

Контрольная работа №3 (1 курс, 2 семестр)

Тема «Интегральное исчисление», «Числовые и функциональные ряды.
Дифференциальные уравнения. Комплексные числа»

Задача №1. Найти неопределённые интегралы. Результаты проверить дифференцированием.

1. а) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{5-2\cos x}}$; б) $\int \frac{(3x-1)dx}{10-6x+x^2}$; в) $\int x^3 \ln x dx$.

2. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2-x^2}}$; б) $\int \frac{(2+x)dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}$; в) $\int x \cos 5x dx$.

3. а) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{13-12x+4x^2}$; в) $\int x \arctg x dx$.

4. а) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt[3]{1+\cos^2 x}}$; б) $\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{5+2x-x^2}}$; в) $\int \arctg \frac{1}{x} dx$.

5. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{3-2x+x^2}}$; в) $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$.

6. а) $\int \frac{\sin 3x dx}{7-5\cos 3x}$; б) $\int \frac{(x+3)dx}{10-6x+x^2}$; в) $\int \sqrt{x} \ln x dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$; б) $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{2+2x+x^2}}$; в) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$.

8. а) $\int \frac{dx}{(3+\operatorname{tg} x)\cos^2 x}$; б) $\int \frac{(x-2)dx}{1+x+x^2}$; в) $\int \arcsin x dx$.

9. а) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; б) $\int \frac{(x+4)dx}{\sqrt{2+x+x^2}}$; в) $\int x \sin \frac{x}{2} dx$.

10. а) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{8-5x}}$; б) $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{2-x-x^2}}$; в) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$.

Задача №2.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$ и $y = 4x$.
2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{2}{1+x^2}$ и $y = x^2$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$ и $x + y - 5 = 0$.
4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 16 - 8x$ и $y^2 = 24x + 48$.
5. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x$ и $y = \frac{1}{2}x$.
6. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{6x}$; $y = \sqrt{16 - x^2}$ и $x = 0$.
7. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sqrt{2x}$; $y = \sqrt{9 - x^2}$.
8. Найти длину дуги кривой $y = x\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 4$.
9. Найти длину дуги кривой $y = \frac{1}{2}x^2$ от $x = 0$ до $x = 1$.
10. Найти длину дуги кривой $2y = e^x + e^{-x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

Задача №3. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость.

1. $\int_0^{+\infty} xe^{-2x} dx.$
2. $\int_1^{+\infty} \frac{x^3}{1+x^4} dx.$
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx.$

$$4. \int_0^{+\infty} x e^{3x} dx.$$

$$5. \int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$6. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}} dx.$$

$$7. \int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 9} dx.$$

$$8. \int_3^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2} dx.$$

$$9. \int_0^{+\infty} \frac{1}{10+6x+x^2} dx.$$

$$10. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

Задача №4. Найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные и линейные).

$$1. \text{ а) } \operatorname{tg} x dx - y \ln x dx = 0; \quad \text{б) } xy' \ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + y \ln\left(\frac{y}{x}\right); \quad \text{в) } y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x.$$

$$2. \text{ а) } 3(x^2 y + y) dy + \sqrt{2+y^2} dx = 0; \quad \text{б) } 2 dx + \sqrt{\frac{x}{y}} dy - \sqrt{\frac{y}{x}} dx = 0; \quad \text{в) } y' - 2 \frac{y}{x} = 3x^2 - 2x^4.$$

$$3. \text{ а) } e^x dx - (1 + e^y) y dy = 0; \quad \text{б) } xy' \sin \frac{y}{x} + x = y \sin \frac{y}{x}; \quad \text{в) } y' - \frac{y}{x} = x \sin x.$$

$$4. \text{ а) } y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y; \quad \text{б) } 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \frac{y}{x} + 3; \quad \text{в) } y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$$

$$5. \text{ а) } x^2 y' = xy + y^2 e^{-x/y}; \quad \text{б) } xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y; \quad \text{в) } y' + y \cos x = e^{\sin x}.$$

$$6. \text{ а) } y' y \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = 0; \quad \text{б) } xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}; \quad \text{в) } y' \sin x - y \cos x = 1.$$

$$7. \text{ а) } y' = 2e^x \cos x; \quad \text{б) } x \cos \frac{y}{x} dy + \left(x - y \cos \frac{y}{x}\right) dx = 0; \quad \text{в) } y' + 2xy = 2x^2 e^{-x^2}.$$

$$8. \text{ а) } y(1 + \ln y) + xy' = 0; \quad \text{б) } (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x; \quad \text{в) } x^2 y' + 2xy = e^x.$$

9. а) $\sqrt{5+y^2} + y'y\sqrt{1-x^2} = 0$; б) $y' = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}$; в) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$.

10. а) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x}dx = 0$; б) $y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$; в) $xy' - 2y = 2x^4$.

Задача №5. Найти общее решение дифференциальных уравнений второго и высших порядков (уравнения, допускающие понижение порядка).

1. а) $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin x \cos x$; б) $xy'' = y' \ln \frac{y'}{x}$.

2. а) $x^2 y'' + xy' = 1$; б) $(1+x^2)y'' + (y')^2 + 1 = 0$.

3. а) $y'' - 2 \operatorname{ctg} x \cdot y' = \sin^3 x$; б) $y''(2y+3) - 2(y')^2 = 0$.

4. а) $y'' x \ln x = y'$; б) $y'' \operatorname{tg} x = y' + 1$.

5. а) $y y'' - (1+y')y' = 0$; б) $y y'' = y^2 y' + (y')^2$.

6. а) $y''' = e^{-2x}$; б) $y''' = x^3 - \sqrt{x}$.

7. а) $y''' \sqrt{x} = 3x^2 - \sqrt{x} - 1$; б) $2y y'' + y^2 - y'^2 = 0$.

8. а) $2y y'' - 3y'^2 = 4y^2$; б) $2y(y')^3 + y'' = 0$.

9. а) $2y y'' = (y')^2 + 1$; б) $y''' = \cos 2x$.

10. а) $y'' = x \sin x$; б) $y'' = 4^{2x}$.

Задача №6. Исследовать знакочередующийся ряд на абсолютную и условную сходимость.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{3n+1}{n(n+2)}$.

2. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^5 + n^2 + 1}$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{\sqrt{n^5 + 3n^2 + 2}}$.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(n^2)}{n^2}$.

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2 - 1}{3n^3}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 + 3}{\sqrt{n^5}}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{3n+1} \right)^{n^2}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{3n+2}{2n} \right)^n.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{\pi}{3^n}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^n}{n^4}.$$

Задача №7. Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать его сходимость на границах интервала.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n9^n}.$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n+1}}{\sqrt[3]{n}}.$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n}}{4^n}.$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)2^n}.$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(n+1)3^n}.$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n-1}}{(2n^3 + 3n)4^n}.$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}(x+3)^n}{n^2 + 1}.$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{(n+1)^2 3^n}.$$

$$9. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(x+2)^{2n+1}}{(n+1)!}.$$

$$10. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+1)}.$$

Задача №8. Вычислить определенные интегралы с точностью $\alpha = 0,001$, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

$$1. \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

$$2. \int_0^1 \sin x^2 dx$$

$$3. \int_0^{0,5} \frac{1}{1+x^4} dx$$

$$4. \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$$

$$5. \int_0^{0,5} e^{-x^2/4} dx$$

$$6. \int_0^{2/3} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \quad 8. \int_0^1 \sqrt[3]{x} \cos x dx \quad 9. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{8+x^3}} dx$$

$$10. \int_0^{\sqrt{3}/3} x^3 \operatorname{arctg} x dx$$

Задача №9. Дано комплексное число $z_0 =$. Требуется:

- 1) записать число z_0 в алгебраической и тригонометрической формах;
- 2) найти все корни уравнения $z^3 + z_0 = 0$.

$$1. z_0 = \frac{4}{1-i\sqrt{3}}.$$

$$2. z_0 = \frac{1}{1-i}.$$

$$3. z_0 = \frac{2\sqrt{2}}{1+i}.$$

$$4. z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}.$$

$$5. z_0 = \frac{2}{1+i}.$$

$$6. z_0 = \frac{1}{1+i}.$$

$$7. z_0 = \frac{1}{1+i\sqrt{3}}.$$

$$8. z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}-i}.$$

$$9. z_0 = \frac{1}{\sqrt{3}+i}.$$

$$10. z_0 = \frac{4}{\sqrt{3}+i}.$$