Методические указания к контрольной работе №2

Тема: «Интегральное исчисление. Обыкновенные дифференциальные уравнения»

1. Найти неопределенные интегралы.

а) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx$; б) $\int \frac{dx}{6x^2-3x+2}$; в) $\int (x-7)\sin 5x\,dx$.

Решение:

$$\text{а).} \int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \left| \begin{aligned} &u=\ln(x+2) \\ &du=\frac{dx}{x+2} \end{aligned} \right| = \int u^{3/7}\,du = \frac{7}{10}u^{10/7}+C = \frac{7}{10}\sqrt[7]{\left(\ln(x+2)\right)^{10}}+C;$$

$$\text{б) } \int \frac{dx}{6x^2-3x+2} = \left| \begin{aligned} &6x^2-3x+2 = 6\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{48}\right] \\ &u=x-\frac{1}{4};\;\; du=dx;\quad a=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{48}}. \end{aligned} \right| =$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{du}{u^2+\frac{13}{48}} = \frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{48}}}\text{arctg}\frac{u}{\sqrt{\frac{13}{48}}} = \frac{1}{6}\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\text{arctg}\frac{4\sqrt{3}(x-1/4)}{\sqrt{13}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\text{arctg}\frac{\sqrt{3}(4x-1)}{\sqrt{13}}+C;$$

$$\text{в) } \int (x-7)\sin 5x\,dx = \left| \begin{matrix} u=x-7 & du=dx \\ dv=\sin 5x\,dx & v=-\frac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| =$$

$$=-\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x+\int \cos 5x\,dx = -\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C.$$

Ответ: а) $\frac{7}{10}\sqrt[7]{\left(\ln(x+2)\right)^{10}}+C$; б) $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\text{arctg}\frac{\sqrt{3}(4x-1)}{\sqrt{13}}+C$;

в) $-\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x+\frac{1}{25}\sin 5x+C$.

2.1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-6x+5$ и прямой $y=x-1$. Сделать чертеж.

Решение:

Построим параболу и прямую.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Вершина параболы является точкой экстремума, поэтому для ее отыскания найдем производную и приравняем ее к нулю: $y'=\left(x^2-6x+5\right)'=2x-6$; $2x-6=0$; $x=3$.

Тогда $y(3)=3^2-6\cdot 3+5=9-18+5=-4$.

Итак, вершина параболы в точке $(3;-4)$.

Точки пересечения параболы с осью ОХ: $y=0$, тогда $x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=5$, то есть точки $(1;0)$и $(5;0)$.

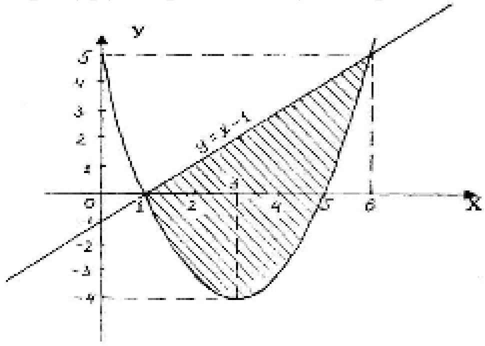
Точка пересечения с осью ОН: $x=0$, тогда $y=5$; то есть точка $(0;5)$.

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх.

Прямую $y = x - 1$ строим по двум точкам:

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой.



Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 6.$$

Для отыскания искомой площади воспользуемся формулой: $S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right] \cdot dx$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) > f_1(x)$ при $x \in [a; b]$.

В нашей задаче $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ а $f_2(x) = x - 1$; $x \in [1; 6]$, поэтому

$$S = \int\limits_1^6 \left[(x-1) - \left(x^2 - 6x + 5\right)\right] \cdot dx = \int\limits_1^6 \left(-x^2 + 7x - 6\right) \cdot dx =$$

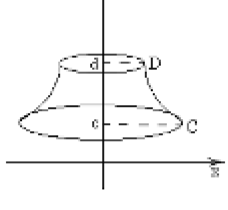
$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x\right]\Bigg|_1^6 = \left(-\frac{216}{3} + 7 \cdot \frac{36}{2} - 36\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6\right) = \frac{125}{6}.$$

Ответ: $\frac{125}{6}$.

2.2. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, лежащей в плоскости *xOy* и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, x=0;

Решение:

Для вычисления объёма воспользуемся соответствующей формулой. (Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *CcdD,* ограниченной дугой *CD* кривой $y = \varphi(y)$ $(\varphi(y) \geq 0)$ и прямыми $y=c$ и $y=d$, вычисляется по формуле: $V_y = \pi \int\limits_c^d x^2 dy = \pi \int\limits_c^d \varphi^2 dy$)



$$V_y = \pi \int\limits_c^d x^2 dy = \pi \int\limits_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 dy = 2\pi \int\limits_0^2 (4 - y^2)^2 dy = 2\pi \int\limits_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy =$$

$$= 2\pi \left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512\pi}{15} \approx 107,23.$$

Ответ: 107,23.

2.3. Вычислить длину графика функции $y = x\sqrt{x}$ на промежутке $x \in [0;4]$.

Решение:

$$y' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}\sqrt{x}\ ;\ L_{AB} = \int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right).$$

Ответ: $L = \frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

3. Найти решение дифференциального уравнения.

а) $\dfrac{\operatorname{tg} y\, dx}{\cos^2 x} + \dfrac{\operatorname{tg} x\, dy}{\cos^2 y} = 0$.

Решение:

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{dx}{\cos^2 x\cdot \operatorname{tg} x} + \frac{dy}{\cos^2 y\cdot \operatorname{tg} y} = 0,$$

$\ln|\operatorname{tg} x| + \ln|\operatorname{tg} y| = \ln C$.

Общий интеграл исходного уравнения:

$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = C$.

б) $y''(x+2)^5 = 1$, $y(-1) = \frac{1}{2}$, $y(-1) = -\frac{1}{4}$.

Решение:

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к первому типу.

$$y' = \int \frac{dx}{(x+2)^5} = -\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1;$$

$$y = \int\left(-\frac{1}{4(x+2)^4} + C_1\right)dx = \frac{1}{12(x+2)^3} + C_1 x + C_2$$ – общее решение исходного уравнения.

Воспользовавшись начальными условиями, определим значения C_1 и C_2:

$y(-1) = \frac{1}{12} - C_1 + C_2 = \frac{1}{12}$; $C_1 - C_2 = 0$;

$y'(-1) = -\frac{1}{4} + C_1 = -\frac{1}{4}$;

$C_1 = 0$; $C_2 = 0$.

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$$y = \frac{1}{12(x+2)^3}.$$

в) $y'' - 4y' = (1-x)e^{4x}$.

Решение:

Характеристическое уравнение $k^2 - 4k = 0$ имеет корни $k_1 = 0$; $k_2 = 4$ тогда $\tilde{y} = C_1 + C_2 e^{4x}$.

Частное решение y^* будем искать в виде $y^* = (Ax+B)e^{4x}\cdot x^1$.

Найдя $(y^*)'$, $(y^*)''$ и подставив в исходное уравнение получим: $8Ax + 4B + 2A = 1 - x$.

Откуда $A = -1/8$; $B = 5/16$, тогда частное решение имеет вид: $y^* = \frac{1}{16}e^{4x}(5x - 2x^2)$.

Общее решение: $y=\widetilde{y}+y^{*}=C_1+C_2e^{4x}+\dfrac{1}{16}e^{4x}(5x-2x^2)$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=C$;   б) $y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$;   в) $y=C_1+C_2e^{4x}+\dfrac{1}{16}e^{4x}(5x-2x^2)$.

Тема: «Теория вероятностей и основы математической статистики»

4. При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5% дальтоников, а среди женщин – 0,25%. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

Решение:

Пусть событие A состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: B_1 – выбранное лицо является мужчиной; B_2 – выбранное лицо является женщиной.

Из условия задачи: $P(B_1)=P(B_2)=0{,}5$; $P_{B_1}(A)=0{,}05$; $P_{B_2}(A)=0{,}0025$.

а) по формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом: $P(A)=\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\cdot P_{B_k}(A)=0{,}5\cdot 0{,}05+0{,}5\cdot 0{,}0025=0{,}2625$;

б) условная вероятность произошедшего события A при осуществлении гипотезы B_1 определяется по формуле Байеса $P_A(B_1)=\dfrac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{\sum\limits_{k=1}^{n}B_k\cdot P_{B_k}(A)}=\dfrac{0{,}5\cdot 0{,}05}{0{,}02625}\approx 0{,}952388$.

Ответ: а) 0,2625; б) 0,952388.

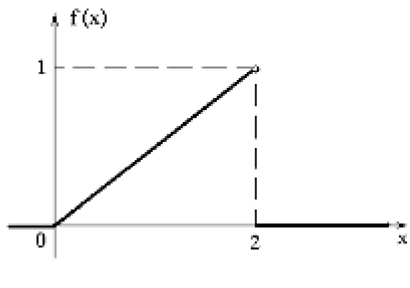
5. Дана функция распределения СВ X: $F(x)=\begin{cases}0; & x\le 0;\\ \dfrac{x^2}{4}; & 0<x\le 2;\\ 1; & x>2.\end{cases}$

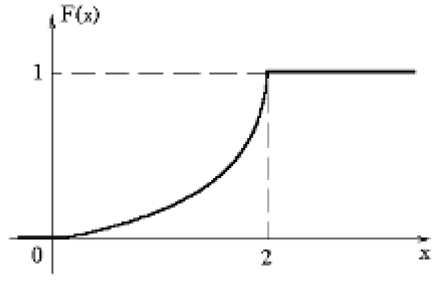
Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания СВ X на отрезок [0,5;1,5]. Построить графики обеих функций.

Решение:

Из определения плотности распределения вероятностей и так как $0\le X\le 2$ найдем плотность распределения вероятностей: $f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}; & 0<x\le 2;\\ 0; & x>2.\end{cases}$

Построим графики обеих функций:





Найдем числовые характеристики данной СВ

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} x^2dx=\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\bigg|_0^2=\frac{4}{3};$$

$$D(X)=\int\limits_{0}^{2} x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\frac{2}{9}.$$

Найдем вероятность попадания СВ на отрезок [0,5;1,5]

$$P(0{,}5\le X\le 1{,}5)=F(1{,}5)-F(0{,}5)=\frac{(1{,}5)^2}{4}-\frac{(0{,}5)^2}{4}=0{,}5.$$

Ответ: $f(x)=\begin{cases}0; & x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}; & 0<x\le 2;\\ 0; & x>2.\end{cases}$ $M(X)=\dfrac{4}{3}$; $D(X)=\dfrac{2}{9}$; $P(0{,}5\le X\le 1{,}5)=0{,}5$.

6. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью 0,975, зная выборочную среднюю $\overline{x}=16{,}8$, объем выборки n = 12 и среднее квадратическое отклонение $\sigma=1{,}5$.

Решение:

Доверительный интервал ищем в виде $\overline{x}-\dfrac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}<a<\overline{x}+\dfrac{t_\gamma\sigma}{\sqrt{n}}$.

Параметр $t_\gamma=t_\gamma(12-1;0{,}975)$ найдем по таблице распределения Стьюдента $t_\gamma=t_\gamma(\nu;\gamma)=t_\gamma(n-1;\gamma)$. $t_\gamma=2{,}20$.

Тогда $6{,}8-\dfrac{2{,}2\cdot 1{,}5}{\sqrt{12}}<a<6{,}8+\dfrac{2{,}2\cdot 1{,}5}{\sqrt{12}}$, т. е. $5{,}85<a<17{,}75$.

Ответ: $5{,}85<a<17{,}75$.