СПЕЦИАЛЬНОСТЬ «Эксплуатация железных дорог»
НАПРАВЛЕННОСТЬ «Магистральный транспорт»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №3 (Д 2 курс, 3 семестр)

Тема «Теория вероятностей и математическая статистика»

Задача№1.

В шахматном турнире участвуют 10 гроссмейстеров, 6 международных мастеров и 4 мастера. Шахматисты для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяются путём жеребьёвки. Найти вероятность того, что за первым столиком встретятся шахматисты одной и той же категории.

Решение. Число всех равновозможных случаев определения двух соперников из 20 участников равно числу сочетаний из 20 элементов по 2, т.е. C_{20}^2. Число групп по 2 человека, которые могут быть составлены из 10 гроссмейстеров, равно C_{10}^2. Число групп, которые могут быть составлены из 6 международных мастеров, равно C_6^2. Из 4 мастеров может быть составлено C_4^2 пар. Сумма $C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2$ равна числу благоприятствующих случаев для встречи за первым столиком шахматистов одной и той же категории. Следовательно, искомая вероятность $P(A) = \frac{C_{10}^2 + C_6^2 + C_4^2}{C_{20}^2} = \frac{33}{95}$.

Ответ: $\frac{33}{95}$.

Задача№2.

В совхозную ремонтную мастерскую поступило 15 тракторов. Известно, что 6 из них нуждаются в замене двигателя, а остальные — в замене отдельных узлов. Случайным образом отбирается два трактора. Найти вероятность того, что замена двигателя необходима:

а) в двух тракторах; б) в одном тракторе; в) хотя бы в одном тракторе.

Решение. а) Обозначим через А событие, состоящее в том, что выбранный трактор требует замены двигателя. Согласно условиям задачи, вероятность того, что первым будет отобран трактор, требующий замены двигателя $\mathrm{P(A)} = \frac{6}{15} = 0{,}4$.

Вероятность того, что второй выбранный трактор также потребует замены двигателя, $P(A) = \frac{5}{14} \approx 0{,}36$.

Тогда вероятность события, состоящего в том, что первый и второй отобранные тракторы потребуют замены двигателя $P(A) = \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{14} = \frac{1}{7}$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

б) Обозначим через *B* событие, состоящее в том, что только один из двух выбранных тракторов требует замены двигателя. Это событие заключается в том, что первый трактор нуждается в замене двигателя, а второй – лишь в замене отдельных узлов либо первый трактор требует замены отдельных узлов, а второй – замены двигателя, тогда $P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{14} + \frac{9}{15} \cdot \frac{6}{14} = \frac{18}{35}$;

Ответ: $\frac{18}{35}$.

в) Обозначим через *C* событие, состоящее в том, что ни один трактор не требует замены двигателя. Вероятность того, что первый трактор не потребует замены двигателя, равна $\frac{9}{15} = \frac{3}{5}$. Вероятность того, что второй трактор также потребует замены двигателя, $\frac{8}{14} = \frac{4}{7}$. Тогда вероятность того, что оба трактора потребуют замены двигателя, $P(C) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{35}$. Вероятность того, что хотя бы для одного трактора потребуется замена двигателя $P = 1 - P(C) = 1 - \frac{12}{35} = \frac{23}{35}$.

Ответ: $\frac{23}{35}$.

Задача№3.

При обследовании двух одинаковых групп мужчин и женщин было установлено, что среди мужчин 5% дальтоников, а среди женщин — 0,25%. Найти вероятность того, что наугад выбранное лицо: а) страдает дальтонизмом; б) является мужчиной, если известно, что оно страдает дальтонизмом.

Решение. а) Пусть событие А состоит в том, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. При этом возможны следующие гипотезы: B_1 — выбранное лицо является мужчиной; B_2 — выбранное лицо является женщиной.

Из условия задачи: $P(B_1) = P(B_2) = 0{,}5$; $P_{B_1}(A) = 0{,}05$; $P_{B_2}(A) = 0{,}0025$.

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность того, что наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} B_k \cdot P_{B_k}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}0025 = 0{,}2625;$$

Ответ: 0,263

б) Условная вероятность произошедшего события А при осуществлении гипотезы B_1 определяется по формуле Байеса

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{\sum_{k=1}^{n} B_k \cdot P_{B_k}(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}05}{0{,}02625} \approx 0{,}952388.$$

Ответ: 0,952

Задача№4.

При измерении окружности груди 25 спортсменов установлено, что у троих этот объём равен 88 см, у четверых – 92 см, у пятерых – 96 см, у шестерых – 98 см и у семи – 100 см. СВ *X* – окружность груди спортсмена. Записать закон распределения СВ *X*.

Вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Найти среднюю величину окружности груди спортсмена и вероятность того, что у случайно отобранного спортсмена окружность груди будет не менее 96 см.

Найти функцию распределения СВ и построить ее график.

Решение. Вероятность обнаружения среди 25 спортсменов троих с окружностью груди, равной 88 см, $p_1=3/25=0{,}12$.

Аналогично вероятность обнаружения среди 25 спортсменов четверых с окружностью груди 92 см $p_2=4/25=0{,}16$ и т.д.

Получаем закон распределения в виде таблицы:

X	88	92	96	98	100
p	0,12	0,16	0,2	0,24	0,28

Найдём числовые характеристики данной случайной величины: математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

$$M(X) = 88\cdot 0{,}12 + 92\cdot 0{,}16 + 96\cdot 0{,}2 + 98\cdot 0{,}24 + 100\cdot 0{,}28 = 96;$$

$$M(X^2) = 88^2\cdot 0{,}12 + 92^2\cdot 0{,}16 + 96^2\cdot 0{,}2 + 98^2\cdot 0{,}24 + 100^2\cdot 0{,}28 =$$

$$= 9231{,}68;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 9231{,}68 - 96^2 = 15{,}68;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{3{,}96}.$$

Средняя величина окружности груди спортсмена равна математическому ожиданию, т.е. 96 см.

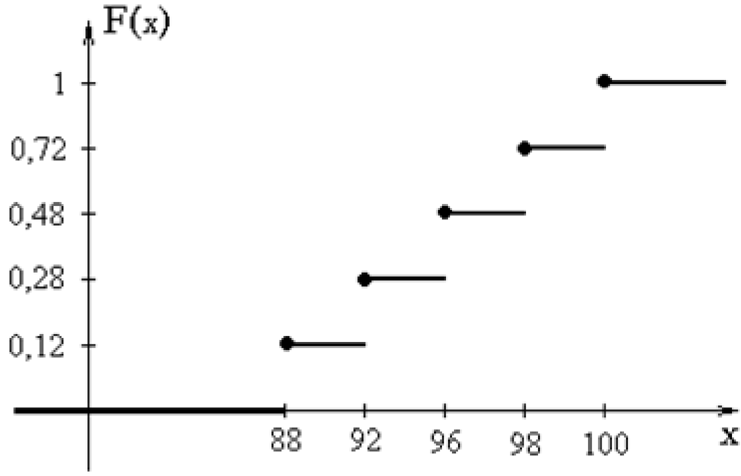
Вероятность того, что у случайно отобранного спортсмена окружность груди будет не менее 96 см найдем следующим образом:

$$P(X \geq 96) = 0{,}2 + 0{,}24 + 0{,}28 = 0{,}72.$$

Найдём функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0; & x \leq 88; \\ 0{,}12; & 88 < x \leq 92; \\ 0{,}28; & 92 < x \leq 96; \\ 0{,}48; & 96 < x \leq 98; \\ 0{,}72; & 98 < x \leq 100; \\ 1; & x > 100. \end{cases}$$

Построим её график:



Задача№ 5.

Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид $f(x)=\begin{cases} 0, & x<-\pi; \\ A\cdot\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi; \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$ Требуется:

а) найти коэффициент A;

б) найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

в) найти функцию распределения $F(x)$;

г) построить графики $F(x)$ и $f(x)$, рассматривая не менее 5 точек на интервале $[-\pi; \pi]$;

д) найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi; 0)$.

Решение. а) найти коэффициент A:

Плотность распределения должна удовлетворять третьему свойству, т.е. если все возможные значения СВ принадлежат отрезку $[x_1;x_2]$, то $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=1$, так как $f(x)$=0 вне этого отрезка. Значит:

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=1$, откуда $A=\dfrac{1}{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx}$;

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\int_{-\pi}^{\pi}dx-\int_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi+2\cos\frac{\pi}{2}-\left(-\pi+2\cos\frac{-\pi}{2}\right)=2\pi\ ;$$

Следовательно, $A=\frac{1}{2\pi}$. Таким образом, плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: A=0,159.

б) найти *M(X), D(X), σ(X)*:

$$M(X)=\int_{-\pi}^{\pi}x\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+2x\cos\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{4}{\pi}=-1,273\,;$$

$$D(X)=\int_{-\pi}^{\pi}x^2\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx-\left(1,273\right)^2=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\cos\frac{x}{2}-8x\sin\frac{x}{2}-16\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\left(1,273\right)^2=\frac{\pi^2}{3}-\left(1,273\right)^2=1,669;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,669}=1,292\,.$$

Ответ: *M(X)*= –1,273; *D(X)*=1,669; *σ(X)*=1,292.

в) найти функцию распределения *F(x)*:

При

$x<-\pi$ $\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}0\cdot dt=0\,;$

$-\pi\le x\le\pi$ $\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-\pi}f(t)dt+\int_{-\pi}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{-\pi}0\cdot dt+\int_{-\pi}^{x}\frac{1}{2\pi}\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)dt=$

$$=0+\frac{1}{2\pi}\left(t+2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{x}=\frac{1}{2\pi}\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2};$$

$x>\pi$ $\qquad F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=1.$

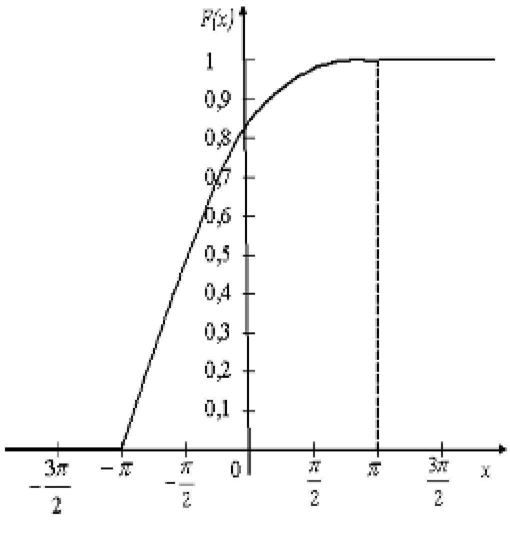
$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

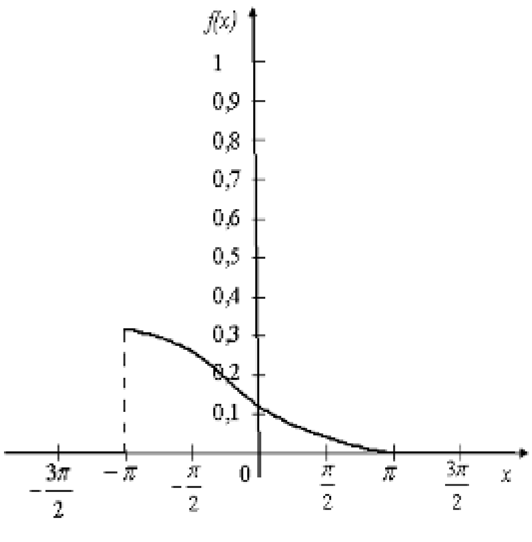
Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

г) построить графики *F(x)* и *f(x)*, рассматривая не менее 5 точек на интервале [-π; π]:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Изобразим графики *F(x)* и *f(x)* на рисунках:





д) найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (-π; 0):

1 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)$.

$P(-\pi<X<0)=F(0)-F(-\pi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+2\cos\frac{0}{2}\right)-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi-\pi+2\cos\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}$=0,818;

2 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

$$P(-\pi < X < 0) = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{1}{2\pi} \cdot \left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} = 0,818.$$

Ответ: $P(-\pi < X < 0) = 0,818$.

Задача№6.

Вероятность попадания в цель при выстреле равна 0,7. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число попаданий в цель при 120 выстрелах отклонится от своего математического ожидания не более чем на 15.

Решение. В случае биномиального распределения случайной величины

неравенство Чебышева имеет вид: $P(|X - np| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{npq}{\varepsilon^2}$, где $M(X) = np$.

$$P(|X - 84| < 15) \geq 1 - \frac{120 \cdot 0,7 \cdot 0.3}{\varepsilon^2} \geq 1 - \frac{25,2}{15^2} \geq 1 - 0,112 \geq 0,888.$$

Ответ: $P \geq 0,888$.

Задача№7.

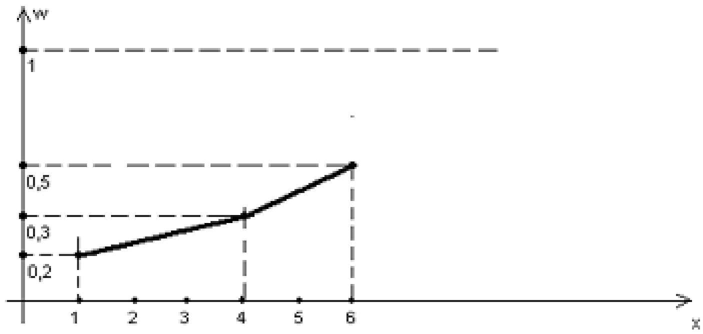
По выборке объема $n = 50$, представленную вариационным рядом, построить полигон относительных частот, найти выборочную среднюю, исправленное среднее квадратическое отклонение.

X_i	1	4	6
n	10	15	25

Решение. $n = 10 + 15 + 25 = 50$, $\omega_1 = \dfrac{10}{50} = 0,2$, $\omega_1 = \dfrac{15}{50} = 0,3$, $\omega_3 = \dfrac{25}{50} = 0,5$.

X_i	1	4	6
ω_i	0,2	0,3	0,5

Полигон относительных частот имеет вид:



Найдем выборочную среднюю:

$$\overline{x}_в = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{1+4+6}{50} = 0,22.$$

Вычислим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1}D_в = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}_в\right)^2}{n-1} = \frac{10\cdot(1-0,22)+15\cdot(4-0,22)+25\cdot(6-0,22)}{49} = \frac{209}{49} = 4,2653$$

Вычислим исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$s = \sqrt{4,2653} \approx 2,065$$

Ответ: $\overline{x}_в = 0,22$, $s \approx 2,065$.

Задача№8.

По выборке объемом n =12 найдено выборочное среднее $\overline{x} = 0,417$. Считая, что генеральная совокупность распределена по нормальному закону с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,72$ найти доверительный интервал для оценки неизвестного математического ожидания a с надежностью $\gamma = 0,95$.

Решение. При заданной точности α и заданной надежности γ доверительный интервал для нормально распределенной случайной величины X имеет вид

$\left(\overline{x}_в - u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\overline{x}_в + u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$. При $\alpha = 1-\gamma = 1-0,95 = 0,05$ по соответствующей таблице квантилей стандартного нормального распределения найдем $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

$$\overline{x}_в - u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,417 - 1,96\cdot\frac{0,72}{\sqrt{12}} = 0,417 - 0,407 = 0,01$$

$$\overline{x}_в + u_{1-\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0,417 + 1,96\cdot\frac{0,72}{\sqrt{12}} = 0,417 + 0,407 = 0,824$$

Ответ: Доверительный интервал: $a \in (0,01;0,824)$.

Задача№9.

Событие A в серии из $n = 100$ испытаний произошло $m = 78$ раз. Построить доверительный интервал для оценки неизвестной вероятности p с надежностью $\gamma = 0,90$.

Решение. Воспользуемся формулой:

$$p^* - u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{p^*\cdot(1-p^*)/n} < p < p^* + u_{1-\alpha/2}\cdot\sqrt{p^*\cdot(1-p^*)/n}.$$

В условиях примера точечная оценка вероятности p равна $p^* = 78/100 = 0,78$.

При $\alpha = 1-\gamma = 1-0,9 = 0,1$ по соответствующей таблице квантилей стандартного нормального распределения найдем $u_{1-\alpha/2} = u_{0,95} = 1,645$.

$$0,78 - 1,645\cdot\sqrt{0,78\cdot(1-0,78)/100} < p < 0,78 + 1,645\cdot\sqrt{0,78\cdot(1-0,78)/100}$$

$$0,712 < p < 0,848$$

Ответ: $p \in (0,712;0,848)$.