Контрольная работа №1

Тема: «Линейная алгебра. Аналитическая геометрия»

1–10. Даны векторы $\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$, $\vec{c}=\{c_1,c_2,c_3\}$, $\vec{d}=\{d_1,d_2,d_3\}$ в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ образуют базис, а также найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе. Систему линейных уравнений решить по формулам Крамера.

1. $\vec{a}=\{1;2;3\},\vec{b}=\{-1;3;2\},\vec{c}=\{7;-3;5\},\vec{d}=\{6;10;17\}$.

2. $\vec{a}=\{4;7;8\},\vec{b}=\{9;1;3\},\vec{c}=\{2;-4;1\},\vec{d}=\{1;-13;-13\}$.

3. $\vec{a}=\{8;2;3\},\vec{b}=\{4;6;10\},\vec{c}=\{3;-2;1\},\vec{d}=\{7;4;11\}$.

4. $\vec{a}=\{10;3;1\},\vec{b}=\{1;4;2\},\vec{c}=\{3;9;2\},\vec{d}=\{19;30;7\}$.

5. $\vec{a}=\{2;4;1\},\vec{b}=\{1;3;6\},\vec{c}=\{5;3;1\},\vec{d}=\{24;20$.

6. $\vec{a}=\{1;7;3\},\vec{b}=\{3;4;2;\},\vec{c}=\{4;8;5\},\vec{d}=\{7;32;14\}$.

7. $\vec{a}=\{1;-2;3\},\vec{b}=\{4;7;2\},\vec{c}=\{6;4;2\},\vec{d}=\{14;18;6\}$.

8. $\vec{a}=\{1;4;3\},\vec{b}=\{6;8;5\},\vec{c}=\{3;1;4\},\vec{d}=\{21;18;33\}$.

9. $\vec{a}=\{2;7;3\},\vec{b}=\{3;1;8\},\vec{c}=\{2;-7;4\},\vec{d}=\{16;14;27\}$.

10. $\vec{a}=\{7;2;1\},\vec{b}=\{4;3;5\},\vec{c}=\{3;4;-2\},\vec{d}=\{2;-5;-13\}$.

11–20. Даны вершины $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$ треугольника. Найти: а) уравнение стороны *AB*; б) уравнение высоты *CH*; в) уравнение медианы *AM*; г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*; д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*; е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*. Сделать чертеж.

11. *A*(5; 1), *B*(1; –2), *C*(–4; 10).
12. *A*(14; 10), *B*(–2; –2), *C*(5; 22).
13. *A*(–13; 3), *B*(–1; –2), *C*(2; 2).
14. *A*(22; –6), *B*(–2; 1), *C*(–6; –2).
15. *A*(22; 4), *B*(–2; –3), *C*(–6; 0).
16. *A*(6; 0), *B*(2; –3), *C*(–3; 9).
17. *A*(15; 9), *B*(–l; –3), *C*(6; 21).
18. *A*(–8; 3), *B*(4; –2), *C*(7; 2).
19. *A*(20; –2), *B*(–4; 5), *C*(–8; 2).
20. *A*(23; 5), *B*(–1; –2), *C*(–5; 1).

21–30. Решить задачу.

21. Составить уравнение линии, каждая точка которой удалена от точки $A(7; 2)$ вдвое дальше, чем от точки $B(-1; 3)$. Сделать чертеж.

22. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек $A(6; 3)$ и $B(-2; 4)$. Сделать чертеж.

23. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $C(1; 3)$ и от прямой $y = -1$. Сделать чертеж.

24. Составить уравнение линии, для каждой точки которой квадрат ее расстояния от точки $A(6; 2)$ больше квадрата расстояния от точки $B(-2; 3)$ на 12. Сделать чертеж.

25. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма квадратов расстояний ее до точек $A(-4; 1)$ и $B(6; 3)$ равна 102. Сделать чертеж.

26. Составить уравнение линии, каждая точка которой отстоит от точки $A(4; 3)$ втрое дальше, чем от точки $B(-3; 1)$. Сделать чертеж.

27. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек $A(2; 1)$ и $B(-5; -1)$. Сделать чертеж.

28. Составить уравнение линии, для каждой точки которой квадрат ее расстояния до точки $A(5; 4)$ больше квадрата расстояния, до точки $B(-2; 2)$ на 10. Сделать чертеж.

29. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $C(1; 1)$ и от прямой $x = 3$. Сделать чертеж.

30. Составить уравнение линии, для каждой точки которой сумма квадратов ее расстояний до точек $A(-3; 3)$ и $B(7; 5)$ равна 124. Сделать чертеж.

Тема: «Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

31–40. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

31. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x^2+3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^2-3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x}$.

32. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10x^2-x+1}{5x^2+6x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-\sqrt{9-x}}{x^2+6x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{6x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{2x+1}$.

33. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^2+3x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2+8x+15}{x^2+3x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{10x^2}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4}{x}\left[\ln(2+x)-\ln 2\right]$.

34. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-x-6}{x^2+7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2+x-6}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{3+x}}{x-x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\operatorname{tg}x}{\sin^2 x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-3)\left[\ln(2x+1)-\ln(2x)\right]$.

35. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+7x-2}{5x^3-3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{x^2+3x+2}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{7+x}-\sqrt{7-x}}{5x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\operatorname{tg}x}{1-\cos x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}(1+3\sin^2 x)^{\frac{4}{1-\cos 2x}}$.

36. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+x+7}{5x^2-4}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+5x+6}{x^2-3x-18}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{3x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x+1}{5x}\ln(1+3x)$.

37. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{12x^3+3x+1}{6x^3+x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x^2-7}-3}{x^2-4x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4x^2}{1-\cos 4x}$; д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x-2}{4x}\ln(1+5x)$.

38. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2}{x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$; в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x-3}{\sqrt{8+x}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8x^2}{\sin^2 5x}$; д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)^{5\operatorname{tg}x}$.

39. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x-2}{x^3+2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^2+4x-5}$; в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{4x}-x}{x^2-16}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{10x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

40. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-4x^2+3}{x^5+3x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+4x+3}{x^3+3x^2+x+3}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{10+x}-\sqrt{10-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}3x$; д) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{2x}{1-x}}$.

41–50. Найти производные $\dfrac{dy}{dx}$ для функций, заданных явно, неявно и параметрически.

41. а) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$; б) $y=\sin^3 5x\cos^5 3x$;

в) $y=\ln\left(x^2+\sqrt{x^4+1}\right)$; г) $y=e^{\arccos x}$;

д) $x^2y-y^2x+(x-y)^3=0$; е) $\begin{cases} x=\cos\dfrac{t}{2}, \\ y=t-\sin t. \end{cases}$

42. а) $y=\dfrac{1}{27x}\left(\sqrt{3x}-3^x\right)$; б) $y=\dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$;

в) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$; г) $y=e^{\operatorname{arctg}x}$;

д) $y\sin x-\cos y=0$; е) $\begin{cases} x=2\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t. \end{cases}$

43. а) $y=\dfrac{2x-1}{\sqrt{1-x}}$; б) $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

в) $y=\ln\dfrac{3+x^2}{3-x^2}$; г) $y=\arcsin^2\dfrac{x}{3}$;

д) $x^3+xy^2+y^3=2^3$; е) $\begin{cases} x=\operatorname{ctg}t, \\ y=\dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

44. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2}}$; б) $y=\dfrac{2\sin x}{1+\cos x}$;

в) $y=e^{-x}\ln x$; г) $y=3\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$;

д) $x^2-6y+y^3=0$; е) $\begin{cases} x=\cos 3t, \\ y=\sin 2t. \end{cases}$

45. а) $y=2\sqrt[3]{\left(2-x^3\right)^2}$; б) $y=x^2\sin^3 x$;

в) $y=\ln\left(x^2+5x+\sqrt{x}\right)$; г) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

д) $x^4-2xy^3+3y=0$; е) $\begin{cases} x=e^{2t}, \\ y=\cos t. \end{cases}$

46. а) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $y=2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$;

в) $y = x\ln^2 x$; г) $y = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}$;

д) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 + \frac{1}{4}y^2$; е) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$

47. а) $y = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{2 + x}$; б) $y = x\sin x^2$;

в) $y = \ln\sin(2x + 5)$; г) $y = \arcsin\sqrt{1 - x^2}$;

д) $xe^y + 1 - y = 0$; е) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right). \end{cases}$

48. а) $y = \frac{5}{\sqrt[4]{\left(x^2 + 2\right)^3}}$; б) $y = \left(e^{\sin x} - 1\right)^3$;

в) $y = \ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$; г) $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

д) $x - y + \operatorname{arctg} y = 0$ е) $\begin{cases} x = 2\cos t - 3t, \\ y = 2\sin t - 5t. \end{cases}$

49. а) $y = \frac{\sqrt{1 - 4x}}{x^2}$; б) $y = \cos 2x - 2\sin^2 x$;

в) $y = \ln(2 - \cos x)$; г) $y = \arccos\sqrt{1 - 4x}$;

д) $y\ln x - x\ln y = 1$; е) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

50. а) $y = \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}}$; б) $y = \frac{x}{\cos^2 x}$;

в) $y = \ln^4 \sin x$; г) $y = \operatorname{arctg} e^{2x}$;

д) $e^y - xy = 0$; е) $\begin{cases} x = 2t^3 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

51–60. Найти частные производные второго порядка следующих функций.

51. $z = x^2y^3 - 4x^5y + 2x - 3y$. 52. $z = \frac{3x - y}{x + 2y}$.

53. $z = x^y$. 54. $z = \ln\left(1 + \frac{x}{y}\right)$.

55. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. 56. $z = \sin x \cdot \sin y$.

57. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$.

58. $z = \sin x^{\cos y}$.

59. $z = e^{5x^2-3y^4}$.

60. $z = \operatorname{arctg}\sqrt{x^y}$.