СПЕЦИАЛЬНОСТЬ «Эксплуатация железных дорог»
НАПРАВЛЕННОСТЬ «Магистральный транспорт»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №2
(Д, 1 курс, 2 семестр)

Тема «Интегральное исчисление», «Числовые и функциональные ряды. Дифференциальные уравнения. Комплексные числа»

Задача №1. Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1) $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx$; 2) $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}$; 3) $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx$;

4) $\int \frac{3-7x}{4x^2+5}dx$; 5) $\int \frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)}$; 6) $\int (x-7)\sin 5x\, dx$;

Решение.

1). $\int \frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx = \left| \begin{matrix} u=\ln(x+2) \\ du=\frac{dx}{x+2} \end{matrix} \right| = \int u^{3/7}du = \frac{7}{10}u^{10/7}+C = \frac{7}{10}\sqrt[7]{\left(\ln(x+2)\right)^{10}}+C$;

Проверка: $(\frac{7}{10}\sqrt[7]{(\ln(x+2))^{10}}+C)' = \frac{7}{10}\cdot\frac{10}{7}\cdot(\ln(x+2))^{\frac{10}{7}-1}\cdot\frac{1}{x+2} = \frac{\sqrt[7]{ln^3(x+2)}}{x+2}$.

Что и требовалось доказать.

2) $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}} = \left| \begin{matrix} u=\sin 3x-4 \\ du=3\cos 3x\, dx \\ \cos 3x\, dx=\frac{du}{3} \end{matrix} \right| =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^{1/5}} = \frac{1}{3}\frac{5}{4}u^{4/5}+C = \frac{5}{12}\sqrt[5]{\left(\sin 3x-4\right)^4}+C$;

Проверка:

$(\frac{5}{12}\sqrt[5]{(sin3x-4)^4}+C)' = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{5}\cdot(sin3x-4)^{\frac{4}{5}-1}\cdot 3cos3x = \frac{cos3x}{\sqrt[5]{sin3x-4}}$.

Что и требовалось доказать.

3) $\int \frac{3x+10}{6x^2-4}dx = \int \frac{3x}{6x^2-4}dx + \int \frac{10}{6x^2-4}dx =$

$$=\left|\begin{matrix} u=6x^2-4 \\ du=12x\,dx \\ 3x\,dx=\dfrac{du}{4}\end{matrix}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{10}{\sqrt{6}}\int\frac{dx}{x^2-\frac{4}{6}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{10}{\sqrt{6}}\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|6x^2-4\right|+\frac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right|+C.$$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{4}ln|6x^2-4|+\frac{5}{2\sqrt{6}}ln\left|\frac{\sqrt{6}x-2}{\sqrt{6}x+2}\right|+C\right)'$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{12x}{6x^2-4}+\frac{5}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}x+2}{\sqrt{6}x-2}\cdot\frac{\sqrt{6}(\sqrt{6}x+2)-\sqrt{6}(\sqrt{6}x-2)}{(\sqrt{6}x+2)^2}$$

$$=\frac{3x}{6x^2-4}+\frac{5}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}x+2}{\sqrt{6}x-2}\cdot\frac{4\sqrt{6}}{(\sqrt{6}x+2)^2}$$

$$=\frac{3x}{(\sqrt{6}x-2)(\sqrt{6}x+2)}+\frac{10}{(\sqrt{6}x-2)(\sqrt{6}x+2)}=\frac{3x+10}{6x^2-4}.$$

Что и требовалось доказать.

4) $\int\frac{3-7x}{4x^2+5}dx=\int\frac{3}{4x^2+5}dx-\int\frac{7x}{4x^2+5}dx=$

$$=\left|\begin{matrix} u=4x^2+5 \\ du=8x\,dx \\ x\,dx=\dfrac{du}{8}\end{matrix}\right|=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+\frac{5}{4}}-\frac{7}{8}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{7}{8}\ln|u|+C=\frac{3}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{7}{8}\ln\left|4x^2+5\right|+C.$$

Проверка:

$\left(\frac{3}{2\sqrt{5}}arctg\frac{2x}{\sqrt{5}}-\frac{7}{8}ln|4x^2+5|+C\right)'=\frac{3}{2\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\frac{4x^2}{5}}-\frac{7}{8}\cdot\frac{8x}{4x^2+5}=\frac{3}{5}\frac{5}{4x^2+5}-\frac{7x}{4x^2+5}=\frac{3-7x}{4x^2+5}.$

Что и требовалось доказать.

5) $\int \frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)} = \left| \begin{array}{l} u = 2 - e^{-3x} \\ du = \frac{3\,dx}{e^{3x}} \\ \frac{dx}{e^{3x}} = \frac{du}{3} \end{array} \right| =$

$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln\left|2 - e^{-3x}\right| + C.$

Проверка:

$$\left(\frac{1}{3}ln|2-e^{-3x}|+C\right)' = \frac{1}{3}\cdot\frac{3e^{-3x}}{2-e^{-3x}} = \frac{1}{e^{3x}(2-e^{-3x})}.$$

Что и требовалось доказать.

6) $\int (x-7)\sin 5x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x - 7 & du = dx \\ dv = \sin 5x\,dx & v = -\frac{1}{5}\cos 5x \end{array} \right| =$

$= -\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x + \int \cos 5x\,dx = -\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C.$

Проверка:

$$\left(-\frac{x-7}{5}\cdot cos5x + \frac{1}{25}sin5x + C\right)'$$
$$= -\frac{1}{5}\cdot cos5x - \frac{x-7}{5}\cdot(-5)sin5x + \frac{1}{25}\cdot 5cos5x = (x-7)\cdot sin5x$$

Что и требовалось доказать.

Задача №2.

Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 6x + 5$ и прямой $y = x - 1$. Сделать чертеж.

Решение.

Построим параболу и прямую.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Вершина параболы является точкой экстремума, поэтому для ее отыскания найдем производную и приравняем ее к нулю: $y' = \left(x^2 - 6x + 5\right)' = 2x - 6$; $2x - 6 = 0$; $x = 3$.

Тогда $y(3) = 3^2 - 6\cdot 3 + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$.

Итак, вершина параболы в точке $(3;-4)$.

Точки пересечения параболы с осью ОХ: $y=0$, тогда $x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=5$, то есть точки $(1;0)$и $(5;0)$.

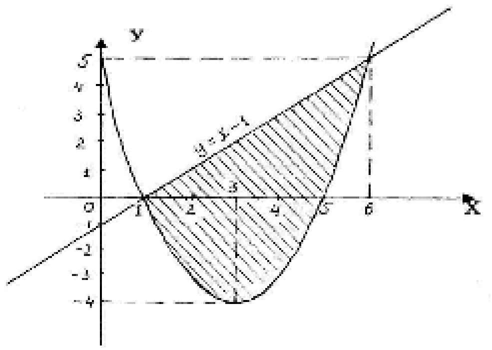
Точка пересечения с осью ОН: $x=0$, тогда $y=5$; то есть точка $(0;5)$.

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх.

Прямую $y=x-1$ строим по двум точкам:

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline y & -1 & 0 \end{array}$$

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой.



Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y=x^2-6x+5 \\ y=x-1 \end{cases} \Rightarrow x^2-6x+5=x-1 \Rightarrow x^2-7x+6=0$$

$$D=49-4\cdot 6=25; \quad x_{1,2}=\frac{7\pm 5}{2}; \quad x_1=1; \quad x_2=6.$$

Для отыскания искомой площади воспользуемся формулой: $S=\int_a^b [f_2(x)-f_1(x)]\cdot dx$,

где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x)>f_1(x)$ при $x\in[a;b]$.

В нашей задаче $f_1(x)=x^2-6x+5$ а $f_2(x)=x-1$; $x\in[1;6]$, поэтому

$$S=\int_1^6 [(x-1)-(x^2-6x+5)]\cdot dx=\int_1^6 (-x^2+7x-6)\cdot dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+7\cdot\frac{x^2}{2}-6x\right]\Bigg|_1^6=\left(-\frac{216}{3}+7\cdot\frac{36}{2}-36\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{7}{2}-6\right)=\frac{125}{6}.$$

Задача №3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость: 1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; 2) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

Решение.

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_{a}^{0}\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_{0}^{b}\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\lim\limits_{b\to+\infty}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b=$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{a+2}{\sqrt{5}}\right)+\lim\limits_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{b+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$ - интеграл сходится.

2) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int\limits_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int\limits_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\lim\limits_{b\to0-}\int\limits_{-1}^{b}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim\limits_{a\to0+}\int\limits_{a}^{1}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$

$=\lim\limits_{b\to0-}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{b}+\lim\limits_{a\to0+}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{a}^{1}$=157,43 – интеграл сходится.

Задача №4. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные).

а) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$; б) $\frac{tg\,y\,dx}{\cos^2 x}+\frac{tg\,x\,dy}{\cos^2 y}=0$;

в) $y\text{-}x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$; г) $dy-e^{-x}dx+ydx-xdy=xydx$, $y(0)=\ln 5$.

Решение.

а) $(xy^2+x)dx+(y-x^2y)dy=0$. Преобразуем данное уравнение:

$y(1-x^2)dy=-x(y^2+1)dx$.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:

$\frac{y\,dy}{y^2+1}=\frac{-x\,dx}{1-x^2}$.

Интегрируем обе части последнего равенства:

$\int\frac{y\,dy}{y^2+1}=-\int\frac{x\,dx}{1-x^2}$,

$\frac{1}{2}\ln(y^2+1)=\frac{1}{2}\ln|x^2-1|+\frac{1}{2}\ln C$,

$y^2+1=C|x^2-1|$,

$y^2=C|x^2-1|-1$.

Следовательно, общим решением исходного уравнения является $y=\pm\sqrt{C|x^2-1|-1}$

б) $\frac{tg\,y\,dx}{\cos^2 x}+\frac{tg\,x\,dy}{\cos^2 y}=0$.

Данное уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. Разделяем их и интегрируем уравнение:

$$\frac{dx}{\cos^2 x\cdot tg\,x}+\frac{dy}{\cos^2 y\cdot tg\,y}=0,$$

$\ln|\mathrm{tg}\,x| + \ln|\mathrm{tg}\,y|=\ln C$.

Общий интеграл исходного уравнения:

$\mathrm{tg}\,x\;\mathrm{tg}\,y=\mathrm{C}$.

в) $y\text{-}x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$.

Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{x+y}.$$

Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=tx$. $y'=t'x+t$. Далее находим:

$$t'x+t=\frac{t\text{-}1}{t+1},$$

$$t'x=\frac{t\text{-}1}{t+1}-t,$$

$t'x=-\frac{t^2+1}{t+1}$. Данное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:

$$\frac{t+1}{t^2+1}dt=-\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{t\,dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{t^2+1}=-\int\frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+1|+arctg\,t=-\ln x+\ln C,$$

$$arctg\,t=\ln\frac{C}{x}-\ln\sqrt{t^2+1},$$

$arctg\frac{y}{x}=\ln\frac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — общий интеграл исходного уравнения.

г) $dy-e^{-x}dx+ydx-xdy=xydx$, $y(0)=\ln 5$.

Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx}=\frac{xy+e^{-x}-y}{1-x},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(x-1)}{1-x}+\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$\frac{dy}{dx}+y=\frac{e^{-x}}{1-x}$. Полученное уравнение линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, $y'=u'v+uv'$. Имеем:

$$u'v+uv'+uv=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v+u(v'+v)=\frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

1) Найдём $v(x)$ из условия:

$$v'+v=0,$$

$$\frac{dv}{dx}=-v,$$

$\ln v=-x$,

$v=e^{-x}$.

2) Подставляем

полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*):

$$u'v=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$e^{-x}\frac{du}{dx}=\frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$du=\frac{dx}{1-x},$$

$u=-\ln|1-x|+\ln C$,

$$u=\ln\frac{C}{|1-x|}$$

Тогда $y=e^{-x}\cdot\ln\dfrac{C}{|1-x|}$ является общим решением исходного уравнения.

Для нахождения частного решения найдём C, используя начальное условие, т.е.

$\ln 5=e^{0}\cdot\ln\dfrac{C}{|1-0|}$,

$\ln 5=\ln C$.

Следовательно, C=5. Частное решение исходного уравнения имеет вид: $y=e^{-x}\cdot\ln\dfrac{5}{|1-x|}$.

Задача №5. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

а) $y''(x+2)^5=1$, $y(-1)=\dfrac{1}{2}$, $y'(-1)=-\dfrac{1}{4}$; б) $y''(e^x+1)+y'=0$;

в) $y^3y''=-1$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Решение.

а) $y''(x+2)^5=1$, $y(-1)=\dfrac{1}{2}$, $y(-1)=-\dfrac{1}{4}$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к первому типу. Выразим вторую производную и два раза проинтегрируем полученную функцию.

$y'=\int\dfrac{dx}{(x+2)^5}=-\dfrac{1}{4(x+2)^4}+C_1$;

$y=\int\left(-\dfrac{1}{4(x+2)^4}+C_1\right)dx=\dfrac{1}{12(x+2)^3}+C_1x+C_2$ — общее решение исходного уравнения.

Воспользовавшись начальными условиями, определим значения C_1 и C_2:

$y(-1)=\dfrac{1}{12}-C_1+C_2=\dfrac{1}{12}$; C_1 - C_2=0;

$y'(-1)=-\dfrac{1}{4}+C_1=-\dfrac{1}{4}$;

C_1=0; C_2=0.

Частное решение исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям, имеет вид:

$y=\dfrac{1}{12(x+2)^3}$.

б) $y''(e^x+1)+y'=0$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся ко второму типу (нет явно y). Сделаем замену $y'=p$, $y''=p'$. Тогда

$p'(e^x+1)=-p$. Данное уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{e^x+1};$$

$$\ln|p|=\ln(e^x+1)-\ln e^x+\ln C_1;$$

$$p=C_1\frac{e^x+1}{e^x}.$$

Возвращаемся к замене, т.е. $\frac{dy}{dx}=C_1\frac{e^x+1}{e^x}$. Из данного уравнения с разделяющимися переменными найдём *y*.

$$y=C_1\int\frac{e^x+1}{e^x}dx=C_1(x-e^{-x})+C_2;$$

$y=C_1x-\frac{C_1}{e^x}+C_2$ — общее решение исходного уравнения.

в) $y^3y''=-1$, $y(1)=1$, $y'(1)=0$.

Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к третьему типу (нет явно *x*). Сделаем замену $y'=p$, $y''=p\cdot p'$. Тогда

$y^3\cdot p\cdot p'=-1$. Данное уравнение с разделяющимися переменными.

$$pdp=-\frac{dy}{y^3};$$

$$\frac{p^2}{2}=\frac{1}{y^2}+C_1;$$

$$p^2=\frac{1}{y^2}+2C_1;$$

$$p=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1}.$$

Возвращаемся к замене, т.е. $y'=\pm\sqrt{\frac{1}{y^2}+2C_1}$. Из данного уравнения с разделяющимися переменными найдём *y*.

$$dx=\pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}};$$

$x = \pm \int \frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1 y^2}} + C_2$;

$x = \pm \frac{1}{2C_1} \sqrt{1+C_1 y^2} + C_2$ — общее решение исходного уравнения.

Определим значения C_1 и C_2. использовав начальные данные. При x=1, y=1 и $y' = 0$ имеем:

$1 = \pm \frac{1}{2C_1} \sqrt{1+2C_1} + C_2$,

$0 = \pm \sqrt{1+2C_1}$.

Откуда $1+2C_1=0$, $C_1 = -\frac{1}{2}$, $C_2=1$.

Следовательно, искомое решение имеет вид

$x = \pm \sqrt{1-y^2} + 1$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

Задача №6. Исследовать сходимость числовых рядов; знакочередующиеся ряды исследовать на абсолютную и условную сходимость.

$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} tg\frac{\pi}{5n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; е) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot lnn}$;

ж) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$; з) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{2^n}$.

Решение.

а) Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, который сходится, т.к. $q = \frac{1}{2} < 1$. Имеем $\frac{1}{3+2^n} < \frac{1}{2^n}$. Следовательно, по признаку сравнения данный ряд сходится.

б) Здесь $u_n = \sqrt[3]{n}$. Возьмем ряд с общим членом $v_n = \frac{1}{n}$, который расходится, так так это гармонический ряд. Имеем $\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{n}$. Следовательно, данный ряд расходится.

в) Применим предельный признак сравнения. Так как по первому замечательному пределу

$$\lim_{n\to\infty}\frac{tg\frac{\pi}{5n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}n\cdot tg\frac{\pi}{5n}=\frac{\pi}{5}\neq 0\ ,$$

то исходный ряд расходится, как сравнимый с гармоническим рядом $v_n=\frac{1}{n}$.

г) Находим:

$$l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0\ .$$

Так как $l=0<1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

д) Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2},$$

то применим признак Коши.

Вычисляем $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{e}<1$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ сходится, а значит, сходится и исходный ряд.

е) Воспользуемся интегральным признаком. Функция $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln x}$ удовлетворяет условиям признака. Находим

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty\ .$$

Значит, ряд с общим членом $u(n)=\frac{1}{n\cdot\ln n}$ расходится.

ж) Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>...$ и $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n-1}=0$. Поэтому, согласно признаку Лейбница, данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum \frac{1}{2n-1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применяя интегральный признак

$\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\int\limits_1^{\beta}\frac{d(2x-1)}{2x-1} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\ln(2x-1)\Big|_1^{\beta} = \frac{1}{2}\lim\limits_{\beta\to\infty}\ln(2\beta-1) = \infty$, заключаем, что ряд с положительными членами расходится.

Следовательно, данный ряд сходится условно.

з) Заменим члены данного знакопеременного ряда, где α – любое число, их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum \frac{|\cos n\alpha|}{2^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum \frac{1}{2^n}$, которая есть ряд сходящийся. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\frac{|\cos n\alpha|}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$. Поэтому, согласно признаку сравнения, ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Задача № 7. Найти интервал сходимости ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}$.

Решение.

а) Заданный ряд неполный, поскольку содержит не все степени переменной x (только нечетные). Воспользуемся для данного ряда признаком Даламбера, имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1},\quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^{2n+1}|}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{|x^{2n-1}|} = x^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1} = x^2$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2<1$ или $-1< x <1$, т.е. $R=1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x=-1$ имеем ряд $-1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\ldots$, который сходится по признаку Лейбница, так как $1>\frac{1}{3}>\frac{1}{5}>\frac{1}{7}>\ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0$.

При $x=1$ имеем ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ – это тоже сходящийся по признаку Лейбница ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок [–1; 1];

б) Находим радиус сходимости ряда:

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}\cdot\frac{(n+1)\cdot 2^n}{1}\right|=2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=2.$$

Следовательно, ряд сходится при $-2<x+2<2$, т.е. при $-4<x<0$.

При $x=-4$ имеем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n},$$

который сходится по признаку Лейбница.

При $x=0$ имеем расходящийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n\cdot 2^{n-1}}=2\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Следовательно, областью сходимости данного ряда является полуинтервал [–4; 0).

Задача №8. Вычислить определенный интеграл с точностью $\alpha=0{,}001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}.$$

Решение.

Разложим подынтегральную функцию в ряд Маклорена, заменяя x на x^2, получим: $e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{3!}+\cdots,\ \ x\in(-\infty;\ +\infty)$.

Интегрируя обе части полученного равенства на отрезке $\left[0;\ \frac{1}{4}\right]$, лежащем внутри интервала сходимости $(-\infty;\ +\infty)$, получим:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots \right) dx = \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \cdots \right) \Bigg|_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} + \frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} - \frac{1}{3! \cdot 7 \cdot 4^7} + \cdots$$

Получили ряд лейбницевского типа. Так как $\frac{1}{1! \cdot 3 \cdot 4^3} = 0{,}0052 \ldots > 0{,}001$, а $\frac{1}{2! \cdot 5 \cdot 4^5} < 0{,}001$, то для достижения точности 0,001 достаточно взять два первых слагаемых:

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0{,}245.$$

Задание 9. Дано комплексное число $z_0 = \frac{2}{1+i}$. Требуется:

1) записать данное число в алгебраической и тригонометрической формах;

2) найти все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$.

Решение.

1) Приведем комплексное число z_0 к алгебраической форме: $z_0 = x_0 + y_0\, i$.

Для этого умножим числитель и знаменатель дроби z_0 на число $1 - i$, комплексно-сопряженное знаменателю. Получим: $z_0 = \frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1 - i$, т.е. $z_0 = 1 - i$ где $x_0 = 1$, $y_0 = -1$.

Теперь приведем комплексное число $z_0 = 1 - i$ к тригонометрическому виду: $z_0 = r_0 \left(\cos\varphi_0 + i \sin\varphi_0 \right)$, где $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = \sqrt{2}$ — модуль комплексного числа z_0, φ_0 — аргумент этого числа. Для нахождения φ_0 имеем систему: $\begin{cases} x_0 = r_0 \tilde{n}os\,\varphi_0 \\ y_0 = r_0 \sin\varphi_0 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 = \sqrt{2}\cos\varphi_0 \\ -1 = \sqrt{2}\sin\varphi_0 \end{cases}$ и тогда $\varphi_0 = -\dfrac{\pi}{4}$. Следовательно, тригонометрическая форма комплексного числа $z_{0.}$ имеет вид: $z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$.

2) Найдем теперь все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$, откуда $z = \sqrt[3]{-z_0}$. Тригонометрическая форма комплексного числа z_0 имеет вид: $-z_0 = \sqrt{2}\left[\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right]$. По формуле Муавра получаем:

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right), \text{где } k = 0; 1; 2\,.$$

Тогда корни уравнения имеют вид:

При $k = 0$

$$z_1 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12} + i\sin\frac{3\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

При $k = 1$

$$z_2 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right);$$

При $k = 2$

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$