимых векторов

По аналогии с алгебраическими векторами, используя линейные операции с геометрическими векторами, можно ввести понятие линейной комбинации векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ в виде $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n$. Если векторы линейно зависимы, то справедливо векторное равенство

$$\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$$

при некоторых $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ таких, что $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 \neq 0$. Если геометрические векторы линейно независимы, то векторное равенство $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ справедливо только при

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{nn} = 0.$$

Линейная зависимость геометрических векторов имеет следующий геометрический смысл:

Теорема 1. Два ненулевых геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.

Следствие: Два любых неколлинеарных вектора на плоскости образуют базис на плоскости.

Теорема (О пропорциональности коллинеарных векторов)

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то найдется число λ такое, что $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Теорема 2. Три ненулевых геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Следствие 1. Три любых некомпланарных вектора в трехмерном векторном пространстве образуют базис.

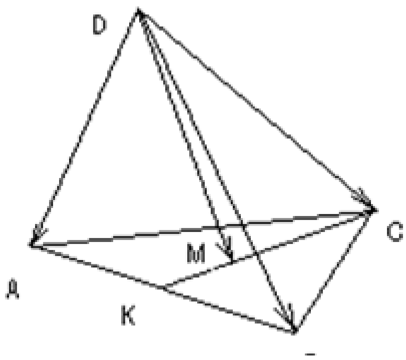
Следствие 2. Четыре геометрических вектора в трехмерном векторном пространстве всегда линейно зависимы.

Теорема
(о разложении вектора по базису)

1) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ – базис на плоскости, $\vec{b}$ – вектор на этой плоскости. Тогда найдутся числа λ_1, λ_2 такие, что $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2$.

2) Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ – базис в пространстве, $\vec{b}$ – произвольный вектор. Тогда найдутся числа λ_1, λ_2, λ_3 такие, что $\vec{b} = \lambda_1\vec{a}_1 + {}$ $+\lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3$.

Пример. В тетраэдре $ABCD$ точка M – точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 31). Разложить вектор $\overrightarrow{DM}$ по базе $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$.



Рис

Решение: Пусть точка K – основание медианы, проведенной из вершины C.

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} =$$

$$= \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BK}\right) =$$

$$= \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} =$$

$$= \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right).$$

2.5⁰. Проекции геометрического вектора в прямоугольной системе координат

Геометрический подход к векторам как направленным отрезкам реализуется в аналитической форме через проекции векторов в прямоугольных системах координат. В данном разделе показано, что проекции геометрических векторов на оси координат можно рассматривать как координаты векторов. Это позволяет использовать методы линейной алгебры и геометрии при изучении геометрических векторов.

Рассмотрим основные виды проекций векторов в прямоугольной системе координат.

2.5.1⁰. Векторная проекция вектора на ось или плоскость (составляющая вектора)

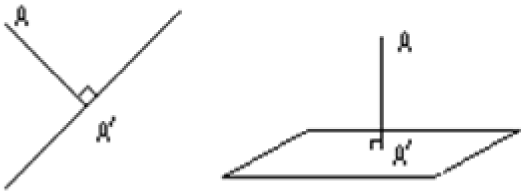


Рис. 34. Ортогональная проекция точки

О п р е д е л е н и е: *Ортогональная проекция точки* A на ось или плоскость – это точка пересечения оси или плоскости перпендикуляром, опущенным из точки A на ось или плоскость (рис. 34).

О п р е д е л е н и е: Векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ (составляющей вектора $\overrightarrow{AB}$) на ось или плоскость называется новый вектор $\overrightarrow{A'B'}$, лежащий на оси или плоскости. Точки начала и конца вектора $\overrightarrow{A'B'}$ совпадают с ортогональными проекциями точек начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось или плоскость (рис. 35).

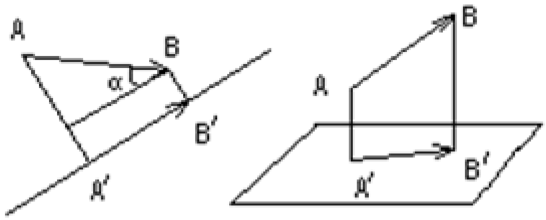


Рис. 35. Векторная проекция вектора

Условные обозначения: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Pi p_l AB}$, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Pi p_\pi AB}$.

Модуль вектора $\overrightarrow{A'B'}$ равен $\left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos\alpha$, где α – острый угол между вектором и линией, проходящей через начальную точку вектора $\overrightarrow{AB}$ и параллельную оси или плоскости. При этом указанная линия и линия действия вектора $\overrightarrow{AB}$ лежат в одной плоскости.

Основные свойства составляющей вектора:

1) составляющая вектора на ось или плоскость не изменится при любом параллельном переносе вектора, оси или плоскости в пространстве;

2) составляющая суммы конечного числа векторов равна сумме составляющих слагаемых векторов;

3) составляющая вектора на ось или плоскость равна нулю, если вектор перпендикулярен указанной оси или плоскости;

4) при умножении вектора $\vec{a}$ на скаляр (действительное число) λ его составляющая на ось или плоскость умножается на то же число $\overrightarrow{\Pi p_l \lambda \vec{a}} = \lambda \overrightarrow{\Pi p_l \vec{a}}$;

5) если векторы линейно зависимы, то линейно зависимы и их одноименные составляющие.

2.5.2⁰. Числовая проекция вектора на ось

Определение: *числовой* (*алгебраической*) *проекцией* вектора на ось называется скалярная величина, равная модулю составляющей вектора на той же оси со знаком «+» или «–». Знак «+» ставится в случае, когда направление составляющей вектора совпадает с положительным направлением оси и знак «–» – в противоположном случае (рис. 36).

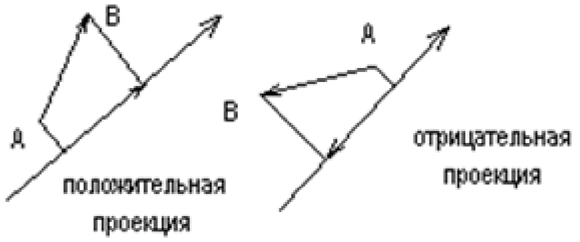


Рис. 36. Числовая пр
вектора на ось

Замечание 1. Основные свойства числовых проекций вектора аналогичны таким же свойствам составляющих вектора.

Замечание 2. В приложениях векторные проекции вектора обычно называют *составляющими вектора*, а числовые проекции – просто *проекциями вектора* на ось или плоскость.

2.5.3⁰. Проекции вектора на вектор

Определение: векторная проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна векторной проекции вектора $\vec{a}$ на ось, совпадающую с линией действия и направлением вектора $\vec{b}$. Обозначение: $\overrightarrow{\Pi p}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}_b$.

Определение: Числовая проекция вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ равна числовой проекции вектора $\vec{a}$ на ось, совпадающую с линией действия и направлением вектора $\vec{b}$. Обозначение: $\Pi p_{\vec{b}}\vec{a} = \pm a_b$.

Очевидно, имеет место равенство $\Pi p_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$.

Числовые и векторные проекции вектора на вектор взаимосвязаны: $\vec{a}_b = \left|\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}\right| \cdot \vec{b}^0$, где $\vec{b}^0$ – единичный вектор, совпадающий по направлению с вектором $\vec{b}$.

2.5.4⁰. Правило двойного проектирования вектора

В общем случае при определении числовых и векторных проекций на ось (вектор) используют правило двойного проектирования, суть которого следует из рис. 37.

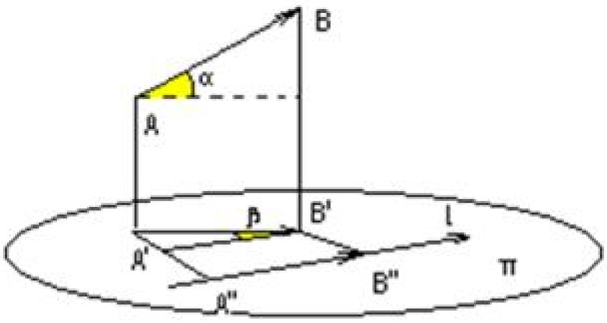


Рис. 37. Правило двойного проектирования

Пусть необходимо вектор $\overrightarrow{AB}$ спроектировать на направление оси l. Выбираем плоскость π, в которой лежит ось l, проектируем вектор $\overrightarrow{AB}$ на плоскость π и получаем векторную проекцию $\overrightarrow{\text{П}p_\pi}\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Затем векторную составляющую $\overrightarrow{A'B'}$ проектируем на ось l и получаем вектор $\overrightarrow{A''B''}$, являющийся составляющей вектора $\overrightarrow{A'B'}$. По известной из геометрии теореме о трех перпендикулярах, $\text{П}p_l\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A''B''} = AB\cos\alpha\cos\beta$.

2.5.5⁰. Определение вектора через его проекции в прямоугольной системе координат

В трехмерном векторном пространстве с ортонормированным базисом $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}$ с позиции линейной алгебры можно разложить по базису: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, где a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. С другой стороны, в прямоугольной системе координат с ортонормированным репером $\{O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ вектор $\vec{a}$ можно представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, следовательно, координаты вектора равны его проекциям на векторы репера, и координаты вектора можно представить так: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$. Из теоремы Пифагора следует, что модуль вектора равен $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

О п р е д е л е н и е: если вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат углы α, β, γ, то числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами* этого вектора.

Замечание: из определения координат и направляющих косинусов следует: $a_x = |\vec{a}|\cos\alpha, a_y = |\vec{a}|\cos\beta, a_z = |\vec{a}|\cos\gamma$.

Направляющие косинусы любого вектора удовлетворяют соотношению: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

П р и м е р. Вектор $\vec{a}$ образует с осью OX угол α 30°, а с осью OZ – угол γ = 90°. Какой угол образует вектор $\vec{a}$ с осью OY?

Решение: $\cos^2\beta = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\gamma$; $\cos^2\beta = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 0^2 =$

$= 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$; $\cos\beta = \pm\frac{1}{2}$.

Значит, β = 60° или β = 120°.

Основные свойства числовых проекций вектора в прямоугольной системе координат:

1) проекции вектора не изменяются при параллельном переносе вектора или оси, на которую вектор переносится;

2) проекция суммарного вектора равна алгебраической сумме одноименных проекций слагаемых векторов: если $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} =$ $= c_x\vec{i} + c_y\vec{j} + c_z\vec{k}$ то $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = a_z + b_z$;

3) каждая проекция вектора равна разности соответствующих координат конечной и начальной точек вектора

$$\overrightarrow{AB} = \left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right);$$

Замечание. Если необходимо определить расстояние между двумя точками, то принимая их за начальную и конечную точки вектора, длину вектора можно вычислить как расстояние между точками:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}.$$

4) при умножении вектора на действительное число все его проекции на координатные оси умножаются на то же число

$$\lambda\vec{a} = \left(\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z\right).$$

Если $\vec{a} \parallel \vec{b}$, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ и получаем

аналитическое условие коллинеарности векторов

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Теорема
(аналитическое условие коллинеарности)

Векторы $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ коллинеарны тогда и только когда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$. В случае равенства нулю одного или нескольких знаменателей, соответствующие равенства следует понимать как пропорции.

Замечание. Всюду в дальнейшем выражения, подобные равенству $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, будем понимать как пропорции, чтобы отдельно не оговаривать случай равенства знаменателей нулю.

Пример 1. При каких значениях параметров α и β векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ коллинеарны: $\vec{u} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение: $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y} = \frac{u_z}{v_z}$ $\frac{\alpha}{3} = \frac{3}{-1} = \frac{\beta}{2}$. Из пропорции следует: $\alpha = -9;\ \beta = -6$.

Пример 2. Даны координаты вектора $a_x = 4;\ a_y = -12$ и его модуль $\left|\vec{a}\right| = 13$. Найти третью координату, определить направляющие косинусы вектора.

Решение: $13 = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{4^2 + (-12)^2 + a_z^2}$.

Решив это уравнение, получим $a_z = \pm 3$. Таким образом, определены два вектора: $\vec{a} = (4;\ -12;\ 3)$ и $\vec{a}^* = (4;\ -12;\ -3)$.

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$: $\cos\alpha = \dfrac{a_x}{|\vec{a}|} = \dfrac{4}{13}$, $\cos\beta = \dfrac{a_y}{|\vec{a}|} = -\dfrac{12}{13}$, $\cos\gamma = \dfrac{a_z}{|\vec{a}|} = \dfrac{3}{13}$.

Проверка: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \dfrac{16}{169} + \dfrac{144}{169} + \dfrac{9}{169} = 1$.

Аналогично определяются направляющие косинусы вектора $\vec{a}^*$.

2.5.6⁰. Деление отрезка прямой в данном отношении

При решении геометрических задач методами векторной алгебры часто бывает необходимо найти координаты точки *M*, делящей заданный отрезок *AB* в заданном отношении $\dfrac{m}{n} = \lambda$.

Тогда координаты точки *M* определяются по формулам:

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda}; \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}; \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda}.$$

Пример. На отрезке *AB*, где $A(1, 2, 6)$ и $B(6, 12, 21)$ найти точку *M* такую, что $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{2}{3}$.

Решение: $x_M = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1+\lambda} = \dfrac{1 + \frac{2}{3}\cdot 6}{1 + \frac{2}{3}} = 3$;

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{2 + \frac{2}{3}\cdot 12}{1 + \frac{2}{3}} = 6; \quad z_M = \frac{z_A + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{6 + \frac{2}{3}\cdot 21}{1 + \frac{2}{3}} = 12.$$

2.6⁰. Скалярное произведение векторов

Определение: Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha.$$

Из определения скалярного произведения следует, что

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot \Pi p_{\vec{a}}\vec{b}=\left|\vec{b}\right|\cdot \Pi p_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Свойства скалярного произведения:

Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$.

Если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то

$\vec{a}\cdot\vec{b}>0$ тогда и только тогда, когда угол α острый;

$\vec{a}\cdot\vec{b}<0$ тогда и только тогда, когда угол α тупой;

$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда угол α прямой.

Теорема
(скалярное произведение и линейные операции)

1) Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа λ:

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right);$$

2) Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}.$$

Замечание. Из теоремы следует, что при раскрытии скобок в выражениях, содержащих операции векторного сложения, вычитания, умножения на число и скалярного умножения можно действовать так же, как и при раскрытии скобок, содержащих операции с числами.

Теорема
(скалярное произведение в координатах)

Если $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

2.6.1^0. Геометрические приложения скалярного произведения векторов

1) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, т.е. $\cos\left(\vec{a},\,\vec{b}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$, то из определения скалярного произведения следует *условие ортогональности векторов в векторной форме:* $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

2) Если $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то угол между этими векторами можно вычислить по формуле

$$\cos\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}};$$

3) Учитывая, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \Pi p_{\vec{a}} \vec{b}$, получим формулу

$$\Pi p_{\vec{a}} \vec{b} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}};$$

4) Скалярное произведение вектора на орт оси позволяет определить координату (числовую проекцию) вектора на ось, например, $a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}$.

Пример 1. Определить угол между векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение: $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} =$

$$= \frac{-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{-3}{\sqrt{2}\sqrt{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\left(\vec{a},\, \vec{b}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Пример 2. Даны векторы $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$. Определить проекцию вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Решение: $\Pi p_{\vec{b}} \vec{a} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

При решении геометрических задач с помощью формул векторной алгебры линейные элементы геометрических фигур представляются в виде векторов.

Пример 3. Найти длины сторон и углы треугольника с вершинами в точках $A(-1; -2;\ 4)$, $B(-4; -2;\ 0)$, $C(3; -2;\ 1)$.

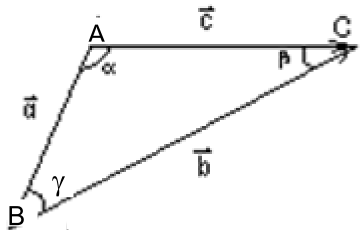


Рис. 38. Пример

Решение: представляем стороны треугольника в виде векторов (рис. 38) и находим координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB}=\vec{a}=\left(-4-(-1);\ -2-(-2);\ 0-4\right)=(-3;0;-4);$$
$$\overrightarrow{AC}=\vec{c}=\left(3-(-1);\ -2-(-2);\ 1-4\right)=(4;0;-3);$$
$$\overrightarrow{BC}=\vec{b}=(7;\ 0;\ 1).$$

Найдем длины этих векторов: $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+(-4)^2}=5$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=5$; $\left|\overrightarrow{BC}\right|=5\sqrt{2}$.

Определяем углы между сторонами:
$$\cos\alpha=\cos(\vec{a},\vec{c})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{(-3)\cdot 4+0\cdot 0+(-4)\cdot(-3)}{5\cdot 5}=0;\ \alpha=\frac{\pi}{2}.$$
$$\cos\beta=\cos\left(\vec{b},\vec{c}\right)=\frac{7\cdot 4+0\cdot 0+1\cdot(-3)}{5\cdot 5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \Rightarrow\beta=\frac{\pi}{4}.$$

По теореме о сумме углов треугольника должно быть $\gamma=\dfrac{\pi}{4}$.

Проверим: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{(-3)\cdot 7+0\cdot 0+(-4)\cdot 1}{5\cdot 5\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\gamma=$
$$=\cos\left(\pi-\left(\vec{a},\vec{b}\right)\right)=-\frac{7\cdot 4+0\cdot 0+1\cdot(-3)}{5\cdot 5}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$ (см. рис. 38).

2.6.2⁰. Определение координат (проекций) вектора при изменении системы координат

Пусть задан вектор $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$ в некоторой (старой) прямоугольной системе координат $Oxyz$. Необходимо определить координаты того же вектора $\vec{a}=(a_1',\ a_2',\ a_3')$ в новой системе координат $Ox'y'z'$.

Пусть начала координат в обеих системах совпадают. Это не уменьшает общности получаемых результатов, так как параллельный перенос вектора не изменяет его проекций (координат).

Вектор $\vec{a}$ в двух системах координат имеет вид
$$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k};\qquad \vec{a}=a_1'\vec{i}'+a_2'\vec{j}'+a_3'\vec{k}'.$$
$$a_1'=\vec{a}\cdot\vec{i}'=\left(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}\right)\cdot\vec{i}'=a_1\left(\vec{i}\cdot\vec{i}'\right)+a_2\left(\vec{j}\cdot\vec{i}'\right)+a_3\left(\vec{k}\cdot\vec{i}'\right);$$

$$a_1' = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3,$$

где

$$\alpha_{11} = \vec{i} \cdot \vec{i}' = \cos\left(\vec{i}, \vec{i}'\right),\ \alpha_{12} = \vec{j} \cdot \vec{i}' = \cos\left(\vec{i}, \vec{j}'\right),\ \alpha_{13} = \vec{k} \cdot \vec{i}' = \cos\left(\vec{k}, \vec{i}'\right).$$

Аналогично получаем:

$$a_2' = \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3; \qquad a_3' = \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3.$$

Эти формулы можно представить в матричной форме:

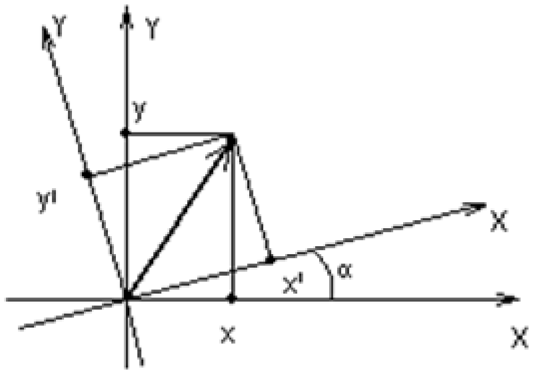


Рис. 39. Переход
к новым координатам

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ a_2' \\ a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Или, более коротко: $\vec{a}' = = \left(\alpha_{ik}\right)\vec{a}$.

Пусть на плоскости даны две различные прямоугольные системы координат XOY и $X'O'Y'$ и дан вектор $\vec{a}$, координаты которого в системе XOY известны. Требуется найти координаты того же вектора в системе $X'O'Y'$.

Теорема
(о переходе к новым координатам)

Пусть координаты произвольного вектора $\vec{a}$ в системе XOY равны a_1, a_2, а в системе $X'O'Y'$ – a_1', a_2' тогда если система $X'O'Y'$ получена из системы XOY поворотом на угол α вокруг точки O против часовой стрелки, то

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha;$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

В тензорном исчислении, которое находит наиболее широкое применение в механике сплошной среды (гидромеханике, теории упругости и т.д.) закон преобразования координат лежит в основе определения вектора, который считают тензором первого ранга.

2.7⁰. Векторное произведение векторов

Определение: *векторным произведением* вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, удовлетворяющий условиям:

1) Длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла между ними: $|\vec{c}| = = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\alpha$.

2) Линия действия вектора $\vec{c}$ перпендикулярна линиям действия векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3) Вектор $\vec{c}$ направлен так, что наблюдатель, смотрящий с конца вектора $\vec{c}$, видит поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ на наименьший из двух возможных углов, происходящим против часовой стрелки

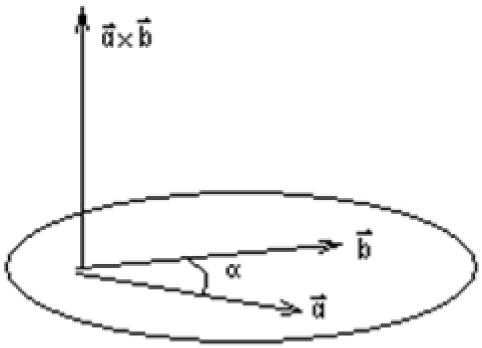


Рис. 40. Век
произведе

Теорема
(свойства векторного произведения)

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ имеют место тождества:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (от перестановки множителей меняется знак произведения);

2) Для любого числа A верно: $(A\vec{a}) \times \vec{b} = A(\vec{a} \times \vec{b})$.

3) $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

Теорема
(векторное произведение в координатах)

Если $\vec{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$,

то $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2,\ a_3 b_1 - a_1 b_3,\ a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Замечание. Для запоминания и вычисления координат векторного произведения используют определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

и его разложение по первой строке

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(a_2 b_3 - a_3 b_2) + \vec{j}\,(a_3 b_1 - a_1 b_3) + \vec{k}\,(a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

т.е. коэффициенты при векторах $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ будут равны соответствующим координатам вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Теорема (двойное векторное произведение)

Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ имеет место тождество $\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{n}\right) = \vec{b}\left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right) - \vec{n}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$.

Пример. Даны векторы $\vec{a} = (2;\, 0;\, -5)$; $\vec{b} = (-3\,;4;\, 1)$; $\vec{c} = (0;\, 5;\, -1)$. Найти $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{a}$, $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c}$.

Решение: 1) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & -5 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20\vec{i} + 13\vec{j} + 8\vec{k}$, значит, $\vec{a} \times \vec{b} = (20,\, 13,\, 8)$;

2) $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b} = (-20,\, -13, -8)$;

3) $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 20 & 13 & 8 \\ 0 & 5 & -1 \end{vmatrix} = -53\vec{i} + 20\vec{j} + 100\vec{k}$. $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} = (-53, 20, 100)$.

2.7.1^0. Геометрические приложения векторного произведения

1) Модуль векторного произведения двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

2) Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то *условие коллинеарности в векторной форме* имеет вид $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$.

Пример. Даны координаты вершин треугольника $A(7,3,4)$, $B(1,0,6)$, $C(4,5,-2)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Решение: Площадь треугольника равна половине площади соответствующего параллелограмма, значит, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB}=(1-7,\ 0-3,\ 6-4)=(-6,\ -3,\ 2);$$

$$\overrightarrow{AC}=(4-7,\ 5-3,\ -2-4)=(-3,\ 2,\ -6);$$

Вычислим координаты векторного произведения $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -3 & 2 \\ -3 & 2 & -6 \end{vmatrix}=14\vec{i}-42\vec{j}-21\vec{k}.$$

Найдем длину полученного вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{14^2+(-42)^2+(-21)^2}=7\sqrt{2^2+6^2+3^2}=49.$$

Следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{49}{2}=24,5$ кв. ед.

2.8⁰. Смешанное произведение векторов

Определение: *смешанным произведением* векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется скаляр, равный скалярному произведению вектора $\vec{a}\times\vec{b}$ на вектор $\vec{c}$.

Условные обозначения: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Основные свойства смешанного произведения

1. Смешанное произведение не изменится, если поменять местами знаки скалярного и векторного умножений

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

2. При перестановке любых двух векторов смешанное произведение меняет свой знак

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c}\,.$$

Если известны координаты векторов $\vec{a}=\left(a_x,a_y,a_z\right)$, $\vec{b}=\left(b_x,b_y,b_z\right)$, $\vec{c}=\left(c_x,c_y,c_z\right)$, то смешанное произведение векторов можно представить в виде

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

2.8.1⁰. Геометрические приложения смешанного произведения

1. Модуль смешанного произведения $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ как на сторонах

$$V_{\text{ïàð}}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$$

Объем тетраэдра (треугольной пирамиды) равен $V_{\text{òåò}}=\dfrac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|$.

2. Если векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ компланарны, то их смешанное произведение равно нулю.

3. Если смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют правую тройку; если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$ – левую тройку.

4. Четыре точки $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$, $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$, $C\left(x_C,y_C,z_C\right)$ и $D\left(x_D,y_D,z_D\right)$ лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AD}=0$.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}=\left(3,4,0\right)$, $\vec{b}=\left(0,-3,1\right)$, $\vec{c}=\left(0,2,5\right)$. Найти объем параллелепипеда, построенного на этих векторах; определить ориентацию векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Решение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-51.$

Объем параллелепипеда равен 51 кв. ед. Ориентация векторов – левая, так как $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$

П р и м е р 2. Проверить, образуют ли базу в пространстве векторы $\vec{a} = (1,2,3)$, $\vec{b} = (4,5,6)$, $\vec{c} = (7,8,9)$.

Решение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 \\ 7 & -6 & -12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = 0$.

Векторы компланарны, значит, базу не образуют.

Тема 3: АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В аналитической геометрии свойства геометрических объектов описываются и изучаются алгебраическими методами с использованием основных результатов линейной и векторной алгебры, а также элементарной геометрии.

К геометрическим объектам относятся точки, прямые и кривые линии, плоскости и кривые поверхности.

Исходным геометрическим объектом принимается точка. Другие геометрические объекты рассматриваются как множества точек, удовлетворяющих определенным условиям в двумерном или трехмерном координатном пространстве.

Изучение начинают с прямых линий и плоскостей, которые относятся к линейным геометрическим объектам, так как описываются алгебраическими уравнениями первого порядка в прямоугольных системах координат.

3.1^0. Прямые линии на плоскости

Теорема (об общем уравнении прямой на плоскости)

1) В прямоугольной системе координат любая прямая может быть задана уравнением $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – некоторые действительные числа

2) Любое уравнение вида $Ax + By + C = 0$, где A, B, C – действительные числа, удовлетворяющие условию $A^2 + B^2 \neq 0$, задает на плоскости некоторую прямую.

О п р е д е л е н и е: Вектор $\vec{n} = (A, B)$ называется *нормальным вектором* прямой $Ax + By + C = 0$.

Теорема (о совпадении прямых)

1) Разные прямые на плоскости задаются разными уравнениями

2) Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ задают на плоскости одну и ту же прямую тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Следствие: Два уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + + C_2 = 0$ задают на плоскости параллельные прямые тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$.

Теорема (частные случаи общего уравнения)

Пусть прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$, тогда:

1) если $A = 0$, то прямая параллельна оси ОХ;

2) если $B = 0$, то прямая параллельна оси ОУ;

3) если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, требуется составить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

является уравнением прямой, проходящей через две данные точки.

Уравнение прямой «в отрезках»

Рассмотрим общее уравнение прямой: $Ax + By + C = 0$ при условиях $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$ и преобразуем его: $-\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - 1 = 0$, $\frac{x}{-C/A} + \frac{y}{-C/B} = 1$. Обозначив $-\frac{C}{A} = a, -\frac{C}{B} = b$, получим уравнение прямой «в отрезках»:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

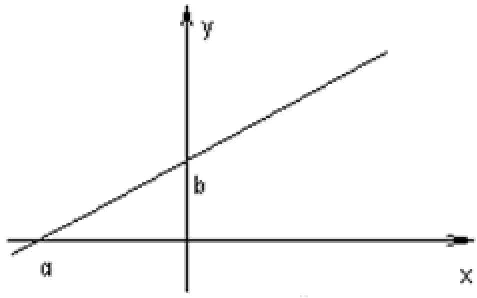


Рис. 54. **Уравнение прямой «в отрезках»**

Поскольку при $x = 0$ из уравнения получаем $y = b$, а при $y = 0$ получим $x = a$, то числа a, b являются длинами отрезков, отсекаемыми прямой на осях координат, взятыми с соответствующим знаком (рис. 54).

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Пусть прямая задана уравнением $Ax + By + C = 0$ и $B \neq 0$, тогда $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$. Обозначим $-\frac{A}{B} = k$, $-\frac{C}{B} = b$: $y = kx + b$.

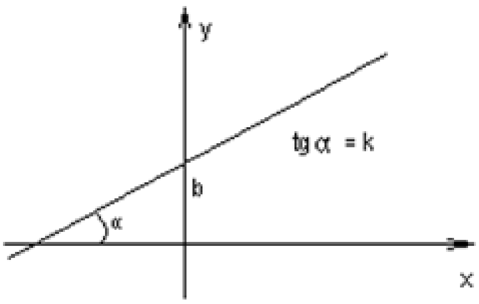


Рис. 55. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Число k называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла наклона этой прямой к положительному направлению оси OX (рис. 55).

Угол отсчитывается против часовой стрелки.

Пусть $k = \operatorname{tg}\alpha$, тогда:

– если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $k > 0$;

– если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $k < 0$;

– если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = \pm\infty$ и уравнение с угловым коэффициентом использовать нельзя.

Модуль параметра b прямой равен длине отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy. При $k = 0$ получим $y = b$ – уравнение прямой, параллельной оси Ox.

Уравнение прямой, проходящей через данную точку,

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где (x_0, y_0) – данная точка; *k* – произвольный параметр.

Каноническое уравнение прямой

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{p},$$

где (x_1, y_1) – координаты некоторой точки, лежащей на прямой; $\vec{s} = (m, p)$ – *направляющий вектор* прямой, т.е. любой вектор, линия действия которого параллельна прямой.

Параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + pt \end{cases},$$

где (x_1, y_1) – координаты некоторой точки, лежащей на прямой; $\vec{s} = (m, p)$ – направляющий вектор прямой; t – переменный параметр $(0 \le t \le \infty)$.

4.1.1^0. Основные задачи для прямых на плоскости

1. Угол между прямыми

Угол φ между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ равен углу между их нормальными векторами, поэтому

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

$\operatorname{tg}\varphi = \pm\dfrac{|k_1 - k_2|}{1 + k_1 k_2}$, где k_1, k_2 – угловые коэффициенты рассматриваемых прямых.

Следствие: 1) прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $k_1k_2 = -1$.

2) прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны тогда и только тогда, когда $k_1 = k_2$.

2. Определение расстояния от фиксированной точки до прямой

Пусть дана прямая $Ax + By + C = 0$ и точка $M_0(x_0, y_0)$, тогда искомое расстояние можно вычислить по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

3. Пересечение двух прямых

Линейное уравнение с двумя неизвестными можно рассматривать как уравнение прямой на плоскости, значит, решение системы $\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$ можно трактовать как нахождение координат точек, принадлежащих одновременно двум данным прямым. Поэтому, в случае $\Delta \neq 0$, прямые, задаваемые уравнениями системы, пересекаются; в случае $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ – совпадают; и в случае $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ – параллельны.

Пример. Построить прямые по известным уравнениям

а) $3x - y + 6 = 0$; б) $5x + 7y = 0$; в) $5y + 4 = 0$.

Решение: а) перейдем к уравнению прямой «в отрезках»; для этого перенесем свободный член уравнения в его правую часть и поделим уравнение на (–6): $3x - y = -6$, $\dfrac{x}{-2} + \dfrac{y}{6} = 1$ (рис. 56); б) в уравнении нет свободного члена, поэтому нельзя воспользоваться уравнением «в отрезках». Воспользуемся уравнением с

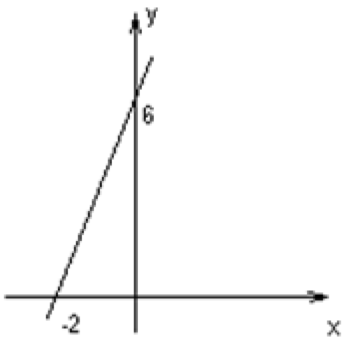


Рис. 56. Пример а)

угловым коэффициентом: $y=-\frac{5}{7}x$. Очевидно, прямая проходит через начало координат.

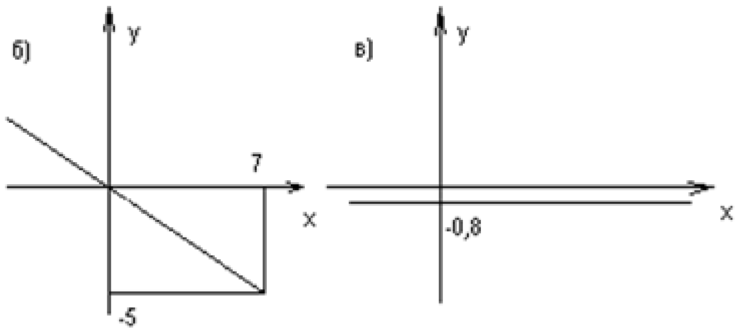


Рис. 57. Пример б), в)

в) Снова воспользуемся уравнением с угловым коэффициентом: $y=-\frac{4}{5}=-0{,}8$. Прямая параллельна оси Ox.

П р и м е р: определить параметры k,b прямых

а) $2x-5y-10=0$; б) $2x+5y=0$; в) $y=7$; г) $\frac{x}{5}+\frac{y}{10}=1$.

Решение: для нахождения параметров k,b достаточно выразить в уравнении переменную y:

а) $5y=2x-10$; $y=\frac{2}{5}x-2$; значит, $k=\frac{2}{5}$, $b=-2$;

б) $y=-\frac{2}{5}x$; значит, $k=-\frac{2}{5}$, $b=0$;

в) $k=0$, $b=7$;

г) $\frac{y}{10}=1-\frac{x}{5}$; $y=-2x+10$; значит, $k=-2$, $b=10$;

П р и м е р. Даны вершины треугольника $A(0,1)$, $B(6,5)$, $C(12,-1)$. Составить уравнение высоты треугольника, проведенной из вершины *C*.

Решение: прямая, отрезок которой является высотой CD треугольника ABC, перпендикулярна прямой AB.

Составим уравнение прямой AB как уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-1}{5-1};\ \frac{x}{6}=\frac{y-1}{4};\ 4x=6\left(y-1\right);\ 6y=4x+6;\ y=\frac{2}{3}x+1.$$

Угловой коэффициент высоты определим из условия $k_1k_2=-1$: $\frac{2}{3}k_2=-1$; $k_2=-\frac{3}{2}$. Уравнение искомой высоты можно записать в виде $y=-\frac{3}{2}x+b$, где коэффициент b пока не определен.

Значение этого коэффициента определим из того, что прямая CD проходит через данную точку $C\left(12,-1\right)$: $-1=-\frac{3}{2}\cdot 12+b$; $b=17$. Уравнение высоты – $y=-\frac{3}{2}x+17$.

Пример. Определить, какие из данных прямых параллельны и какие перпендикулярны:

1) $3x-2y+17=0$; 2) $6x-4y-9=0$;

3) $6x+4y-5=0$; 4) $2x+3y-16=0$.

Решение: Прямая 1) параллельна прямой 2), так как $\frac{3}{6}=\frac{-2}{-4}$; прямая 1) не параллельна прямой 3), так как $\frac{3}{6}\neq\frac{-2}{4}$, по той же причине прямая 1) не параллельна прямой 4). Прямые 3) и 4) параллельны.

Прямая 1) не перпендикулярна прямой 3), так как $3\cdot 6+$ $+\left(-2\right)\cdot 4\neq 0$.

Прямая 1) перпендикулярна прямой 4), так как $3\cdot 2+$ $+\left(-2\right)\cdot 3=0$. Прямая 2) перпендикулярна прямой 4), прямые 3) и 4) не перпендикулярны.

Пример. На плоскости дана точка $A\left(1;\,2\right)$.

а) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно вектору $\vec{n}=\left(4;\,5\right)$;

б) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку параллельно вектору $\vec{l} = (3;\,4)$;

в) составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(1;\,2)$ и $B(-2;\,3)$;

г) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку под углом $45°$ к положительному направлению оси OX;

д) составить уравнение прямой, проходящей через данную точку и отсекающей на осях координат треугольник площади 10;

Решение: а) Пусть точка $M(x,\ y)$ лежит на прямой, тогда векторы $\overrightarrow{AM} = (x-1;\, y-2)$ и $\vec{n} = (4,\,5)$ взаимно перпендикулярны и, следовательно, их скалярное произведение равно нулю: $4(x-1)+5(y-2)=0$.

Раскрыв скобки и приведя подобные слагаемые, получим общее уравнение прямой: $4x+5y-14=0$.

б) Сведем задачу к предыдущей: для этого надо найти какой-либо вектор, перпендикулярный данной прямой. Но если вектор перпендикулярен искомой прямой, то он будет перпендикулярен и вектору $\vec{l} = (3;\,4)$. Вектор $\vec{n} = (-4;\,3)$ перпендикулярен вектору $\vec{l}$, так как их скалярное произведение равно нулю. Значит, $-4(x-1)+3(y-2)=0$. Общее уравнение прямой: $-4x+3y-2=0$.

в) По приведенной выше формуле получим: $\dfrac{x-1}{-2-1} = \dfrac{y-2}{3-2}$. Раскрыв это равенство как пропорцию и приведя подобные слагаемые, получим общее уравнение прямой: $x+3y-7=0$.

г) Если речь идет о каких-либо углах, лучше воспользоваться уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

Поскольку $k = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$, то $y = x + b$. Подставим в последнее уравнение координаты точки $A(1;\,2)$: $2 = 1 + b$. Значит, $b = 1$ и уравнение прямой: $y = x + 1$.

д) Если речь идет об отрезках, отсекаемых прямой на осях координат, удобно бывает воспользоваться уравнением прямой «в отрезках» $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. По условию $\dfrac{1}{a} + \dfrac{2}{b} = 1$ и $\dfrac{1}{2}ab = 10$.

Решим систему $\begin{cases} \dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{b}=1 \\ ab=20 \end{cases}$: $\begin{cases} \dfrac{b+2a}{ab}=1 \\ ab=20 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{b+2a}{20}=1 \\ ab=20 \end{cases}$;

$\begin{cases} b+2a=20 \\ ab=20 \end{cases}$; $\begin{cases} b+2a=20 \\ a(20-2a)=20 \end{cases}$; $\begin{cases} b+2a=20 \\ a(10-a)=10 \end{cases}$; $\begin{cases} b+2a=20 \\ a^2-10a+10=0 \end{cases}$;

$\begin{cases} b=20-2a \\ a=\dfrac{10\pm\sqrt{60}}{2} \end{cases}$; $\begin{cases} b=10\mp 2\sqrt{15} \\ a=5\pm\sqrt{15} \end{cases}$.

Задача имеет два решения: $\dfrac{x}{5+\sqrt{15}}+\dfrac{y}{10-2\sqrt{15}}=1$ и $\dfrac{x}{5-\sqrt{15}}+$ $+\dfrac{y}{10+2\sqrt{15}}=1$.

3.2⁰. Плоскость в пространстве

Теорема (об общем уравнение плоскости)

1) Любая плоскость в прямоугольной системе координат может быть задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – некоторые действительные числа.

2) Любое уравнение вида $Ax + By + Cz + D = 0$ при условии $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ задает в пространстве некоторую плоскость.

Определение: вектор $\vec{n}(A, B, C)$ называется *нормальным вектором* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. В качестве нормального вектора можно использовать любой вектор, перпендикулярный плоскости.

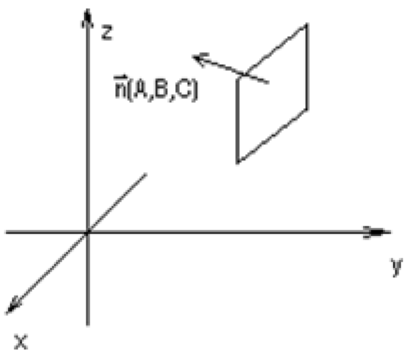


Рис. 59. Н
вектор

Теорема (о совпадении плоскостей)

Уравнения $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ задают одну и ту же плоскость тогда и только тогда, когда $\dfrac{A_2}{A_1}=\dfrac{B_2}{B_1}=\dfrac{C_2}{C_1}=\dfrac{D_2}{D_1}$.

Следствие: Плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y +$ $+ C_2z + D_2 = 0$ параллельны тогда и только тогда, когда

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}\neq\frac{D_2}{D_1}.$$

Очевидно, что если $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходит через начало координат.

Пусть $A = 0$, тогда нормальный вектор плоскости $Ax + By + + Cz + D = 0$ лежит в координатной плоскости YOZ и, следовательно, перпендикулярен оси OX. Значит, плоскость $Ax + By + Cz + D = = 0$ параллельна оси OX.

Аналогично показывается, что если $B = 0$, то плоскость параллельна оси OY, а если $C = 0$, то плоскость параллельна оси OZ.

Из вышесказанного следует:

– если $A = 0$ и $B = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости XOY;

– если $A = 0$ и $C = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости XOZ;

– если $B = 0$ и $C = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ параллельна координатной плоскости YOZ;

– если $A = 0$ и $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходит через координатную ось OX;

– если $B = 0$ и $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходит через координатную ось OY;

– если $C = 0$ и $D = 0$, то плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходит через координатную ось OZ.

Пусть $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $D \neq 0$. Преобразуем уравнение $Ax + By + Cz = –D$: $\frac{x}{-D/A}+\frac{y}{-D/B}+\frac{z}{-D/C}=1$. Переобозначив постоянные, получим *уравнение плоскости «в отрезках»* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. При $x = 0$, $y = 0$ из последнего уравнения следует, что $z = c$, при $x = 0$, $z = 0$ следует, что $y = b$ и при $z = 0$, $y = 0$ следует: $x = a$. Значит, a, b, c – взятые с соответствующим знаком длины отрезков, отсекаемых плоскостью $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ от осей координат, поэтому уравнение $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ называется уравнением плоскости «в отрезках».

Уравнение плоскости, проходящей через данную фиксированную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданной нормали $\vec{n} = (A, B, C)$, можно записать в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Пример. Составить уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$.

Решение: Допустим сначала, что данные три точки не лежат на одной прямой и, следовательно, задача имеет единственное решение. Пусть точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости, тогда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ компланарны. Условие компланарности для этих векторов имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель в левой части равенства и приведя подобные слагаемые, получим уравнение искомой плоскости.

Если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$ лежат на одной прямой, то после раскрытия определителя вместо уравнения получим тождество 0 = 0.

3.2.1^0. Основные задачи для плоскости в пространстве

Большинство математических задач для плоскости в пространстве решается при совместном использовании решений основных задач:

0. Построение плоскости в пространстве по заданному уравнению.

1. Определение уравнения плоскости по заданным условиям.

2. Определение угла между плоскостями. Определение параллельности и перпендикулярности плоскостей.

3. Определение расстояния от заданной точки до заданной плоскости.

Рассмотрим примеры решения указанных задач.

П р и м е р 1. Построить плоскости в пространстве по уравнениям: а) $5x-2y+3z-10=0$; б) $3x+2y+z=0$; в) $3x+2y=6$; г) $2z-7=0$.

Решение: а) перейдем к уравнению плоскости в отрезках: $\frac{x}{2}-\frac{y}{5}+\frac{z}{10/3}=1$. Откладываем на координатных осях отрезки длин $2,-5,\frac{10}{3}$ соответственно. Соединяем эти точки отрезками (рис. 60);

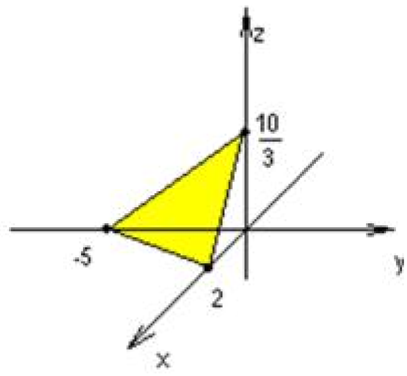


Рис. 60

б) плоскость проходит через начало координат. В системе координат от ее начала строим нормаль к плоскости $\vec{n}(3,\ 2,\ 1)$, а плоскость изображаем перпендикулярно нормали;

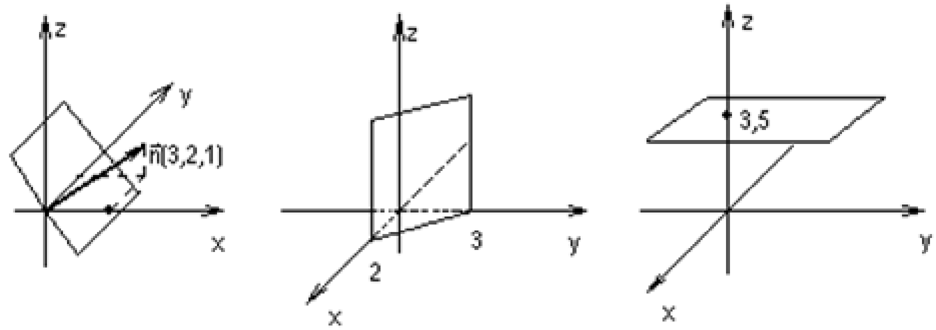


Рис. 61

в) перейдем к уравнению плоскости в отрезках: $\frac{x}{2}+\frac{z}{3}=1$.

Поскольку нет слагаемого с координатой *y*, то плоскость будет параллельна оси Oy;

г) плоскость отсекает на оси Oz отрезок длины $\frac{7}{2}$, две другие оси координат она не пересекает.

П р и м е р 2. Дано общее уравнение плоскости $5x-6y-2z+$ $+30=0$; составить уравнение плоскости, параллельной данной и проходящей через точку $A(3;\ 4;\ 5)$.

Решение: Если две плоскости параллельны, то нормальный вектор первой плоскости является нормальным вектором и для второй плоскости. Значит, уравнение искомой плоскости имеет вид $5x-6y-2z+D=0$,где D – некоторая, пока неизвестная, постоянная. Для определения этой постоянной подставим в уравнение $5x-6y-2z+D=0$ координаты точки $A(3;\,4;\,5)$: $15-24- \quad -10+D=0$. Следовательно, $D=19$ и искомая плоскость задается общим уравнением $5x-6y-2z+19=0$.

Пример 3. Найти угол между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Решение: угол между плоскостями, очевидно, равен углу между их нормальными векторами. По формуле вычисления косинуса угла между векторами получим формулу косинуса угла между плоскостями:

$$\cos\alpha=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Из этой формулы, в частности, следует: *Условие перпендикулярности прямых*:

$$A_1A_2+B_1B_2+\tilde{N}_1\tilde{N}_2=0.$$

Пример 4. Найти расстояние от точки $M_0(4,3,0)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(1,3,0)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(3,0,1)$.

Решение: составляем уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-0 \\ 4-1 & -1-3 & 2-0 \\ 3-1 & 0-3 & 1-0 \end{vmatrix}=0.$$

Раскрывая определитель, получим общее уравнение плоскости $2x+y-z-5=0$.

Воспользуемся формулой расстояния от точки до плоскости:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}:$$

$$d=\frac{|2\cdot4+1\cdot3-1\cdot0-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt6}=\sqrt6.$$

3.3⁰. Прямые линии в пространстве

Прямую можно рассматривать как пересечение двух плоскостей и поэтому задавать системой уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

О п р е д е л е н и е: любой вектор, параллельный некоторой прямой, называется *направляющим вектором* этой прямой.

Пусть некоторая прямая L с направляющим вектором $\vec{s}\,(m, p, q)$ проходит через точку $M_0\left(x_0, y_0, z_0\right)$. Некоторая точка $M\left(x,\, y,\, z\right)$ будет принадлежать прямой L тогда и только тогда, когда векторы $\vec{s}\,(m, p, q)$ и $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0,\, y - y_0,\, z - z_0)$ коллинеарны. Условие коллинеарности этих векторов: $\dfrac{x - x_0}{m} =$ $= \dfrac{y - y_0}{p} = \dfrac{z - z_0}{q}$. Эти уравнения называются каноническими уравнениями прямой.

Полагая $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{p} = \dfrac{z - z_0}{q} = t$, получим параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + pt \\ z = z_0 + qt \end{cases}.$$

П р и м е р 1. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1\left(x_1,\, y_1,\, z_1\right)$, $M_2\left(x_2,\, y_2,\, z_2\right)$.

Решение: точка $M\left(x,\, y,\, z\right)$ будет лежать на прямой тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$ и $\overrightarrow{M_1M}$ коллинеарны. Поэтому условие коллинеарности будет являться уравнением прямой, проходящей через две точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

П р и м е р 2. Найти угол между прямыми $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=$ $=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$.

Решение: угол между прямыми равен углу между их направляющими векторами, поэтому

$$\cos\alpha=\frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

3.3.1[0]. Основные задачи для прямых в пространстве

Большинство математических и прикладных задач для прямой в пространстве решается при совместном использовании решений следующих основных задач:

1. Приведение общих уравнений прямой как линии пересечения двух плоскостей к канонической или параметрической форме.

Решение: для составления канонических и параметрических уравнений прямой нужно знать ее направляющий вектор и координаты какой-либо точки, лежащей на прямой. Координаты точки найдем как любое частное решение СЛАУ

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}.$$

Нетрудно понять, что направляющий вектор прямой перпендикулярен каждому из нормальных векторов плоскостей, задающих эту прямую. Поэтому в качестве направляющего вектора можно взять векторное произведение нормальных векторов плоскостей.

П р и м е р 1. Найти канонические и параметрические уравнения прямой как линии пересечения плоскостей

$$\begin{cases}3x+2y+4z-11=0\\ 2x+y-3z-1=0\end{cases}.$$

Решение: нормальные векторы плоскостей равны соответственно $\vec{n}_1=(3,2,4)$ и $\vec{n}_2=(2,1,-3)$. В качестве направляющего вектора прямой можно взять

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-10, 15, -1).$$

В системе $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 11 = 0 \\ 2x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$ полагаем, например, $z = 0$:

Замечание: прямая обязательно пересекает хотя бы одну координатную плоскость. Здесь мы приняли, что это – плоскость $xOy\,(z = 0)$.

Если полученная СЛАУ не будет иметь решений, то вместо $z = 0$ надо будет взять $x = 0$ или $y = 0$.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 2x + y = 1 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases};\ x = -9;\ y = 19.$$

Значит, канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x+9}{-10} = \frac{y-19}{15} = \frac{z}{-1},$$

а параметрические – $\begin{cases} x = -10t - 9 \\ y = 15t + 19 \\ z = -t \end{cases}.$

2. Определение угла между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

Решение: угол между прямыми равен углу между направляющими векторами.

3. Определение расстояния от точки до прямой.

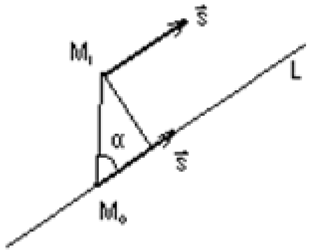


Рис. 64. Расстояние от точки до прямой

Пусть дано каноническое уравнение прямой L

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n} \text{ и точка } M_1\left(x_1,y_1,z_1\right).$$

Направляющий вектор $\vec{s}=\left(l,m,n\right)$ прямой можно параллельно перенести так, что его начало совпадет с точкой $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$ (рис. 64). Тогда расстояние от точки до прямой определяется из прямоугольного треугольника: $d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\sin\alpha$, значит,

$$d=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{s}}{\left|\overrightarrow{M_0M_1}\right|\cdot\left|\vec{s}\right|}\right)^2}.$$

4. Определение взаимного положения двух прямых в пространстве.

Две прямые в пространстве могут либо совпадать, либо быть параллельными, либо пересекаться, либо скрещиваться.

Рассмотрим уравнения двух прямых $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ и $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$. Пусть $\vec{q}=(l_1,m_1,n_1)$, $\vec{r}=(l_2,m_2,n_2)$, $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$, $M_1\left(x_1,y_1,z_1\right)$.

На рис. 65 приведены случаи совпадения, параллельности и пересечения прямых:

1) Прямые совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}$, $\vec{r}$, $\overrightarrow{M_1M_0}$ коллинеарны;

2) Прямые параллельны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}, \vec{r}$ коллинеарны, а вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ им не коллинеарен;

3) Прямые пересекаются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}, \vec{r}, \overrightarrow{M_1M_0}$ компланарны, а векторы $\vec{q}, \vec{r}$ не коллинеарны;

4) Прямые скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы $\vec{q}, \vec{r}, \overrightarrow{M_1M_0}$ не компланарны.

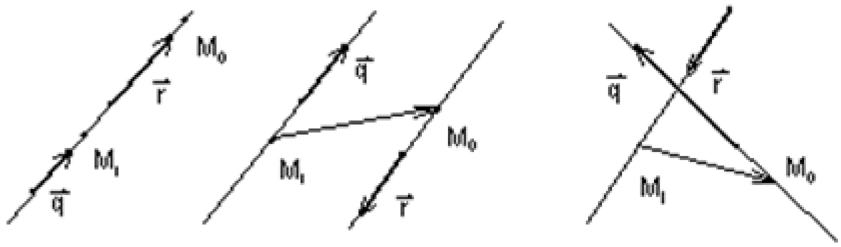


Рис. 65. Взаимное положение кривых

3.3.2⁰. Основные задачи для прямой и плоскости в пространстве

1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

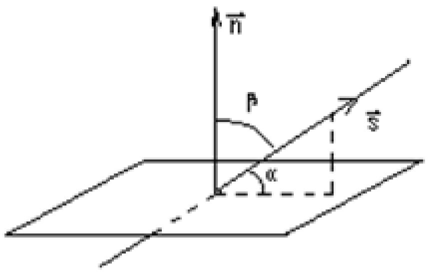


Рис. 66. Угол между прямой и плоскостью

Пусть дана прямая $\frac{x-x_0}{l} = = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$.

Решение: Пусть α – искомый угол между прямой и плоскостью, β – угол между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости, тогда $\alpha + \beta = 90°$ и $\sin\alpha = \cos\beta$.

Значит, $\sin\alpha = \dfrac{lA + mB + nC}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + \tilde{N}^2}}$.

Условие параллельности: $lA + mB + nC = 0$. Условие перпендикулярности: $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

2. Определение взаимного положения прямой и плоскости в пространстве.

Прямая может пересекать плоскость, лежать в этой плоскости или быть ей параллельной. Определить взаимное положение прямой и плоскости можно, рассмотрев систему, состоящую из уравнения плоскости и уравнений прямой: если система имеет единственное решение – прямая и плоскость пересекаются в единственной точке; если система имеет бесконечно много решений – прямая лежит в плоскости; если система не имеет решений – плоскость и прямая параллельны.

Можно привести и менее громоздкий способ определения взаимного положения прямой и плоскости:

1) Прямая $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскость $Ax + By + Cz + {}$ $+ D = 0$ пересекаются тогда и только тогда, когда направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости не перпендикулярны: $Al + Bm + Cn \neq 0$.

2) Прямая лежит в плоскости тогда и только тогда, когда $Al + {}$ $+ Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

3) Прямая параллельна плоскости тогда и только тогда, когда $Al + Bm + Cn = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$.

4) Прямая перпендикулярна плоскости, если $\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$.

3. Определение точки пересечения прямой и плоскости.

Если известно, что прямая и плоскость пересекаются $(Al + Bm + Cn \neq 0)$, то найти координаты их точки пересечения можно решив систему, состоящую из уравнения плоскости и уравнений прямой.

П р и м е р 1. Установить взаимное положение прямых

$$\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{9} \text{ и } \frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-6}{2}.$$

Решение: Направляющий вектор первой прямой – $\vec{q} = (7;\, 8;\, 9)$, второй – $\vec{r} = (5;\, -6;\, 2)$. Точка $M(1;\, 2;\, 3)$ лежит на первой прямой, точка $N(4;\, 5;\, 6)$ – на второй, $\overrightarrow{MN} = (3;\, 3;\, 3)$. Векторы $\vec{q}$ и $\vec{r}$ не коллинеарны, значит, прямые не совпадают и не параллельны. Проверим компланарность векторов $\vec{q}$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{MN}$: $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 5 & -11 & -3 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -11 & -3 \end{vmatrix} = 57 \neq 0$, значит, прямые скрещиваются.

П р и м е р 2. Найти расстояние между прямыми $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{9}$ и $\frac{x-4}{5} = \frac{y-5}{-6} = \frac{z-6}{2}$.

Решение: проведем через точку $M(1;\ 2;\ 3)$, лежащую на первой прямой, прямую L_2, параллельную второй прямой. Вектор $\vec{r} = (5;\ -6;\ 2)$, являющийся направляющим для второй прямой, будет направляющим и для прямой L_2. Построим на векторах $\vec{q}$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{MN}$ параллелепипед. Длина высоты этого параллелепипеда равна искомому расстоянию. Объем V параллелепипеда равен произведению площади основания S на высоту h: $V = Sh$. С другой стороны, объем V равен смешанному произведению векторов $\vec{q}$, $\vec{r}$ и $\overrightarrow{MN}$, а площадь основания – модулю векторного произведения $\vec{q}$ и $\vec{r}$, значит,

$$h = \frac{V}{S} = \frac{\vec{q} \times \vec{r} \cdot \overrightarrow{MN}}{\left|\vec{q} \times \vec{r}\right|}.$$

$$\vec{q} \times \vec{r} \cdot \overrightarrow{MN} = \begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 5 & -6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 57;\ \vec{q} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 8 & 9 \\ 5 & -6 & 2 \end{vmatrix} = (70;\ 31;\ -82);$$

$$\left|\vec{q} \times \vec{r}\right| = \sqrt{70^2 + 31^2 + 82^2} = \sqrt{12585};\ h = \frac{57}{\sqrt{12585}} \approx 0{,}51.$$

3.5⁰. Алгебраические кривые второго порядка

К кривым второго порядка относятся следующие кривые: окружность, эллипс, гипербола и парабола. При исследовании свойств этих кривых и их построении обычно используют канонические системы отсчета. Поэтому рассмотрим указанные кривые и их свойства в канонических осях.

3.5.1⁰. Окружность

Определение: Окружностью называется алгебраическая кривая второго порядка, все точки которой равноудалены от одной фиксированной точки, не принадлежащей окружности.

Указанная в определении фиксированная точка называется *центром окружности*.

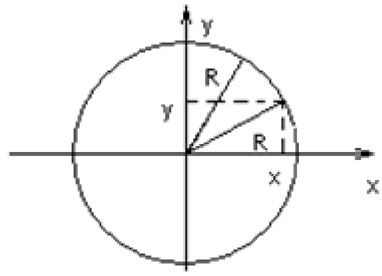


Рис.

Характеристическое свойство окружности: $OM = R = \text{const}$, где M – текущая точка окружности; R – радиус окружности (рис. 67).

По теореме Пифагора $x^2 + y^2 = R^2$. Это уравнение называется каноническим уравнением окружности.

3.5.2⁰. Эллипс

Определение: *Эллипсом* называется алгебраическая кривая второго порядка, каждая точка которой удалена от двух фиксированных точек (фокусов), не принадлежащих эллипсу, так, что сумма расстояний от фокусов до любой точки эллипса постоянна.

Обозначим фокусы буквами F_1, F_2, расстояние между фокусами обозначим $2c$. Это расстояние называется *фокальным* (*фокусным*). Поместим начало прямоугольной системы координат xOy в середину отрезка F_1F_2 так, чтобы направление вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$ совпало с положительным направлением координатной оси, которая называется *фокальной осью*.

Расстояние c от начала координат до фокуса называется *линейным эксцентриситетом* эллипса. Расстояния от начала координат до наиболее и наименее удаленных точек (вершин) эллипса (a и b) называются *полуосями* эллипса. При этом отрезок наибольшей полуоси лежит на фокальной оси эллипса. Расстояния от фокусов эллипса до любой его точки называются *фокальными радиусами*. Если фокальная ось эллипса совпадает с координатной осью Ox (рис. 68, *а*), то $a > b$ и характеристическое свойство эллипса, лежащее в основе его определения, в математической форме имеет вид $r_1 + r_2 = 2a$, линейный эксцентриситет $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, каноническое уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Аналогично, если фокальной осью эллипса является координатная ось Oy (рис. 68, *б*) то при $a < b$ имеют место равенства $r_1 + r_2 = 2b$ и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

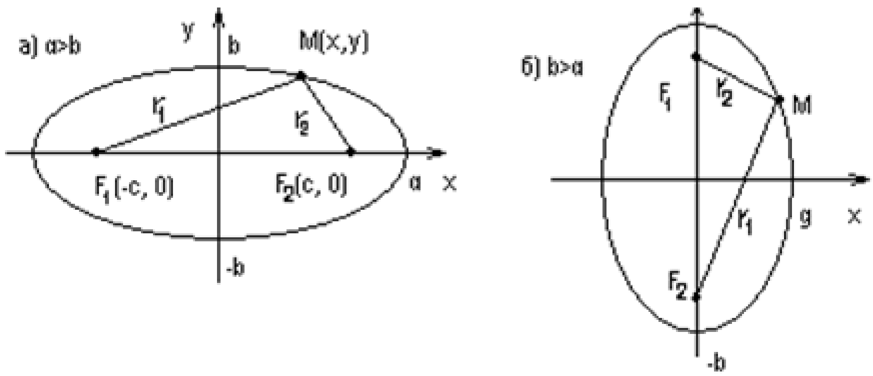


Рис. 68. Эллипс

Каноническое уравнение эллипса при $a < b$ имеет тот же вид. Оси Ox и Oy являются осями симметрии эллипса, начальная точка системы координат – центром эллипса.

Важной числовой характеристикой эллипса является его эксцентриситет, который характеризует отклонение формы эллипса от окружности. Для количественной оценки указанного отклонения кроме линейного эксцентриситета используют *относительный эксцентриситет*

$$e = \frac{c}{a} \text{ при } a > b \quad \text{ и } \quad e = \frac{c}{b} \text{ при } a < b.$$

Замечание: для эллипса: $0 \le e < 1$.

При $e = 1$ эллипс вырождается в отрезок прямой, при $e = 0$ – в окружность.

Фокальные радиусы можно выразить через эксцентриситет эллипса следующим образом:

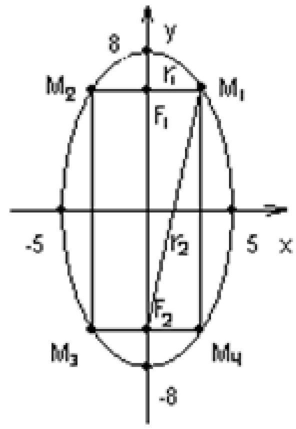
$$\text{при } a > b \ \begin{matrix} r_1 = a + ex_M \\ r_2 = a - ex_M \end{matrix}, \quad \text{при } a < b \ \begin{matrix} r_1 = b + ex_M \\ r_2 = b - ex_M \end{matrix}.$$

О п р е д е л е н и е: Две прямые, перпендикулярные фокальной оси эллипса и отстоящие от его центра на расстоянии $\dfrac{d}{e}$, где e –

эксцентриситет эллипса; d – его большая полуось, называются *директрисами* эллипса.

П р и м е р 1. Задано уравнение эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{64}=1$. Найти параметры эллипса (длины полуосей, линейный и относительный эксцентриситеты); построить эллипс по характерным точкам (точки пересечения эллипса с осями координат, фокусы); проверить правильность построения по его характеристическому свойству.

Решение: полуоси эллипса равны $a=\sqrt{25}=5$, $b=\sqrt{64}=8$. Поскольку $a<b$, то фокусы эллипса лежат на оси Oy. Расстояние от начала координат до фокусов (линейный эксцентриситет):
$c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{64-25}=\sqrt{39}\approx 6,25$.



Координаты фокусов: $F_1\left(0,\sqrt{39}\right)$, $F_2\left(0,-\sqrt{39}\right)$.

Определим абсциссы точек M_1, M_2, принадлежащих эллипсу, при одинаковых ординатах $y=\sqrt{39}$:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{39}{64}=1;\quad \frac{x^2}{25}=\frac{25}{64};\quad x_{1,2}=\pm\frac{25}{8}=\pm 3,125.$$

Таким образом, $M_1\left(3,125;\ \sqrt{39}\right)$, $M_2\left(-3,125;\ \sqrt{39}\right)$. Строим эллипс (рис. 70).

Производим проверку, используя характеристическое свойство эллипса $r_1+r_2=2b$:

$r_1=\left|F_1M_1\right|=3,125$;

$r_2=\left|F_2M_1\right|=\sqrt{\left(3,125-0\right)^2+\left(\sqrt{39}-\left(-\sqrt{39}\right)\right)^2}=12,875$;

$r_1+r_2=3,125+12,825=2b=2\cdot 8=16$.

П р и м е р 2. Составить каноническое уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет – 0,8 и уравнение директрисы $x=12,5$.

Решение: Поскольку директриса вертикальна, то $a>b$ и, значит, $e=\frac{c}{a}$, Составим систему уравнений для нахождения полуосей эллипса:

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = b^2 \\ \dfrac{c}{a} = 0,8 \\ \dfrac{a^2}{c} = 12,5 \end{cases};$$

$$\begin{cases} a^2 - c^2 = b^2 \\ c = 0,8a \\ a^2 = 12,5c \end{cases}; \quad \begin{cases} a^2 - c^2 = b^2 \\ c = 0,8a \\ a^2 = 12,5 \cdot 0,8a \end{cases}.$$

Из последнего уравнения системы находим $a = 10$, затем из второго – $c = 8$, и из первого $b = 6$. Следовательно, каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$.

3.5.3⁰. Гипербола

О п р е д е л е н и е: *Гиперболой* называется алгебраическая кривая второго порядка, каждая точка которой удалена от двух фиксированных точек (фокусов), не принадлежащих гиперболе, так, что модуль разности расстояний от фокусов до любой точки гиперболы постоянна.

Обозначим фокусы буквами F_1, F_2, расстояние между фокусами обозначим $2c$. Это расстояние называется *фокальным* (*фокусным*). Поместим начало прямоугольной системы координат xOy в середину отрезка F_1F_2 так, чтобы направление вектора $\overrightarrow{F_1F_2}$ совпало с положительным направлением координатной оси, которая называется *действительной осью* гиперболы. Вторая координатная ось называется *мнимой осью* гиперболы.

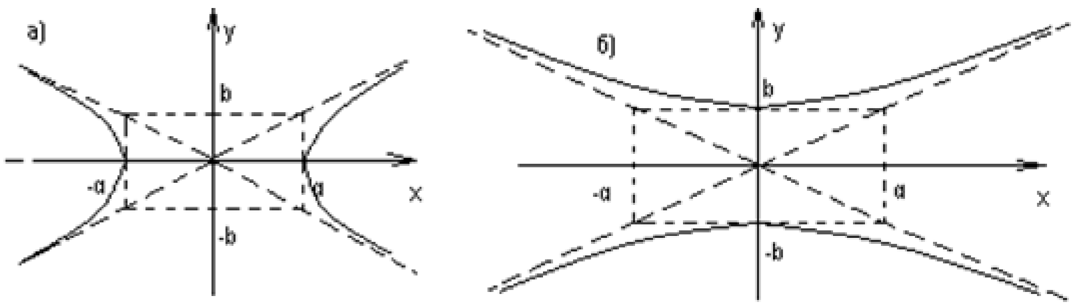


Рис. 71. Гипербола

Расстояние c от начала координат до фокуса называется *линейным эксцентриситетом* гиперболы. Расстояние от начала координат до любой из точек пересечения (вершин) гиперболы с ее действительной осью называется *действительной полуосью.*

Расстояния от фокусов гиперболы до любой его точки называются *фокальными радиусами*. Если действительная ось гиперболы совпадает с координатной осью Ox (рис. 71, *а*), то характеристическое свойство гиперболы, лежащее в основе его определения, в математической форме имеет вид $|r_1 - r_2| = 2a$, линейный эксцентриситет $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, где b – мнимая полуось гиперболы. Аналогично, если действительной осью гиперболы является координатная ось Oy (рис.71, *б*) то действительная полуось гиперболы равна b, фокусы лежат на оси Oy, характеристическое свойство имеет вид $|r_1 - r_2| = 2b$, линейный эксцентриситет $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, а каноническое уравнение гиперболы имеет вид $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$.

Оси координат Ox, Oy являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – центром симметрии. Гипербола состоит их двух ветвей, симметричных относительно мнимой оси; каждая ветвь пересекает действительную ось. При неограниченном увеличении координат x и y точек гиперболы ветви гиперболы неограниченно приближаются к наклонным прямым, которые называются *асимптотами* гиперболы и имеют уравнения $y = \frac{b}{a}x$ и $y = -\frac{b}{a}x$.

Если $a = b$, то асимптоты будут взаимно ортогональными ($y = x, y = -x$). Если эти асимптоты использовать в качестве координатных осей, то уравнение гиперболы будет иметь вид $y = \frac{m}{x}$, $m = \text{const}$. Это уравнение называется уравнением *обратной пропорциональности* (рис. 72).

Замечание: асимптоты гиперболы обладают следующим свойством: расстояние от точки асимптоты до гиперболы неограниченно уменьшается при удалении от начала координат.

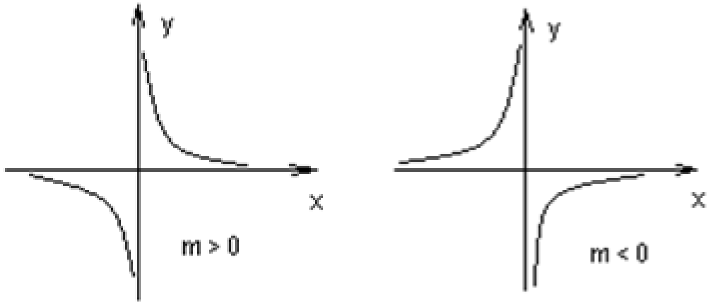


Рис. 72. График обратной пропорциональности

Для оценки влияния изменения длин полуосей гиперболы на форму ее ветвей обычно используют *относительный эксцентриситет* $(1 < e < \infty)$:

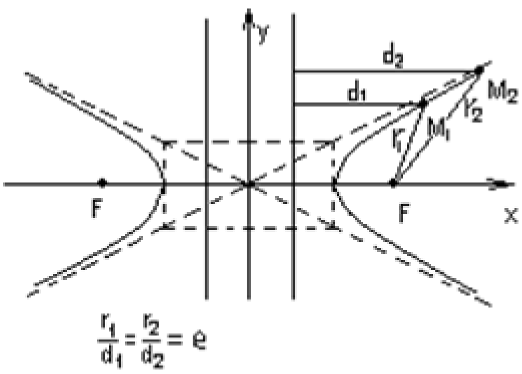


Рис. 73. Директориальное свойство гиперболы

$e = \dfrac{c}{a}$, если a – действительная ось гиперболы;

$e = \dfrac{c}{b}$, если b – действительная ось гиперболы.

При $e \to 1$ ветви гиперболы «выпрямляются», приближаясь к параллельным прямым, перпендикулярным действительной оси; при $e \to \infty$ ветви гиперболы «складываются», приближаясь к действительной оси.

Для определения гиперболы можно использовать ее директориальное свойство (рис. 73).

Определение: Две прямые, перпендикулярные фокальной оси гиперболы и отстоящие от центра гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ на расстояние $\frac{a}{e}$ (соответственно для гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ на расстояние $\frac{b}{e}$), называются *директрисами* гиперболы.

Пример. Задано уравнение гиперболы в канонических осях $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1$. Найти параметры гиперболы; построить гиперболу по характерным точкам; проверить правильность построения по ее характеристическому свойству.

Решение: по уравнению гиперболы определяем длины полуосей: $a = \sqrt{64} = 8; b = \sqrt{36} = 6$. Расстояние от фокуса до начала координат: $c = \sqrt{64 + 36} = 10$. Поскольку фокусы лежат на оси OY, то $F_1(0, -10)$ и $F_2(0, 10)$. Найдем абсциссы точек M_1 и M_2 гиперболы при одинаковых ординатах $y_1 = y_2 = c = 10$:

$$\frac{10^2}{36} - \frac{x^2}{64} = 1; \quad x = \pm 8\sqrt{\frac{100}{36} - 1} = \pm 8\sqrt{\frac{64}{36}} = \pm\frac{32}{3} \approx \pm 10{,}67.$$

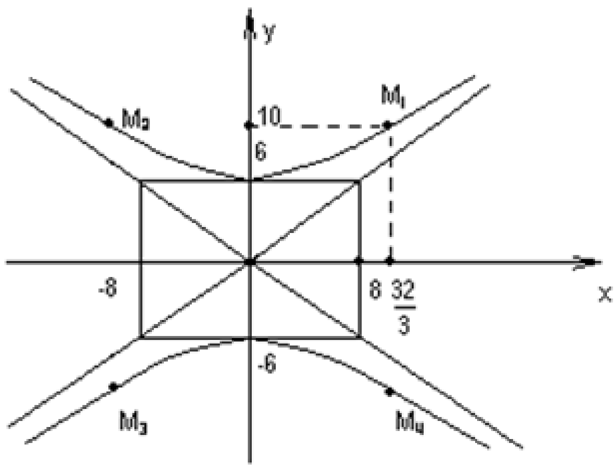


Рис. 74. Пример: построение гиперболы

Сначала строим прямоугольник с центром в начале координат и сторонами $2a = 16$ и $2b = 12$ (рис. 74). Диагонали прямоугольника являются асимптотами гиперболы. Строим точки $M_1\left(\frac{32}{3}, 10\right)$, $M_2\left(-\frac{32}{3}, 10\right)$ и симметричные им относительно оси абсцисс точки $M_3\left(\frac{32}{3}, -10\right)$ и $M_4\left(-\frac{32}{3}, -10\right)$. Вершина верхней ветви гиперболы имеет координаты $(0, 6)$, нижней – $(0, -6)$.

Производим проверку, используя характеристическое свойство гиперболы $\left\| F_2M_1 \right| - \left| F_1M_1 \right\| = 2b = 2 \cdot 6 = 12$:

$$\left| F_2M_1 \right| = \frac{32}{3}\ ;\ \left| F_1M_1 \right| = \sqrt{\left(\frac{32}{3} - 0\right)^2 + \left(10 - (-10)\right)^2} = \sqrt{\frac{4624}{9}} = \frac{68}{3};$$

$$\left\| F_2M_1 \right| - \left| F_1M_1 \right\| = \frac{68}{3} - \frac{32}{3} = \frac{36}{3} = 12.$$

Вычисления и построение проведены правильно.

3.5.4⁰. Парабола

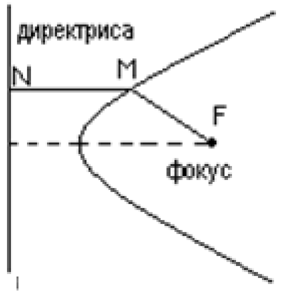


Рис. 75. Парабола

Определение: *Параболой* называется алгебраическая кривая второго порядка, для каждой точки которой расстояние от некоторой точки, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой прямой, называемой *директрисой* (рис. 75).

Определение: Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется *фокальным параметром параболы* и обозначается *p*.

Характеристическое свойство параболы $FM = MN$, где FM – расстояние от фокуса до точки M, принадлежащей параболе; MN – расстояние от той же точки до директрисы. Уравнение параболы в канонических осях $y^2 = 2px$ $\left(y^2 = -2px\right)$. Ось OX – ось симметрии параболы.

Если осью симметрии параболы является ось OY, то каноническое уравнение параболы имеет вид $x^2 = 2py \left(x^2 = -2py\right)$ (рис. 76). В канонических системах координат вершина параболы совпадает с началом координат, расположенным в средней точке фокального параметра.

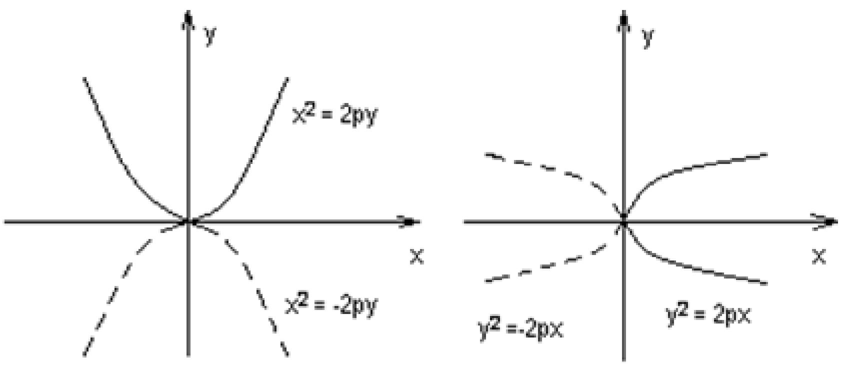


Рис. 76. Канонические уравнения параболы

Пример. Задано уравнение параболы $x^2 = 8y$. Найти параметры параболы; построить параболу по характерным точкам; проверить правильность построения по ее характеристическому свойству.

Решение: осью симметрии является ось OY. Уравнение директрисы $x = -\frac{p}{2} = -2$, координаты фокуса $F(0, 2)$. Находим абсциссы точек M_1 и M_2 параболы при одинаковых ординатах $y_1 = y_2 = 2$: $x^2 = 8 \cdot 2$; $x = \pm 4$; $M_1(4, 2)$, $M_2(-4, 2)$.

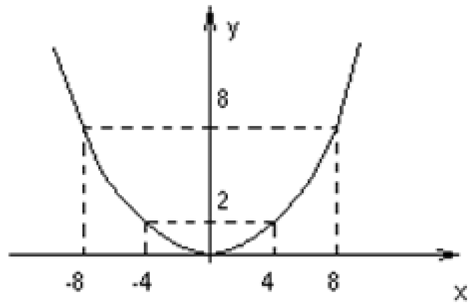


Рис. 77. П
построение

Найдем координаты еще двух точек M_3 и M_4, лежащих на параболе, например, $M_3(8, 8)$, $M_4(-8, 8)$. Строим график параболы по найденным координатам точек (рис. 77).

Производим проверку, используя характеристическое свойство параболы $|FM_3| = |NM_3|$:

$$|FM_3| = \sqrt{(8-0)^2 + (8-2)^2} = 10;$$

$$|NM_3| = \sqrt{(8-8)^2 + (-2-8)^2} = 10.$$

3.6⁰. Уравнения кривых второго порядка в параллельно смещенных осях

Кривые второго порядка в общем случае описываются уравнениями

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + 2a_{12}XY + a_{10}X + a_{20}Y + a_0 = 0.$$

Замечание: изменение обозначений необходимо, так как одни и те же кривые будут рассматриваться в двух различных системах координат.

Если $a_{12} = 0$, то получаем уравнение в параллельно смещенных осях

$$a_{11}X^2 + a_{22}Y^2 + a_{10}X + a_{20}Y + a_0 = 0,$$

которое можно привести к «почти каноническому виду», используя способ дополнения до полных квадратов для переменных X и Y.

Затем параллельным смещением осей переходим к уравнениям в канонических осях xOy.

Уравнения кривых второго порядка в «почти канонических» и канонических осях сведем в таблицу

Уравнения в «почти канонической» форме	Уравнения в канонической форме
Окружность	
$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2=R^2$	$x^2+y^2=R^2$
Эллипс	
$\dfrac{(X-X_0)^2}{a^2}+\dfrac{(Y-Y_0)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$
Гипербола	
$\dfrac{(X-X_0)^2}{a^2}-\dfrac{(Y-Y_0)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

Окончание таблицы

Уравнения в «почти канонической» форме	Уравнения в канонической форме
$\dfrac{(Y-Y_0)^2}{b^2}-\dfrac{(X-X_0)^2}{a^2}=1$	$\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$
Парабола	
$(Y-Y_0)^2=\pm 2p(X-X_0)$	$y^2=\pm 2px$
$(X-X_0)^2=\pm 2p(Y-Y_0)$	$x^2=\pm 2py$

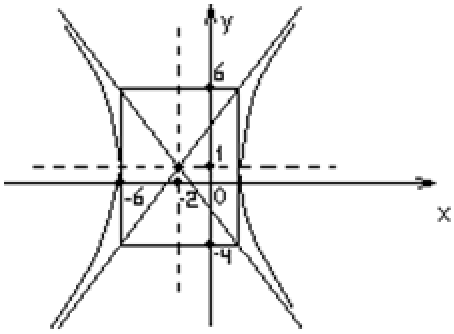


Рис. 78. Пример: параллельно смещенная гипербола

X_0, Y_0 – координаты начальной точки канонической системы координат в исходной параллельно смещенной системе координат $XO'Y$.

Пример. Построить линию

$$25x^2 - 16y^2 + 100x + 32y - 316 = 0.$$

Решение: Преобразуем заданное уравнение и приведем его к почти канонической форме:

$$25\left(x^2 + 4x\right) - 16\left(y^2 - 2y\right) - 316 = 0;$$

$$25\left(x^2 + 4x + 4\right) - 100 - 16\left(y^2 - 2y + 1\right) + 16 - 316 = 0;$$

$$25\left(x+2\right)^2 - 16\left(y-1\right)^2 = 400; \quad \frac{\left(x+2\right)^2}{16} - \frac{\left(y-1\right)^2}{25} = 1.$$

Это – почти каноническое уравнение гиперболы с центром в точке (–2; 1), полуосями 4 и 5 и ветвями, направленными вправо и влево (рис. 78).

4.7⁰. Алгебраические поверхности второго порядка

Поверхностью будем называть множество всех таких точек трехмерного пространства, которые в прямоугольной системе координат удовлетворяют уравнению $F\left(x, y, z\right) = 0$. Если это уравнение является алгебраическим уравнением второй степени и этому уравнению соответствует какая-либо поверхность, то она называется *алгебраической поверхностью* второго порядка.

В общем случае в прямоугольной системе координат уравнение алгебраической поверхности второго порядка записывается в виде

$$A_1\overline{x}^2 + A_2\overline{y}^2 + A_3\overline{z}^2 + B_1\overline{xy} + B_2\overline{xz} + B_3\overline{yz} +$$
$$+C_1\overline{x} + C_2\overline{y} + C_3\overline{z} + D = 0,$$

где A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3 – некоторые действительные числа, не все равные нулю.

С помощью преобразования поворота

$$\overline{x} = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$
$$\overline{y} = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

соответствующим подбором угла α можно добиться того, что в новой системе координат уравнение данной поверхности не будет содержать произведения $x'y'$. Затем, с помощью преобразования

$$y' = y''\cos\beta - z''\sin\beta$$
$$z' = y''\sin\beta + z''\cos\beta$$

подбором угла β можно добиться того, что в новой системе координат уравнение данной поверхности не будет содержать произведения $y''z''$.

И, наконец, с помощью преобразования

$$z'' = z\cos\gamma - x\sin\gamma$$
$$x'' = z\sin\gamma + x\cos\gamma$$

подбором угла γ можно добиться того, что в новой системе координат уравнение данной поверхности не будет содержать произведения xy и уравнение поверхности примет вид $a_1x^2 + {}$ $+a_2y^2 + a_3z^2 + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0$, где $a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3,, d$ – некоторые действительные числа.

Определение: Уравнение вида $a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + c_1x + c_2y + c_3z + d = 0$ будем называть *параллельно смещенным* уравнением второго порядка.

Поверхности второго порядка изучаются и строятся методом сечений. Сечения в координатных плоскостях и плоскостях, параллельных координатным, являются кривыми второго порядка. Рассмотрим поверхности второго порядка в канонических осях.

4.7.1⁰. Эллипсоиды

Эллипсоид – поверхность второго порядка, которая в канонической системе координат задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В координатной плоскости xOy сечение эллипсоида – эллипс с полуосями a и b.

В координатной плоскости xOz сечение эллипсоида – эллипс с полуосями a и c.

В координатной плоскости yOz сечение эллипсоида – эллипс с полуосями b и c.

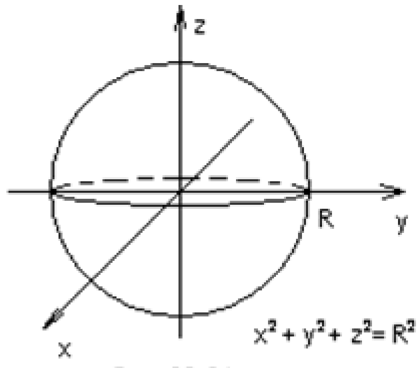


Рис. 8

При $a=b\neq c$ или $a=c\neq b$ или $b=c\neq a$ получим эллипсоид вращения, у которого одно из сечений в соответствующей координатной плоскости является окружностью.

При $a=b=c$ получим каноническое уравнение сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис. 88).

4.7.2⁰. Гиперболоиды

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, называется однополостным гиперболоидом (рис. 89).

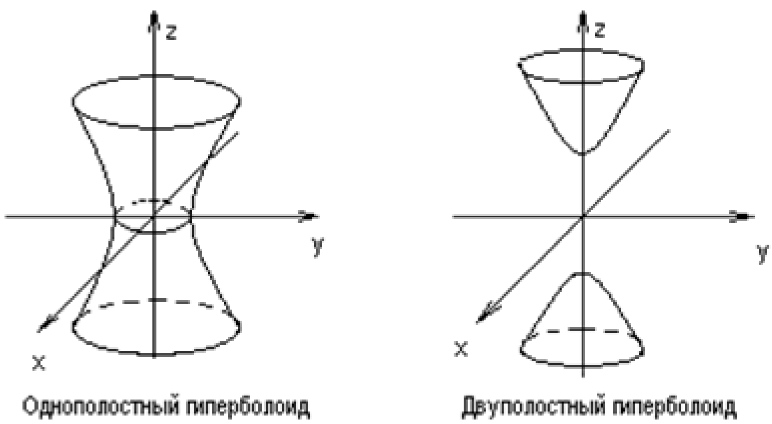


Рис. 89. Гиперболоиды

В координатной плоскости xOy и параллельных ей плоскостях сечения однополостного гиперболоида – эллипсы или окружности.

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, называется двуполостным гиперболоидом (рис. 89).

При $a=b$ получаем гиперболоид вращения.

4.7.3⁰. Параболоиды

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z$, при $p>0,\, q>0$ называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 90) при $p\neq q$ и *параболоидом вращения* при $p=q$.

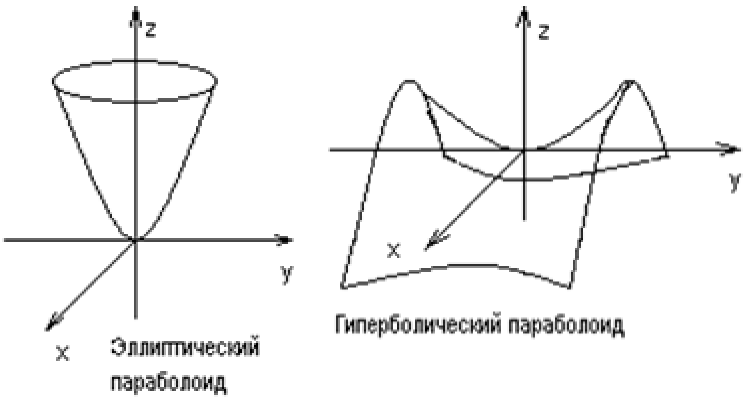


Рис. 90. Параболоиды

Поверхность, определяемая уравнением $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$, при $p>0,\, q>0$ называется *гиперболическим параболоидом* (рис. 90). Сечения в координатных плоскостях yOz и xOz и параллельных им плоскостях – параболы.

В сечениях, параллельных плоскости xOy – гиперболы. При $z=0$ – пара пересекающихся прямых.

4.7.4⁰. Цилиндры второго порядка

Поверхность второго порядка, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, при $a\neq b$ называется *эллиптическим цилиндром* (рис. 91), а при $a=b$ – *круговым цилиндром*.

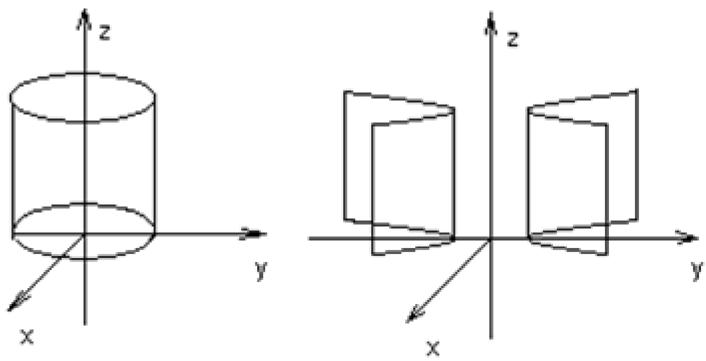


Рис. 91. Эллиптический и гиперболический цилиндры

Линии, параллельные оси Oz, называются *направляющими* цилиндрической поверхности.

Поверхность второго порядка, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, называется *гиперболическим цилиндром* (рис. 91).

Поверхность второго порядка, определяемая уравнением $y^2 = 2px$, называется *параболическим цилиндром* (рис. 92).

4.7.5⁰. Конусы второго порядка

Поверхность второго порядка, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, называется *конусом* (рис. 92). При $a = b$ получим круговой конус.

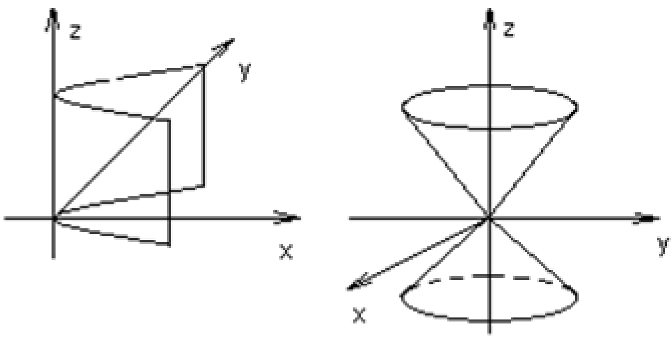


Рис. 92. Параболический цилиндр и конус

4.7.6⁰. Приведение уравнений поверхностей второго порядка в параллельно смещенных осях к каноническому виду

Уравнения поверхностей второго порядка в параллельно смещенных осях приводятся к каноническому виду по общей методике, являющейся аналогом аналогичной методики для кривых второго порядка.

Пример 1. Построить поверхность $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$.

Решение:

$4x^2 + 32x - y^2 - (z^2 + 12z) + 44 = 0;$

$4(x^2 + 8x) - y^2 - (z^2 + 12z) + 44 = 0;$

$4(x^2 + 8x + 16 - 16) - y^2 - (z^2 + 12z + 36 - 36) + 44 = 0;$

$4(x^2 + 8x + 16) - 64 - y^2 - (z^2 + 12z + 36) + 36 + 44 = 0;$

$4(x + 4)^2 - y^2 - (z + 6)^2 = -16;$

$$-\frac{(x+4)^2}{4} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z+6)^2}{16} = 1.$$

Получено уравнение однополостного гиперболоида с центром в точке O (–4; 0; –6), осью симметрии, параллельной координатной оси OX и полуосями $a = 2, b = c = 4$ (рис. 93).

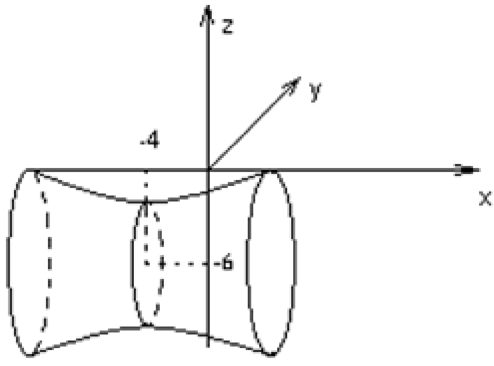


Рис. 93. Пр
гипербол

П р и м е р 2. Уравнения $3x^2 + + 2y^2 - 6x + 8y - 6z + 11 = 0$ и $3y^2 + + 4z^2 + 18y - 16z - 12x + 31 = 0$ после выделения полных квадратов

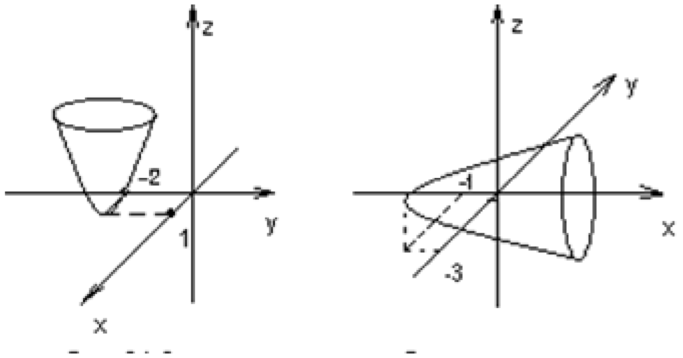


Рис. 94. Эллиптические параболоиды

принимают вид $z = \frac{(x-1)^2}{2} + + \frac{(y+2)^2}{3}$ и $x + 1 = \frac{(y+3)^2}{4} + + \frac{(z-2)^2}{3}$ следовательно, задают эллиптические параболоиды (рис. 94).

П р и м е р 3. Уравнение $x^2 + + 4x + 2y + 6 = 0$ может быть приведено к виду $(x + 2)^2 = -2(y + 1)$. Если это уравнение рассматривать как уравнение линии на плоскости XOY, то оно задает параболу, значит, рассматриваемое как уравнение поверхности, оно задает параболический цилиндр (рис. 95).

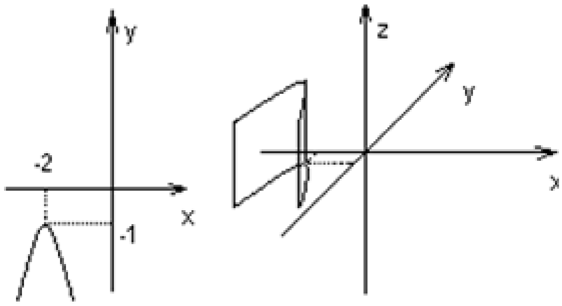


Рис. 95. Построе
параболического ци