Методические указания к контрольной работе №1

Тема: «Линейная алгебра. Аналитическая геометрия»

1. Даны векторы $\vec{a}=\{1;2;0\}$, $\vec{b}=\{3;-1;4\}$, $\vec{c}=\{-2;0;1\}$, $\vec{d}=\{1;3;2\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по формулам Крамера.

Решение:

Для того чтобы векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образовывали базис, необходимо показать, что векторы некомпланарны, т.е. их смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ отлично от нуля. Вычислим смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ с помощью определителя третьего порядка:

$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-23\neq 0$, т.е. векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис в пространстве R_3. Следовательно, любой вектор $\vec{d}$ этого пространства единственным образом можно представить в виде $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, где (x,y,z) – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

От векторного равенства перейдем к равенствам над соответствующими компонентами:

$$\begin{cases} d_1=a_1x+b_1y+c_1z \\ d_2=a_2x+b_2y+c_2z \\ d_3=a_3x+b_3y+c_3z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1=1\cdot x+3\cdot y-2\cdot z \\ 3=2\cdot x-1\cdot y+0\cdot z \\ 2=0\cdot x+4\cdot y+1\cdot z. \end{cases}$$

Получили систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными $x,y,z-$ координаты вектора $\vec{d}$ в новом базисе. Решаем полученную систему методом Крамера.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-23\neq 0$$

$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$, $z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta_x,\Delta_y,\Delta_z$ – определители третьего порядка, составленные из определителя системы Δ заменой коэффициентов, стоящих в системе перед x,y,z, свободными членами соответственно:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-38,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-7,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-18.$$

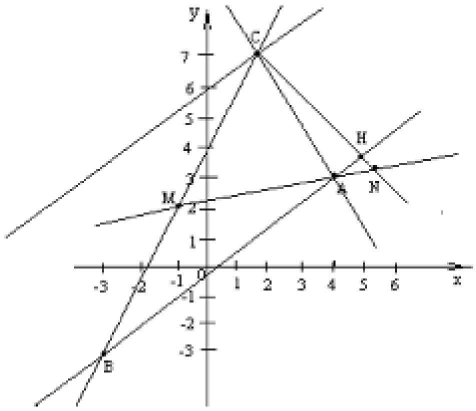
Тогда по формулам Крамера: $x=\frac{-38}{-23}=\frac{38}{23}, \quad y=\frac{-7}{-23}=\frac{7}{23}, \quad z=\frac{-18}{-23}=\frac{18}{23}$.

Ответ: $\overline{d}=\frac{38}{23}\vec{a}+\frac{7}{23}\vec{b}+\frac{18}{23}\vec{c}$.

2. Даны вершины треугольника *ABC:* $A(4;3)$, $B(-3;3)$, $C(2;7)$. Найти:
а) уравнение стороны *AB*;
б) уравнение высоты *CH*;
в) уравнение медианы *AM*;
г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение:

Сделаем чертеж.



а) Прямая проходит через две точки $A(4;3)$ и $B(-3;3)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, получим уравнение стороны *AB*: $\frac{x-4}{-3-4}=\frac{y-3}{-3-3}$, откуда $6(x-4)=7(y-3)$ или $6x-7y-3=0$;

б) Угловой коэффициент прямой *AB:* $k_{AB}=\frac{6}{7}$. С учётом условия перпендикулярности прямых *AB* и *CH* угловой коэффициент высоты *CH*: $k_{CH}=-\frac{7}{6}$.

Составим уравнение высоты *CH*, проходящей через точку $C(2;7)$ с угловым коэффициентом $-\frac{7}{6}$, воспользуемся формулой $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$: $y-7=-\frac{7}{6}\left(x-2\right)$ или $7x+6y-56=0$;

в) Найдём координаты точки *M* – середины отрезка *BC*:
$x=\frac{-3+2}{2}=-\frac{1}{2}$; $y=\frac{-3+7}{2}=2$, т.е $M\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

Теперь по двум известным точкам *A* и *M* составляем уравнение медианы *AM*:

$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0;$$

г) Для нахождения координат точки *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH* составляем систему уравнений: $\begin{cases}7x+6y-56=0;\\2x-9y+19=0.\end{cases}$

Решая систему, получаем $x=\dfrac{26}{5}$, $y=\dfrac{49}{5}$, т.е. $N\left(\dfrac{26}{5};\dfrac{49}{5}\right)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину $C(2;7)$, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны $k_{CD}=k_{AB}=\dfrac{6}{7}$. Тогда используя формулу $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, уравнение прямой CD имеет вид: $y-7=\dfrac{6}{7}\left(x-2\right)$ или $6x-7y+37=0$;

е) расстояние от точки $C(2;7)$ до прямой AB, заданной уравнением $6x-7y-3=0$, вычисляем по формуле $d=\left|\dfrac{A\,x_0+B\,y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$: $d=|CH|=\dfrac{6\cdot 2-7\cdot 7-3}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\dfrac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4$ ед. дл.

Ответ: а) $6x-7y-3=0$; б) $7x+6y-56=0$; в) $2x-9y+19=0$;
г) $N\left(\dfrac{26}{5};\dfrac{49}{5}\right)$; д) $6x-7y+37=0$; е) d=4,4 ед. дл.

3. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A_0(4,3)$ и прямой $y=1$. Сделать чертеж.

Решение:

Пусть $M(x;y)$ – любая точка искомой линии, N – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y=1$. Тогда точка N имеет координаты $N(x;1)$. Расстояние от точки M до прямой $y=1$ есть расстояние между точками M и N: $d_1=\sqrt{(x-x)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y-1)^2}=\left|y-1\right|$.

Теперь определим расстояние между точками M и A_0: $d_2=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$.

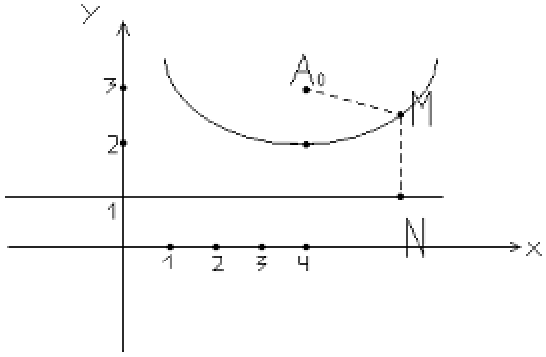
По условию задачи $d_1=d_2$. Следовательно, для любой точки $M(x;y)$ справедливо равенство: $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y-1)^2}$;

$(x-4)^2+(y-3)^2=y^2-2y+1$;

$y=\dfrac{1}{4}(x-4)^2+2$.

Полученное уравнение является уравнением параболы с вершиной в точке $O'\left(4;2\right)$. Действительно, сделаем замену $x'=x-4,\ y'=y-2$.

Тогда уравнение примет вид: $y'=\dfrac{1}{4}\left(x'\right)^2$ – каноническое уравнение параболы.



Ответ: $y=\dfrac{1}{4}(x-4)^2+2$.

Тема: «Введение в математический анализ.
Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

4. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin 3x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x-7}\right)^x$.

Решение:

а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+16}{x-4}=\dfrac{18}{-2}=-9$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{1+2x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+1}{2}=1$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x}}=\dfrac{1}{2}$ или степень числителя равна 2, степень знаменателя также равна двум, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при старших неизвестных;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x\cdot\mathrm{tg}2x}{3x\cdot\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot\mathrm{tg}2x}{3x\cdot 2}=\dfrac{2}{3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x-7}\right)^x=\left|\begin{matrix} f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-7};\ \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x-7}=\dfrac{3}{2} \\ g(x)=x;\ \lim\limits_{x\to\infty}x=\infty \end{matrix}\right|=\left[\left(\tfrac{3}{2}\right)^{\infty}\right]=\left|\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{bmatrix}0, & 0<a<1; \\ +\infty, & a>1.\end{bmatrix}\right|=\infty$;

Ответ: а) – 9; б) 1; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{2}{3}$; д) ∞.

5. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ для функций, заданных явно, неявно и параметрически.

а) $f(x)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)$; б) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; в) $y=\mathrm{tg}\sqrt[3]{\ln x}$;

г) $y=e^{\mathrm{ctg}^4x}$; д) $y\cdot\ln x-x\cdot\ln y=1$; е) $x=3\cos 2t,\ y=\sin t$.

Решение:

а) $f'(x)=\left(x^3-1\right)'\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)'=3x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)\left(2x+1\right)$;

б) $y'=\dfrac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=$

$=\dfrac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\dfrac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}$;

в) $y'=\dfrac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\left[\sqrt[3]{\ln x}\right]'=\dfrac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{3}(\ln x)^{-2/3}\cdot[\ln x]'=\dfrac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\dfrac{1}{3}(\ln x)^{-2/3}\cdot\dfrac{1}{x}=$

$=\dfrac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}\cdot\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}$;

г) $y'=e^{\mathrm{ctg}^4x}\cdot\left[\mathrm{ctg}^4x\right]'=e^{\mathrm{ctg}^4x}\cdot 4\,\mathrm{ctg}^3x\cdot[\mathrm{ctg}\,x]'=e^{\mathrm{ctg}^4x}\cdot 4\,\mathrm{ctg}^3x\cdot\dfrac{-1}{\sin^2 x}=\dfrac{-4\cdot e^{\mathrm{ctg}^4x}\cdot\mathrm{ctg}^3x}{\sin^2 x}$;

д) $y\cdot\ln x - x\cdot\ln y = 1$. Это уравнение определяет y как неявную функцию x. Дифференцируем по x:

$y'_x\cdot\ln x + y\cdot\frac{1}{x} - \left(x'_x\cdot\ln y + x\cdot\frac{1}{y}\cdot y'_x\right) = 0$. Так как $x'_x = 1$, то

$y'_x\ln x + \frac{y}{x} - \ln y - \frac{x}{y}y'_x - = 0$, откуда

$y'_x\cdot\left(\ln x - \frac{x}{y}\right) = \ln y - \frac{y}{x}$, т.е. $y'_x = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$;

е) $x = 3\cos 2t,\ y = \sin t$.

Для нахождения первой производной функции y=$y(x)$, заданной параметрически воспользуемся формулой: $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

$y'_x = \frac{\cos t}{-6\sin 2t} = -\frac{\cos t}{12\cos t\sin t} = -\frac{1}{12\sin t}$.

Ответ: а) $3x^2\left(x^2 + x + 1\right) + \left(x^3 - 1\right)\left(2x + 1\right)$; б) $\frac{-4x}{\left(x^2 - 1\right)^2}$;

в) $\frac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}\cdot\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}$; г) $\frac{-4\cdot e^{\mathrm{ctg}^4 x}\cdot\mathrm{ctg}^3 x}{\sin^2 x}$;

д) $y'_x = \frac{\ln y - \frac{y}{x}}{\ln x - \frac{x}{y}}$; е) $y'_x = -\frac{1}{12\sin t}$.

6. Найти частные производные второго порядка функции $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$.

Решение:

Найдем первые частные производные данной функции:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=C} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{xy - x^2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=C} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2 - xy}}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, находим вторые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx - x^2\right)^3}}\cdot\left(y - 2x\right) = \frac{y - 2x}{4\sqrt{\left(yx - x^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx - x^2\right)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{x(y - x)^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x}+\dfrac{y}{2\sqrt{y-x}}}{y^2(y-x)}\right)=-\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{2y}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x}=\frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}.$$

Как видно, смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ равны.

Ответ: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}}\cdot\left(y-2x\right)$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}.$$