СПЕЦИАЛЬНОСТЬ «Эксплуатация железных дорог»
НАПРАВЛЕННОСТЬ «Магистральный транспорт»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РЕШЕИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ №1
(Д курс, 1 семестр)

Тема «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных».

Задача №1. Вычислить определитель:
а) разложив его по элементам 2 - ой строки;
б) получив предварительно нули в 1- ом столбце:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. а) $\Delta= a_{21}\cdot A_{21}+a_{22}\cdot A_{22}+a_{23}\cdot A_{23}+a_{24}\cdot A_{24}$, т.е. определитель равен сумме произведений элементов какого-либо ряда (например, второй строки) на их алгебраические дополнения.

$\Delta= 0\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+2\cdot A_{23}+3\cdot A_{24}=0+1\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}+2\cdot (-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{2+4}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}=0+(1\cdot1\cdot1+3\cdot0\cdot0+3\cdot 2\cdot2-2\cdot1\cdot0-1\cdot0\cdot2-3\cdot3\cdot1)-2\cdot(1\cdot0\cdot1+3\cdot3\cdot0+2\cdot2\cdot2-2\cdot0\cdot 0-1\cdot3\cdot2-3\cdot2\cdot1)+3\cdot(1\cdot0\cdot0+3\cdot3\cdot3+2\cdot2\cdot1-2\cdot0\cdot3-1\cdot3\cdot1- 2\cdot3\cdot0)=0+4-2\cdot(-4)+3\cdot28=4+8+84=96.$

б) с помощью элементарных преобразований над строками определителя получим нули на месте элементов a_{31} и a_{41}, для этого элементы первой строки умножим на (-3) и сложим с соответствующими элементами третьей строки, затем умножим на (-2) и сложим с соответствующими элементами четвертой строки, при этом первая строка останется без изменения. Вторая строка также не изменится, так как элемент a_{21} равен нулю.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\3&0&1&2\\2&3&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3&0\\0&1&2&3\\0&-6&-8&2\\0&-1&-6&1\end{vmatrix}.$$

Далее разложим определитель по элементам первого столбца как в пункте а), получим:

$$\Delta=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\-6&-8&2\\-1&-6&1\end{vmatrix}$$

$$=1\cdot(-8)\cdot1+(-6)\cdot(-6)\cdot3+2\cdot2\cdot(-1)-(-1)\cdot(-8)\cdot3-1\cdot2\cdot(-6)-(-6)\cdot2\cdot1=-8+108-4-24+12+12=96.$$

Ответ: 96

Задача №2. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3;\\2x_1+4x_2-3x_3=2;\\3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

Решение. Дана система линейных алгебраических уравнений, содержащая $n=3$ неизвестных и m=3 уравнений. В этом случае система будет невырожденной и иметь единственное решение, если главный определитель системы $\Delta\neq 0$ (совместность данной системы можно проверить и с помощью теоремы Кронекера-Капелли).

а) $\Delta=\begin{vmatrix}1&5&-1\\2&4&-3\\3&-1&-3\end{vmatrix}=-16$ - система совместна и имеет единственное решение.

Решим её по формулам Крамера: $x_1=\dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2=\dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3=\dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где

$\Delta=\begin{vmatrix}1&5&-1\\2&4&-3\\3&-1&-3\end{vmatrix}=-16$; $\Delta_1=\begin{vmatrix}3&5&-1\\2&4&-3\\-7&-1&-3\end{vmatrix}=64$; $\Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&2&-3\\3&-7&-3\end{vmatrix}=-16$;

$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&4&2\\3&-1&-7\end{vmatrix}=32$;

$x_1=-4$; $x_2=1$; $x_3=-2$.

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу A^{-1} (она существует, т.к. $\Delta = \det A = -16 \neq 0$):

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15$; $\quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16$; $\quad A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11$;

$-A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$; $\quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $\quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$; $\quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16$; $\quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид: $X = A^{-1}B$.

$$X = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16} \begin{pmatrix} -45 + 32 + 77 \\ -9 - 7 \\ -42 + 32 + 42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из полученной матрицы имеем решение системы: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

Ответ: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований над строками получим нули в первом столбце (в общем случае расширенную матрицу системы приводят к треугольному виду). Для этого первое уравнение умножим на (-2) и сложим со вторым, затем первое уравнение умножим на (-3) и сложим с третьим:

$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \cong \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right)$. Запишем систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ \quad -6x_2 - x_3 = -4; \\ \quad -16x_2 = -16. \end{cases}$$

$-16x_2 = -16$, тогда $x_2 = 1$;

$-6\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = -4$, $-6 \cdot 1 - \tilde{o}_3 = -4$, тогда $x_3 = -2$;

$\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = 3$, $\tilde{o}_1 + 5 \cdot 1 + 4 = 3$, тогда $x_1 = -4$.

Таким образом, $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

Ответ: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

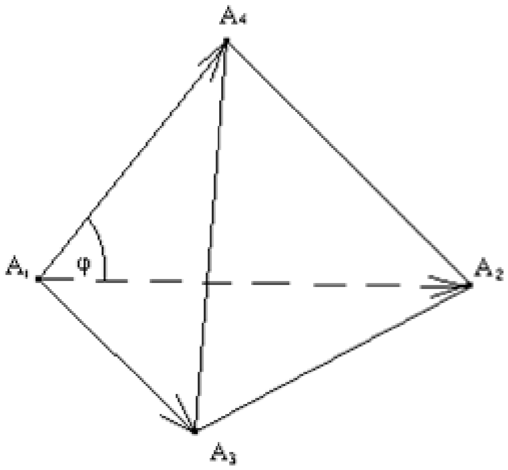
Задача №3. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(2;-1;3)$, $A_2(0;-2;4)$, $A_3(1;-1;1)$, $A_4(3;0;2)$.

Средствами векторной алгебры найти:

1. угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2. площадь грани $A_1A_2A_3$;
3. точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, используя формулы координат точки, делящей отрезок в данном отношении;
4. объем пирамиды;
5. длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

Решение.

1.Угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 равен углу между векторами $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$ (рис.2), этот угол вычисляется по формуле: $\cos\varphi = \dfrac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_1A_4}}{\left|\overline{A_1A_2}\right| \cdot \left|\overline{A_1A_4}\right|}$.



Найдем координаты векторов $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{A_1A_4}$.

$$\overline{A_1A_2} = \{0-2;\ -2-(-1);\ 4-3\} = \{-2;\ -1;\ 1\},$$

$$\overline{A_1A_4} = \{3-2;\ 0-(-1);\ 2-3\} = \{1;\ 1;\ -1\}.$$

$$\left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6} \approx 2{,}45,$$

$$\left|\overline{A_1A_4}\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \approx 1{,}73.$$

Найдем скалярное произведение:

$$\overline{A_1A_2}\cdot\overline{A_1A_4}=\{-2;-1;1\}\cdot\{1;1;-1\}=(-2)\cdot1+(-1)\cdot1+1\cdot(-1)=-2-1-1=-4.$$

Итак, $\cos\varphi=\dfrac{-4}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}}\approx\dfrac{-4}{2{,}45\cdot1{,}73}\approx-0{,}943,$ т.е. $\varphi\approx\arccos(-0{,}943)\approx160{,}5°.$

2. Площадь S грани $A_1A_2A_3$ найдем, используя геометрический смысл векторного произведения: $S=\dfrac{1}{2}\cdot|\overline{d}|=\dfrac{1}{2}\cdot|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|,$ где

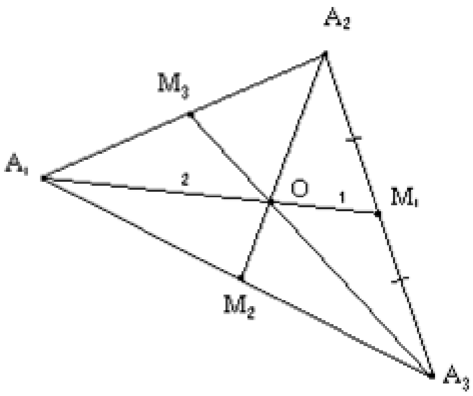
$$\overline{A_1A_2}=\{-2;-1;1\},\ \overline{A_1A_3}=\{1-2;-1-(-1);1-3\}=\{-1;0;-2\}.$$

$$\overline{d}=\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix}\cdot\overline{i}+\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & -1\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\cdot\overline{k}=(2-0)\cdot\overline{i}+$$

$$+(-1-4)\cdot\overline{j}+(0-1)\cdot\overline{k}=2\cdot\overline{i}+(-5)\cdot\overline{j}+(-1)\cdot\overline{k}\Rightarrow\overline{d}=\{2;-5;-1\}.$$

Итак,

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\overline{d}|=\frac{1}{2}\cdot|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2^2+(-5)^2+(-1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{4+25+1}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{30}\approx2{,}74(ед^2).$$



3. Найдем точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$.

Рассмотрим одну из медиан (рис.3), например, медиану A_1M_1, $M_1(x';y';z')$ - середина стороны A_2A_3. Используем формулы координат середины отрезка:

$$x'=\frac{x_2+x_3}{2};\ y'=\frac{y_2+y_3}{2};\ z'=\frac{z_2+z_3}{2},$$

где $A_2(x_2;y_2;z_2)$, $A_3(x_3;y_3;z_3)$.

$$x'=\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2};\ y'=\frac{-2+(-1)}{2}=-\frac{3}{2};\ z'=\frac{4+1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow M_1(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\frac{5}{2}).$$

Известно, что в треугольнике медианы пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины. Точку пересечения медиан треугольника $O(x_0; y_0; z_0)$ найдем, используя формулы координат точки, делящей направленный отрезок (вектор $\overline{A_1M_1}$) в данном отношении:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda \cdot x'}{1+\lambda};\ y_0 = \frac{y_1 + \lambda \cdot y'}{1+\lambda};\ z_0 = \frac{z_1 + \lambda \cdot z'}{1+\lambda}.$$

Итак, $x_0 = \dfrac{2 + 2\cdot\frac{1}{2}}{1+2} = \dfrac{3}{3} = 1;\ y_0 = \dfrac{-1 + 2\cdot(-\frac{3}{2})}{1+2} = \dfrac{-4}{3};\ z_0 = \dfrac{3 + 2\cdot\frac{5}{2}}{1+2} = \dfrac{8}{3} \Rightarrow O(1; -\dfrac{4}{3}; \dfrac{8}{3}).$

4. Объем V пирамиды $A_1A_2A_3A_4$ найдем, используя геометрический смысл смешанного произведения векторов, совпадающих с ребрами пирамиды:

$V = \dfrac{1}{6}\cdot\left|\overline{A_1A_2}\ \ \overline{A_1A_3}\ \ \overline{A_1A_4}\right| = \dfrac{1}{6}\cdot\left|(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_2})\cdot\overline{A_1A_2}\right|$, где

$\overline{A_1A_2} = \{0-2; -2-(-1); 4-3\} = \{-2; -1; 1\},\ \overline{A_1A_3} = \{1-2; -1-(-1); 1-3\} = \{-1; 0; -2\},$

$\overline{A_1A_4} = \{3-2; 0-(-1); 2-3\} = \{1; 1; -1\}.$

$$V = \frac{1}{6}\cdot\left|(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_2})\cdot\overline{A_1A_2}\right| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(-2\cdot 0\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1)\cdot(-2)) -$$

$$-(1\cdot 0\cdot 1 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot(-2)\cdot 1) = \frac{1}{6}\cdot\left|(0-1+2-0+1-4)\right| =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left|-2\right| = \frac{1}{3} \approx 0{,}33\ (ed^3).$$

5. Длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$, можно найти

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{A_1A_2A_3}\cdot H \Rightarrow H = \frac{3\cdot V}{S}.$$

$$H = \frac{3\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{30}} \approx \frac{1}{2{,}74} \approx 0{,}365\ (ed).$$

Ответ:

1. $\varphi \approx \arccos(-0{,}943) \approx 160{,}5°$;

2. $S \approx \frac{1}{2} \cdot \sqrt{30} \approx 2{,}74(\textit{ед}^2)$;

3. $O(1; -\frac{4}{3}; \frac{8}{3})$ - точка пересечения медиан;

4. $V \approx 0{,}33(\textit{ед}^3)$;

5. $H \approx 0{,}365$ $(\textit{ед})$.

Задача №4.

Даны вершины треугольника *ABC:* $A(4;3)$, $B(-3;3)$, $C(2;7)$. Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

Решение. а) Прямая проходит через две точки $A(4;3)$ и $B(-3;3)$, воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $\frac{\tilde{o} - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\acute{o} - y_1}{y_2 - y_1}$, получим уравнение стороны *AB*: $\frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3}$, откуда $6(x-4) = 7(y-3)$ или $6x - 7y - 3 = 0$;

б) Угловой коэффициент прямой *AB:* $k_{AB} = \frac{6}{7}$. С учётом условия перпендикулярности прямых *AB* и *CH* угловой коэффициент высоты *CH*: $k_{CH} = -\frac{7}{6}$.

Составим уравнение высоты *CH*, проходящей через точку $C(2;7)$ с угловым коэффициентом $-\frac{7}{6}$, воспользуемся формулой $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$:

$y - 7 = -\frac{7}{6}\left(x - 2\right)$ или $7x + 6y - 56 = 0$;

в) Найдём координаты точки *M* — середины отрезка *BC*:

$x=\dfrac{-3+2}{2}=-\dfrac{1}{2}$; $y=\dfrac{-3+7}{2}=2$, т.е $M\left(-\dfrac{1}{2};2\right)$.

Теперь по двум известным точкам A и M составляем уравнение медианы AM:

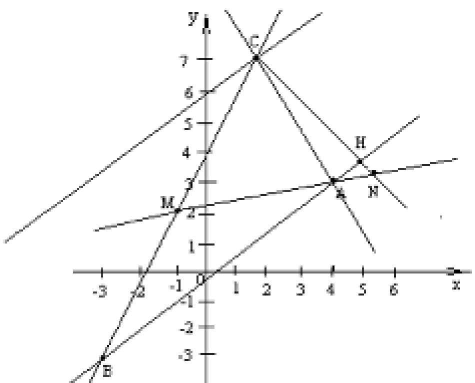
$$\frac{x-4}{-\frac{1}{2}-4}=\frac{y-3}{2-3} \text{ или } 2x-9y+19=0;$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM и высоты CH составляем систему уравнений: $\begin{cases} 7x+6y-56=0; \\ 2x-9y+19=0. \end{cases}$

Решая систему, получаем $x=\dfrac{26}{5}$, $y=\dfrac{49}{5}$, т.е. $N\left(\dfrac{26}{5};\dfrac{49}{5}\right)$;

д) Так как прямая, проходящая через вершину $C(2;7)$, параллельна стороне AB, то их угловые коэффициенты равны $k_{CD}=k_{AB}=\dfrac{6}{7}$. Тогда используя формулу $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$, уравнение прямой CD имеет вид: $y-7=\dfrac{6}{7}(x-2)$ или $6x-7y+37=0$;

е) расстояние от точки $C(2;7)$ до прямой AB, *заданной уравнением* $6x-7y-3=0$, вычисляем по формуле $d=\left|\dfrac{A\,x_0+B\,y_0+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$: $d=|CH|=$ $\dfrac{6\cdot 2-7\cdot 7-3}{\sqrt{6^2+(-7)^2}}=\dfrac{40}{\sqrt{85}}\approx 4{,}4$ ед.дл.



Решение задачи проиллюстрировано на рисунке.

Задача №5.

Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип, параметры и расположение линии относительно «старой» и новой систем координат: а) $4x^2+5y^2+20x-30y+10=0$; б) $x^2+10x-2y+11=0$.

Решение. а) В исходном уравнении $4x^2+5y^2+20x-30y+10=0$, $A=4$, $C=5$, тогда $A \cdot C > 0$, т.е. исходное уравнение определяет эллиптический тип линии. Преобразуем исходное уравнение, сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые переменные, вынесем за скобки числовой множитель перед квадратом переменной, выражения в скобках дополним до полного квадрата:

$4x^2 + 20x + 5y^2 - 30y + 10 = 0$,

$4(x^2 + 5x) + 5(y^2 - 6y) + 10 = 0$,

$4\left(x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{5}{2} + \frac{25}{4} - \frac{25}{4}\right) + 5\left(y^2 - 2 \cdot y \cdot 3 + 9 - 9\right) + 10 = 0$,

$4\left(\left(x + \frac{5}{2}\right) - \frac{25}{4}\right) + 5\left((y-3)^2 - 9\right) + 10 = 0$,

$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - 25 + 5(y-3) - 45 + 10 = 0$,

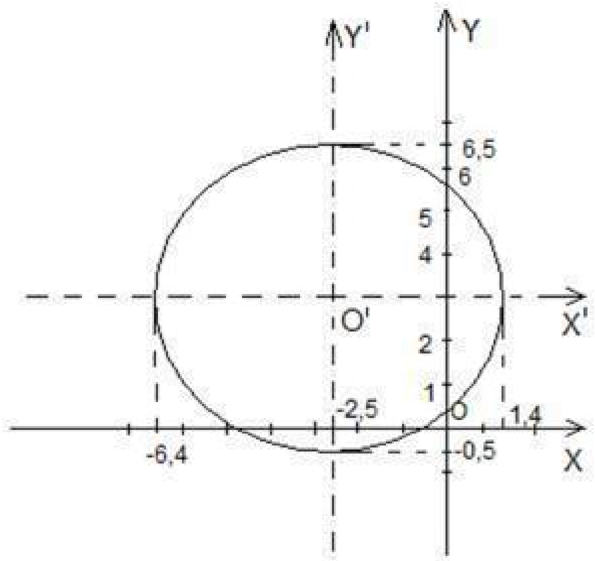
$4\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(y-3) = 60$, разделим данное выражение на 60.

$\frac{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2}{15} + \frac{(y-3)^2}{12} = 1$ — каноническое уравнение эллипса в «старой» системе координат, $O'\left(-\frac{5}{2};3\right)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики полученной линии: $a^2 = 15$, $a = \sqrt{15}$; $b^2 = 12$, $b = \sqrt{12}$, $a > b$, тогда $c^2 = a^2 - b^2 = 3$, т.е. $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$;

эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{ñ}{à} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{\frac{3}{15}} < 1$;

директрисы эллипса $x = \pm\frac{a}{\varepsilon} = \pm\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{3}{15}}} = \pm\sqrt{75}$.



б) в исходном уравнении $x^2+10x-2y+11=0$, $A=1$, $C=0$, тогда $A\cdot C=0$, т.е. исходное уравнение определяет параболический тип линии.

Преобразуем исходное уравнение:

$x^2+2\cdot x\cdot 5+25-25-2y+11=0$,

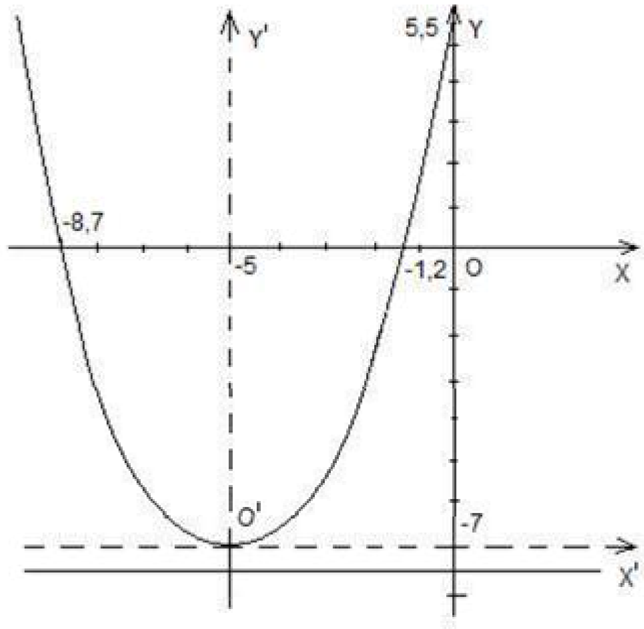
$(x+5)^2-2y-14=0$,

$(x+5)^2=2(y+7)$ — каноническое уравнение параболы в «старой» системе координат, симметричной оси *OY*, ветви направлены вверх; $O'(-5;-7)$ — координаты центра системы координат.

Определим характеристики $2p=2$, $p=1$, $F\left(0;\frac{p}{2}\right)=F\left(0;\frac{1}{2}\right)$ — координаты фокуса;

$y=-\frac{p}{2}=-\frac{1}{2}$ — уравнение директрисы в новой системе координат;

$r=y+\frac{p}{2}$, $r=y+\frac{1}{2}$ — фокальный радиус в новой системе координат.



Задача №6. Найти пределы функций (без правила Лопиталя).

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+1}{3x^2+5x+8}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x+12}{6x^2+15x-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x-7}\right)^x$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{2x-1}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+16}{x-4}=\dfrac{18}{-2}=-9$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{1+2x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+1}{2}=1$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x}}=\dfrac{1}{2}$ или степень числителя равна 2, степень знаменателя также равна двум, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при старших неизвестных;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+1}{3x^2+5x+8}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\left[\dfrac{7}{0}\right]=\infty$ или, т.к. степень числителя больше степени знаменателя предел равен бесконечности;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x+12}{6x^2+15x-8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{17}{x}+\frac{12}{x^2}}{6+\frac{15}{x}-\frac{8}{x^2}}=\left[\frac{0}{6}\right]=0$ или, т.к. степень числителя меньше степени знаменателя предел равен нулю;

6) $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{\sin3x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{3x\cdot tg2x}{3x\cdot\sin3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot tg2x}{3x\cdot2}=\frac{2}{3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\frac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-\cos3x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin2x\cdot\sin4x}{x\cdot x}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cdot4\cdot\sin2x\cdot\sin4x}{2x\cdot4x}=2\cdot2\cdot4=16$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-7}\right)^x=\left|\begin{matrix}f(x)=\frac{3x+2}{2x-7};\ \lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+2}{2x-7}=\frac{3}{2}\\ g(x)=x;\ \lim\limits_{x\to\infty}x=\infty\end{matrix}\right|=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^\infty\right]=\left|\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, & 0<a<1;\\ +\infty, & a>1.\end{cases}\right|=\infty$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{2x-1}=\left|\begin{matrix}f(x)=\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right);\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)=1\\ g(x)=2x-1;\ \lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)=\infty\end{matrix}\right|=\left[1^\infty\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+5}{3x+7}-1\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x+5-3x-7}{3x+7}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{3x+7}\right)^{2x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\frac{-2}{3x+7}\right)^{\frac{3x+7}{-2}}\right)^{\frac{-2}{3x+7}}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x-1)}{3x+7}}=e^{-\frac{4}{3}}.$

Задача №7. Найти производные указанных функций.

1) $f(x)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

3) $y=\left(x^2+6\right)\sqrt{x^2-3}$; 4) $y=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}$;

5) $y=tg\sqrt[3]{\ln x}$; 6) $y=e^{ctg^4x}$; 7) $y=2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}$;

8) $y=\cos^8 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}$; 9) $x^3+y^3=\sin(x-2y)$;

10) $y\cdot\ln x-x\cdot\ln y=1$.

Решение. 1) Воспользуемся формулой производной произведения $[u\cdot v]'=u'v+uv'$

$$f'(x)=\left(x^3-1\right)'\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)'$$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u\pm v\pm w]'=u'\pm v'\pm w'$, производной постоянной $C'=0$, производная степени $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$=3x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)(2x+1)$$

(воспользуемся формулой разность кубов

a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)

$$=3x^2\left(x^2+x+1\right)+(x-1)\left(x^2+x+1\right)(2x+1)=\left(x^2+x+1\right)\left[3x^2+(2x+1)(x-1)\right]=$$

$$\left(x^2+x+1\right)\left(3x^2+2x^2-2x+x-1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(5x^2-x-1\right);$$

2) (воспользуемся формулой производной частного $\left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$)

$$y'=\frac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u\pm v\pm w]'=u'\pm v'\pm w'$, производной постоянной $C'=0$, производной степени $\left[x^n\right]'=n\cdot x^{n-1}$)

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

(преобразуем данное выражение)

$$=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2};$$

3) (воспользуемся формулой производной произведения $[u\cdot v]'=u'v+uv'$)

$$y'=\left(x^2+6\right)'\cdot\sqrt{x^2-3}+\left(x^2+6\right)\cdot\sqrt{x^2-3}'$$

(найдём производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования)

$$=2x\cdot\sqrt{x^2-3}+\frac{x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=$$

$$\frac{2x^3-6x+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}};$$

4) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, заменив кубический корень дробным показателем)

$$y'=\left[\left(x^3+1\right)^{2/3}\right]'=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-1/3}\cdot\left(x^3+1\right)'=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-1/3}\cdot 3x^2=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}};$$

5) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[tg\,u]'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$)

$$y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\left[\sqrt[3]{\ln x}\right]'$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{3}(\ln x)^{-2/3}\cdot[\ln x]'$$

(воспользуемся формулой $[\ln u]'=\frac{1}{u}\cdot u'$)

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{3}(\ln x)^{-2/3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}\cdot\cos^2\sqrt[3]{\ln x}};$$

6) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[e^u\right]'=e^u\cdot u'$)

$$y'=e^{ctg^4 x}\cdot\left[ctg^4 x\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x}\cdot 4\,ctg^3 x\cdot[ctg\,x]'=$$

(воспользуемся формулой $[ctg\,u]'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x}\cdot 4\,ctg^3 x\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}=\frac{-4\cdot e^{ctg^4 x}\cdot ctg^3 x}{\sin^2 x};$$

7) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[a^u\right]'=a^u\cdot\ln a$)

$$y'=2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\left[\sqrt{ctg\ln\sin x}\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[\sqrt{u}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot[ctg\ln\sin x]'=$$

(воспользуемся формулой $[ctg\,u]'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\cdot[\ln\sin x]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[\ln u\right]' = \frac{1}{u}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\left[\sin x\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[\sin x\right]' = \cos x$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x;$$

8) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[u^n\right]' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$y' = 8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left[tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[\cos u\right]' = -\sin u\cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot\left[tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left[tg\, e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[tg\, u\right]' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}}\cdot\left[e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[e^u\right]' = e^u\cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}}\cdot e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left[\sqrt[4]{x}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right)\cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}}\cdot e^{\sqrt[4]{x}}\cdot\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}};$$

9) Данная функция задана неявно (Если из уравнения $F(x,y)=0$ выразить явно переменную y как функцию аргумента x затруднительно, тогда говорят о неявно заданной функции y от аргумента x).

(Для того чтобы найти производную функции, заданной неявно, надо уравнение $F(x,y)=0$ продифференцировать, считая y функцией от x, и вновь полученное уравнение решить относительно производной y').

Продифференцируем обе части уравнения, учитывая, что y — есть функция от x, получим:

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y)\cdot(1-2y')$ или

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y) - 2y'\cdot\cos(x-2y)$.

Отсюда находим y':

$3y^2 \cdot y' + 2y'\cdot\cos(x-2y) = \cos(x-2y) - 3x^2$ или

$y'\left(3y^2 + 2\cos(x-2y)\right) = \cos(x-2y) - 3x^2$, т.е.

$y' = \dfrac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)}$;

10) Это уравнение определяет y как неявную функцию x. Дифференцируем по x:

$x_x \cdot \ln y + x \cdot \dfrac{1}{y} \cdot y'_x - \left(y'_x \cdot \ln x + y \cdot \dfrac{1}{x} \right) = 0$. Так как $x'_x = 1$, то

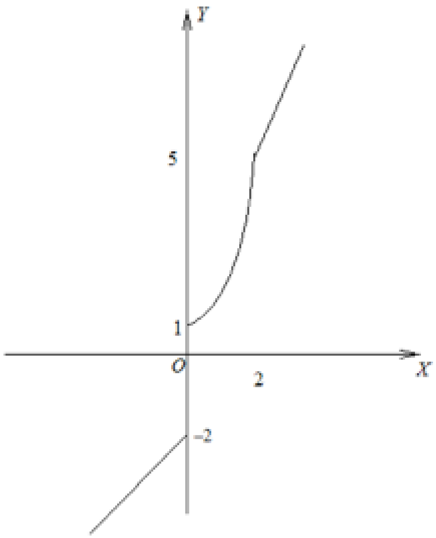
$\ln y + \dfrac{x}{y} y'_x - y'_x \ln x - \dfrac{y}{x} = 0$, откуда

$y'_x \cdot \left(\dfrac{x}{y} - \ln x \right) = \dfrac{y}{x} - \ln y$, т.е. $y'_x = \dfrac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}$.

Задача №8.

Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип $f(x) = \begin{cases} x-2, & при \quad x \le 0; \\ x^2+1, & при \quad 0 < x < 2; \\ 2x+1, & при \quad x \ge 2. \end{cases}$

Решение. Так как функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; \infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x = 0$ и $x = 2$.



Исследуем точку $x=0$: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-2)=-2$.

Символ $x\to 0-0$ позволяет выбрать нужное аналитическое выражение $f(x)$ из уравнений, ее определяющих.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$.

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой, следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок $|f(0-0)-f(0+0)|=3$.

Исследуем точку $x=2$: $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x^2+1)=4+1=5$,

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(2x+1)=5,\ f(2)=(2x+1)\big|_{x=2}=5$.

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности.

Задача №9.

Дана функция $z=f(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$**.** Найти частные производные и вычислить их значения в точке A.

1) $f(x;y)=\sqrt{x^2-y^2}$ в точке $A(5;-3)$;   2) $\varphi(x;y)=2^{xy}$ в точке $A(0;3)$.

Решение. 1) Функция $f(x;y)=\sqrt{x^2-y^2}$ есть функция двух переменных, следовательно у нее будет две частные производные:

$$f'_x\Big|_{y=const} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}\,; \qquad f'_y\Big|_{x=const} = \frac{-2y}{2\sqrt{x^2-y^2}} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}\,.$$

Вычислим значения частных производных в указанной точке: $f'_x(5;-3) = \frac{5}{4}$; $f'_y(5;-3) = \frac{3}{4}$.

2) Функция $\varphi(x;y) = 2^{x\,y}$ — функция двух переменных. Найдём частные производные данной функции:

$$\varphi'_x\Big|_{y=const} = 2^{x\,y}\ln 2(x\;y)'_x = y\;2^{x\,y}\ln 2\,;$$

$$\varphi'_y\Big|_{x=const} = 2^{x\,y}\ln 2(x\;y)'_y = x\;2^{x\,y}\ln 2\,.$$

Вычислим значения частных производных в указанной точке: $\varphi'_x(0;\,3) = 3\ln 2$ и $\varphi'_y(0;\,3) = 0$.

Задача№10. Найти частные производные второго порядка функции $z = \arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$ и доказать, что смешанные производные равны.

Решение.

Найдём первые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{y=C} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y} = -\frac{1}{2\sqrt{xy-x^2}}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x=C} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2-xy}}\,.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по *x* и по *y*, находим вторые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}}\cdot(y-2x) = \frac{y-2x}{4\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}\,;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x} + \frac{y}{2\sqrt{y-x}}}{y^2(y-x)}\right) = -\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{1}{2y} \cdot \frac{\frac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x} = \frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}.$$

Как видно, смешанные частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ равны.