МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

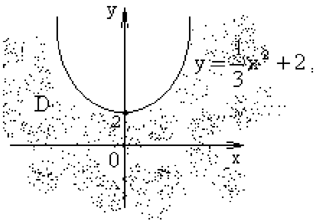
Контрольная работа №3

Темы: «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения»

Тема «Функции нескольких переменных»,

Задание 1. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 - 3y + 6)$.

► Логарифмическая функция определена только при положительном значении аргумента, поэтому $x^2 - 3y + 6 > 0$, или $y < \frac{1}{3}x^2 + 2$, т.е. парабола. Область определения данной функции состоит из внешних точек параболы.◄



Задание 2. Найти частные производные функции $f(x, y, z) = \sqrt{x\,y} \cdot \cos z$ и вычислить значения частных производных $f'_x(M_0)$, $f'_y(M_0)$, $f'_z(M_0)$ для данной функции в точке $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$ с точностью до двух знаков после запятой.

► Находим частные производные данной функции, затем вычисляем их значения в точке $M_0\left(1;1;\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f'_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}_{y,z=C} = \frac{y\cos z}{2\sqrt{x\,y}}\Big|_{\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1\cdot\cos\frac{\pi}{3}}{2\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,;$$

$$f'_y(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}_{x,z=C} = \frac{x\cos z}{2\sqrt{x\,y}}\Big|_{\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1\cdot\cos\frac{\pi}{3}}{2\cdot\sqrt{1\cdot 1}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\,;$$

$$f'_z(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}_{x,y=C} = -\sqrt{x\,y}\sin z\Big|_{\left(1,1,\frac{\pi}{3}\right)} = -\sqrt{1\cdot 1}\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -0{,}86\,.◄$$

Задание 3. Найти полный дифференциал данной функции $z = arctg\sqrt{\frac{x}{y}}$.

► Воспользуемся формулой: $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy$.

Находим частные производные данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}_{y=C} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}\,;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}_{x=C} = \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y}{x+y}\cdot\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(x+y)}\,.$$

$dz=\dfrac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}(x+y)}dx-\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}(x+y)}dy$. ◄

Задание 4. Найти вторые частные производные функции $z=\arccos\sqrt{\dfrac{x}{y}}$.

►Найдём первые частные производные данной функции:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{y=C}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{\text{у}}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}=-\frac{1}{2\sqrt{xy-x^2}};$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{x=C}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y^2-xy}}.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по *x* и по *y*, находим вторые частные производные данной функции:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}}\cdot(y-2x)=\frac{y-2x}{4\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\left(yx-x^2\right)^3}}=\frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sqrt{x}}{2}\left(-\frac{\sqrt{y-x}+\dfrac{y}{2\sqrt{y-x}}}{y^2(y-x)}\right)=-\frac{\sqrt{x}(2x+3y)}{2y^2(y-x)};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{2y}\cdot\frac{\dfrac{\sqrt{y-x}}{2\sqrt{x}}+\dfrac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y-x}}}{y-x}=\frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^2}}.$$

Как видно, смешанные частные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ и $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ равны. ◄

Задание 5. Исследовать на экстремум функцию $z=xy(x+y-2)$.

► Область определения данной функции вся плоскость *XOY*.

Преобразуем функцию z и запишем в виде: $z=x^2y+xy^2-2xy$.

Найдём частные производные первого порядка и критические точки, в которых они равны нулю или не существуют: $z'_x=2xy+y^2-2y$, $z'_y=x^2+2xy-2x$.

Приравнивая их к нулю, получаем систему уравнений $\begin{cases} y(2x+y-2)=0; \\ x(x+2y-2)=0. \end{cases}$

из которой определяем критические точки данной функции: $M_1(0;0)$, $M_2(2;0)$, $M_3(0;2)$, $M_4(2/3;2/3)$. Все точки являются критическими, так как функция *z* определена на всей плоскости *xOy*. Других точек нет, так как z'_x и z'_y существуют при любых значениях *x* и *y*. Далее исследуем критические точки по знаку определителя, составленного из частных производных второго порядка: $z''_{xx}=2y=A$, $z''_{xy}=2x+2y-2=B$, $z''_{yy}=2x=C$. Подставляя в полученные выражения для производных координаты критических точек и используя достаточные условия экстремума, имеем:

для точки M_1: A=2y=0, B=0+0-2=-2, C=0, $\Delta=AC-B^2$=0-4=-4<0, т.е. экстремума нет;

для точки M_2: A=0, B=2, C=4, $\Delta=AC-B^2$=0-4=-4<0, т.е. экстремума нет;
для точки M_3: A=4, B=2, C=0, $\Delta=AC-B^2$=0-4=-4<0, т.е. экстремума нет;
для точки M_4: A=4/3, B=2/3, C=4/3, $\Delta=AC-B^2$=4/3>0, A>0, т.е. имеем точку минимума, в которой $z_{\min} = z(2/3;2/3) = -8/27$.◄

Тема «Дифференциальные уравнения»

Задание 1. Показать, что функция $y = x\,(\ln x^2 + C)$ удовлетворяет уравнению $xy' - y = 2x$.

► Найдём производную данной функции. $y' = \ln x^2 + C + x \cdot \dfrac{2}{x} = 2\ln x + C + 2$.

Подставим данное выражение в заданное уравнение:
$x \cdot (2\ln x + C + 2) - x \cdot (2\ln x + C) = 2x$. Раскрывая скобки, и приводя подобные имеем: $2x=2x$. Получили тождество. Таким образом, данная функция удовлетворяет ззаданному уравнению. ◄

Задание 2. Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения
1. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$
► Преобразуем данное уравнение:
$y(1-x^2)dy = -x(y^2+1)dx$.
Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделяем переменные:
$$\frac{y\,dy}{y^2+1} = \frac{-x\,dx}{1-x^2}.$$
Интегрируем обе части последнего равенства:
$$\int \frac{y\,dy}{y^2+1} = -\int \frac{x\,dx}{1-x^2},$$
$$\frac{1}{2}\ln(y^2+1) = \frac{1}{2}\ln|x^2-1| + \frac{1}{2}\ln C,$$
$y^2+1=C|x^2-1|$,
$y^2=C|x^2-1|-1$.
Следовательно, общим решением исходного уравнения является $y = \pm\sqrt{C|x^2-1|-1}$. ◄

2. $y - x\dfrac{dy}{dx} = x + y\dfrac{dy}{dx}$.
► Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y}.$$
Исходное уравнение является однородным уравнением первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y = tx$. $y' = t'x + t$. Далее находим:
$$t'x + t = \frac{t-1}{t+1},$$
$$t'x = \frac{t-1}{t+1} - t,$$
$t'x = -\dfrac{t^2+1}{t+1}$. Данное уравнение с разделяющимися переменными. Решаем его:
$$\frac{t+1}{t^2+1}dt = -\frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{t\,dt}{t^2+1} + \int \frac{dt}{t^2+1} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\frac{1}{2}\ln|t^2+1| + arctg\,t = -\ln x + \ln C,$$

$$arctg\ t = \ln\frac{C}{x} - \ln\sqrt{t^2+1},$$

$arctg\,\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{|C|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ — общий интеграл исходного уравнения. ◄

№3. $dy - e^{-x}dx + ydx - xdy = xydx$, $y(0)=\ln 5$.

► Определим тип данного уравнения, для этого выразим y':

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + e^{-x} - y}{1-x},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-1)}{1-x} + \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$\dfrac{dy}{dx} + y = \dfrac{e^{-x}}{1-x}$. Полученное уравнение линейное первого порядка. Решаем его с помощью подстановки $y=u(x)v(x)$, $y' = u'v + uv'$. Имеем:

$$u'v + uv' + uv = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$u'v + u(v'+v) = \frac{e^{-x}}{1-x}. \qquad (*)$$

1) Найдём $v(x)$ из условия:

$$v' + v = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} = -v,$$

$$\ln v = -x,$$

$$v = e^{-x}.$$

2) Подставляем
полученное выражение для $v(x)$ в уравнение (*):

$$u'v = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$e^{-x}\frac{du}{dx} = \frac{e^{-x}}{1-x},$$

$$du = \frac{dx}{1-x},$$

$u=-\ln|1-x| + \ln C$,

$$u = \ln\frac{C}{|1-x|}$$

Тогда $y=e^{-x}\cdot\ln\dfrac{C}{|1-x|}$ является общим решением исходного уравнения.

Для нахождения частного решения найдём C, используя начальное условие, т.е.

$$\ln 5 = e^0 \cdot \ln\frac{C}{|1-0|},$$

$\ln 5 = \ln C$.

Следовательно, C=5. Частное решение исходного уравнения имеет вид: $y = e^{-x} \cdot \ln \frac{5}{|1-x|}$.◄

4. $y^3 y'' = -1$, $y(1)$=1, $y'(1) = 0$.

►Данное уравнение второго порядка, допускающее понижение порядка, относящееся к третьему типу (нет явно x). Сделаем замену $y' = p$, $y'' = p \cdot p'$. Тогда

$y^3 \cdot p \cdot p' = -1$. Данное уравнение с разделяющимися переменными.

$$pdp = -\frac{dy}{y^3};$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{y^2} + C_1;$$

$$p^2 = \frac{1}{y^2} + 2C_1;$$

$$p = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}.$$

Возвращаемся к замене, т.е. $y' = \pm\sqrt{\frac{1}{y^2} + 2C_1}$. Из данного уравнения с разделяющимися переменными найдём y.

$$dx = \pm\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}};$$

$$x = \pm\int\frac{y\,dy}{\sqrt{1+2C_1y^2}} + C_2;$$

$$x = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+C_1y^2} + C_2$$ — общее решение исходного уравнения.

Определим значения C_1 и C_2. использовав начальные данные. При x=1, y=1 и $y' = 0$ имеем:

$$1 = \pm\frac{1}{2C_1}\sqrt{1+2C_1} + C_2,$$

$$0 = \pm\sqrt{1+2C_1}.$$

Откуда 1+2C_1=0, $C_1 = -\frac{1}{2}$, C_2=1.

Следовательно, искомое решение имеет вид

$x = \pm\sqrt{1-y^2} + 1$ или $(x-1)^2 + y^2 = 1$.◄

5.1. $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$.

►Данное уравнение — линейное неоднородное. Его решение запишем в виде: $y = \tilde{y} + y^*$.

Найдём $\tilde{y}$ как общее решение однородного линейного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение: $k^2 - 3k - 4 = 0$; k_1=4; k_2= -1.

$\tilde{y} = C_1e^{-x} + C_2e^{4x}$.

Составим y* по функции $f(x)=6xe^{-x}$, стоящей в правой части исходного уравнения. Записываем структуру его частного решения (см. таб.2 II 2. где проверяем α=-1 является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=1)

$y^* = e^{-x}x(Ax+B) = e^{-x}(Ax^2 + Bx)$.

Коэффициенты A и B определим методом неопределённых коэффициентов. Для этого находим:

$(y^*)' = (2Ax+B)e^{-x} - (Ax^2+Bx)e^{-x}$;

$(y^*)'' = 2Ae^{-x} + (Ax^2+Bx)e^{-x} - 2(2Ax+B)e^{-x}$.

Подставим найденные выражения для $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение и, разделив обе его части на e^{-x}, приравняем коэффициенты при x^2, x^1 и x^0. Получим систему, из которой найдём коэффициенты A и B. Таким образом, в соответствии с изложенным: $A = -\dfrac{3}{5}$; $B = -\dfrac{6}{25}$.

Тогда $y^* = -\left(\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{6}{25}x\right)e^{-x}$.

Общее решение данного неоднородного уравнения:

y$= C_1e^{-x} + C_2e^{4x} - \left(\dfrac{3}{5}x^2 + \dfrac{6}{25}x\right)e^{-x}$.◄

5.2. $y'' + y' = 5x + \cos 2x$.

►Данное уравнение — линейное неоднородное. Его решение запишем в виде: $y = \tilde{y} + y^*$.

Найдём $\tilde{y}$ как общее решение однородного линейного уравнения. Для этого составим характеристическое уравнение: $k^2 + k = 0$; k_1=0; k_2= -1.

$\tilde{y} = C_1 + C_2e^{-x}$.

Составим y^* по функции $f(x)$=5x+cos2x, стоящей в правой части исходного уравнения. Данная функция представляет собой сумму функций $f_1(x)=5x$ и $f_2(x)=\cos 2x$. Им соответствуют два частных решения:

$y_1^* = (Ax+B)x = Ax^2 + Bx$ (см. таб.2 I 2. где проверяем α=0 является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=1);

$y_2^* = M\cos 2x + N\sin 2x$ (см. таб.2 IV 1. где проверяем α=$\pm 2i$ является ли корнем характеристического уравнения, следовательно, s=0).

Т.е. $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax^2 + Bx + M\cos 2x + N\sin 2x$.

Находим $(y^*)' = 2Ax + B - 2M\sin 2x + 2N\cos 2x$;

$(y^*)'' = 2A - 4M\cos 2x - 4N\sin 2x$.

Подставляем выражения для $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в исходное уравнение и вычисляем коэффициенты A, B, M, N:

$A = \dfrac{5}{2}$, B= -5; $M = -\dfrac{1}{5}$; $N = \dfrac{1}{10}$.

Таким образом, частное решение исходного уравнения имеет вид

$y^* = \dfrac{5}{2}x^2 - 5x - \dfrac{1}{5}\cos 2x + \dfrac{1}{10}\sin 2x$,

а его общее решение:

$y = C_1 + C_2e^{-x} + \dfrac{5}{2}x^2 - 5x - \dfrac{1}{5}\cos 2x + \dfrac{1}{10}\sin 2x$.◄