Специальность «Эксплуатация железных дорог»

Контрольная работа №1 (1 курс, 1 семестр)

Тема «Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия», «Введение в математический анализ, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных».

Задача №1. Вычислить определитель:

1) разложив его по элементам i - ой строки;

2) получив предварительно нули в j - ом столбце.

1. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 2$

2. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -6 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2$

3. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 1$

4. $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 1$

5. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 4$

6. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 1$

7. $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ $i = 4,\ j = 2$

8. $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 1,\ j = 2$

9. $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $i = 3,\ j = 3$

10. $|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ $i = 2,\ j = 3$

Задача №2. Решить систему линейных алгебраических уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) матричным способом:

1. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33 \\ 4x_1 + x_3 = -7 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33 \\ 7x_1 - 5x_2 = 24 \\ 4x_1 + 11x_3 = 39 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12 \end{cases}$

Задача №3.

Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Средствами векторной алгебры найти:

1. угол φ между ребрами A_1A_2 и A_1A_4;
2. площадь грани $A_1A_2A_3$;
3. точку пересечения медиан треугольника $A_1A_2A_3$, используя формулы координат точки, делящей отрезок в данном отношении;
4. объем пирамиды;
5. длину высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

1. A_1 (3;1;4); A_2 (-1;6;1); A_3 (-1;1;6); A_4 (0;4;-1).
2. A_1 (3;3:9); A_2 (6;9;1); A_3 (1:7:3); A_4 (8;5:8).
3. A_1 (3;5;4); A_2 (5;8;3); A_3 (1;9;9); A_4 (6;4;8).

4. A_1 (2;4;3); A_2 (7;6:3); A_3 (4;9;3); A_4 (3;6:7).
5. A_1 (9;5:5); A_2 (-3;7;1); A_3 (5:7;8); A_4 (6;9;2).
6. A_1(0:7:1); A_2 (4;1:5); A_3 (4;6;3); A_4 (3;9:8).
7. A_1 (5;5:1): A_2 (3;8;4); A_3 (3;5;10); A_4 (5;8:2).
8. A_1 (6;1;1); A_2 (4;6;6); A_3 (4;2;0); A_4 (1;2;6).
9. A_1 (7;5,3); A_2 (9;4;4); A_3 (4;5;7); A_4 (7;9;6).
10. A_1 (6;6:2); A_2 (5;4;7); A_3 (2:4;7); A_4 (7;3;0).

Задача №4.

Дан треугольник *ABC* с вершинами *A*, *B*, *C*. Найти:

а) уравнение стороны *AB*;

б) уравнение высоты *CH*;

в) уравнение медианы *AM*;

г) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;

е) расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

1. $A(1;-1)$, $B(2;2)$, $C(3;1)$.
2. *A*(1; 1), *B*(2; 2), *C*(1; 3).
3. *A*(-1; -1), *B*(1; 1), *C*(2; 2).
4. *A*(1; -1), *B*(2; 1), *C*(-1; 3).
5. *A*(0; 5), *B*(12; 0), *C*(18; 8).
6. *A*(8; 0), *B*(-4; 2), *C*(-8; 2).
7. A(1; 5), B(13; 0), C(19; 8).
8. A(1; 6), B(-6; -4), C(-10; -1).
9. A(-1; 5), B(11; 0), C(17; 8).
10. *A*(6; 5), *B*(-6; 0), *C*(-10; 3).

Задача №5. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду, определить тип, параметры и расположение линии относительно старой и новой систем координат.

1. $2x^2+3y^2-10x+21y-70=0$;

2. $3x^2-2y^2+15x+10y-100=0$;
3. $5x^2+15x-2y+7=0$;
4. $4x^2+3y^2+20x-15y-25=0$;
5. $2x^2-5y^2-18x-10y-50=0$;
6. $3x^2+2y^2-9y+14y-100=0$;
7. $2y^2-10y+3x-15=0$;
8. $4x^2-20x+3y-5=0$;
9. $2y^2-3x^2+10y+6x-10=0$;
10. $4x^2-3y^2+4x+9y-25=0$.

Задача №6. Найти пределы функций (не используя правило Лопиталя):

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{4x-5}$; б) $\lim\limits_{z\to 0}\frac{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}{5z}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-1}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+3}{5x^3+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{5x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^x$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^4+x^3-2}{x^4-2x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{8x+1}{8x}\right)^{2x}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3+2x^2-6}{2x^3-x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{4+3x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{arctgx}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+5x-1}{5x^4-2x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+x^2+3x^4}{5x^4+6x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+4x}-\sqrt{1-3x}}{x^2+x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2ctg2x}{\sin 3x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1)[\ln(x+2)-\ln x]$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^5-3x^4+x}{x^5+3x^2+2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;
г) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)[\ln(x-1)-\ln x]$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-2x-1}{3x^2+4x+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2\frac{x}{2}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^4-3x^2+x}{x^4+5}$; б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{xtg2x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x^2-4}}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^5-4x^3+3}{x^5+2x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$; в) $\lim\limits_{x\to 0} xctg3x$; г) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{1}{x-3}}$.

Задача №7. Найти производные указанных функций:

1. а) $y=\sqrt{2x-3}-\dfrac{4}{\sqrt{x^3+x^2+1}}$; б) $y=\left(e^{\sin x}+1\right)^2$; в) $y=\ln\left[\cos(x+1)\right]^2$; г) $tg\dfrac{y}{x}=5x$.

2. а) $y=x\cdot\sqrt[3]{1-x}$; б) $y=\dfrac{5\cos x}{\sin^2 x}$; в) $y=arctg\left(e^{x^2}\right)$; г) $arctgy-y+x^2=0$.

3. а) $y=x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$; б) $y=tg^2 2x$; в) $y=\arccos\sqrt{1-x}$; г) $y\cos x=\sin(x+y)$.

4. а) $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{x^2-4x+2}}$; б) $y=x\sin x-\cos x$; в) $y=x^3\ln x$; г) $\dfrac{y}{x}=arctg\dfrac{x}{y}$.

5. а) $y=\dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$; б) $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+5\sin^2 x}$; в) $y=\dfrac{x^2\ln x}{x+2}$; г) $\left(e^x+1\right)\left(e^y-1\right)+1=0$.

6. а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^3+1}+\sqrt[5]{x^2+1}}$; б) $y=2ctg^2\left(x^2+1\right)$; в) $y=2^{arctg\left(x^4\right)}$; г) $y^3x=ctg\dfrac{y}{x}$.

7. а) $y=\sqrt{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$; б) $y=tg^2x+\ln(\sin x)$; в) $y=arctg\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$; г) $x^3-y^3+3xy=0$.

8. а) $y=2\cdot\sqrt[3]{6x^4-x^3+\dfrac{2}{x}}$; б) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$; в) $y=\arcsin\left(tg^2x\right)$; г) $x+y-a\cdot\cos y=0$.

9. а) $y=7\cdot\sqrt[5]{x^3-2x+\dfrac{1}{x}}$; б) $y=3^x\cdot e^{-x^2}$; в) $y=\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $\ln(y+1)=arctg\dfrac{x}{y}$.

10. а) $y=\sqrt{x^3+2x+1}+\sqrt[3]{x^2-3}$; б) $y=\dfrac{1}{3}ctg^3x-tgx+x$; в) $y=arctg\sqrt{\dfrac{3+x}{x-2}}$; г) $y+e^y arctgx=0$.

Задача №8. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность, найти точки разрыва функции и определить их тип. Сделать схематический чертеж.

1. $y = \begin{cases} \cos x, & x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & \dfrac{\pi}{2} < x < \pi, \\ x, & x \ge \pi. \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} x+2, & x \le 0, \\ -(x-1)^2, & 0 < x < 2, \\ x-3, & x \ge 2. \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} x^3, & x \le 0, \\ tg\, x, & 0 < x \le \dfrac{\pi}{4}, \\ 3, & x > \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} x+3, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \ge 2. \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} -3x^2, & x \le 0, \\ \sqrt{x}, & 0 < x < 4, \\ 1, & x \ge 4. \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} x^2 - x, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 2, & x > 1. \end{cases}$

7. $y = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ x^3, & 0 \le x \le 1, \\ 2x+1, & x > 1. \end{cases}$

8. $y = \begin{cases} 2x+5, & x < 0, \\ x+1, & 0 \le x \le 4, \\ 3+\sqrt{x}, & x > 4. \end{cases}$

9. $y = \begin{cases} \cos x, & x \le 0, \\ 1+x^2, & 0 < x < 2, \\ x, & x \ge 2. \end{cases}$

10. $y = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \le 1, \\ 2x, & 1 < x \le 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$

Задача №9. Дана функция $z = f(x;y)$, точка $A(x_0;y_0)$**.** Найти частные производные и вычислить их значения в точке A.

$1. z = 2x^2 + xy;$	$A(-1;2).$
$2. z = arctg\,\dfrac{y}{x};$	$A(-1;1).$
$3. z = x^3 y + y^2 x;$	$A(1;3).$
$4. z = \ln(2x + 3y);$	$A(2;2).$
$5. z = 2x^2 + xy;$	$A(1;1).$
$6. z = \dfrac{3x}{y^2};$	$A(3;4).$
$7. z = arctg(xy);$	$A(2;3).$
$8. z = \ln(3x^2 + 2xy^2);$	$A(1;2).$
$9. z = \dfrac{x+y}{x^2+y^2};$	$A(1;-2).$
$10. z = 5x^2 - 2xy + y^2;$	$A(1;1).$