МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНОГО ОБУЧЕНИЯ

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

ТЕМЫ: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1. Найти производные $\frac{dx}{dy}$ данных функций:

Найти производные заданных функций $y=f(x)$

1) $f(x)=\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)$; 2) $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$;

3) $y=\left(x^2+6\right)\sqrt{x^2-3}$; 4) $y=\sqrt[3]{\left(x^3+1\right)^2}$;

5) $y=tg\sqrt[3]{\ln x}$; 6) $y=e^{ctg^4 x}$; 7) $y=2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}$;

8) $y=\cos^8 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}$; 9) $x^3+y^3=\sin(x-2y)$;

10) $y\cdot\ln x-x\cdot\ln y=1$.

► 1) Воспользуемся формулой производной произведения $[u\cdot v]'=u'v+uv'$

$f'(x)=\left(x^3-1\right)'\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)\left(x^2+x+1\right)'$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u\pm v\pm w]'=u'\pm v'\pm w'$, производной постоянной $C'=0$, производная степени $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$=3x^2\left(x^2+x+1\right)+\left(x^3-1\right)(2x+1)$

(воспользуемся формулой разность кубов
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$=3x^2\left(x^2+x+1\right)+(x-1)\left(x^2+x+1\right)(2x+1)=\left(x^2+x+1\right)\left[3x^2+(2x+1)(x-1)\right]=$
$\left(x^2+x+1\right)\left(3x^2+2x^2-2x+x-1\right)=\left(x^2+x+1\right)\left(5x^2-x-1\right)$;

2) (воспользуемся формулой производной частного $\left[\frac{u}{v}\right]'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$)

$$y'=\frac{\left(x^2+1\right)'\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

(воспользуемся формулой производной суммы $[u\pm v\pm w]'=u'\pm v'\pm w'$, производной постоянной $C'=0$, производной степени $\left[x^n\right]'=n\cdot x^{n-1}$)

$$=\frac{2x\left(x^2-1\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}$$

(преобразуем данное выражение)

$$=\frac{2x\left(x^2-1-x^2-1\right)}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2};$$

3) (воспользуемся формулой производной произведения $[u\cdot v]'=u'v+uv'$)

$y'=\left(x^2+6\right)'\cdot\sqrt{x^2-3}+\left(x^2+6\right)\cdot\sqrt{x^2-3}'$

(найдём производные в каждом из слагаемых и выполним преобразования)

$$=2x\cdot\sqrt{x^2-3}+\frac{x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x\left(\sqrt{x^2-3}\right)^2+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{2x\cdot\left(x^2-3\right)+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=$$

$$\frac{2x^3-6x+x^3+6x}{\sqrt{x^2-3}}=\frac{3x^3}{\sqrt{x^2-3}};$$

4) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$, заменив кубический корень дробным показателем)

$$y'=\left[\left(x^3+1\right)^{2/3}\right]'=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-1/3}\cdot\left(x^3+1\right)'=\frac{2}{3}\left(x^3+1\right)^{-1/3}\cdot 3x^2=\frac{2x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}};$$

5) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[tg\,u\right]'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$)

$$y'=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\left[\sqrt[3]{\ln x}\right]'$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{3}\left(\ln x\right)^{-2/3}\cdot\left[\ln x\right]'$$

(воспользуемся формулой $\left[\ln u\right]'=\frac{1}{u}\cdot u'$)

$$=\frac{1}{\cos^2\sqrt[3]{\ln x}}\cdot\frac{1}{3}\left(\ln x\right)^{-2/3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3x\cdot\sqrt[3]{\ln^2 x}\cdot\cos^2\sqrt[3]{\ln x}};$$

6) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[e^u\right]'=e^u\cdot u'$)

$$y'=e^{ctg^4 x}\cdot\left[ctg^4 x\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[u^n\right]'=n\cdot u^{n-1}\cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x}\cdot 4\,ctg^3 x\cdot\left[ctg\,x\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[ctg\,u\right]'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$)

$$e^{ctg^4 x}\cdot 4\,ctg^3 x\cdot\frac{-1}{\sin^2 x}=\frac{-4\cdot e^{ctg^4 x}\cdot ctg^3 x}{\sin^2 x};$$

7) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $\left[a^u\right]'=a^u\cdot\ln a$)

$$y'=2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\left[\sqrt{ctg\ln\sin x}\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[\sqrt{u}\right]'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\left[ctg\ln\sin x\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[ctg\,u\right]'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}}\cdot\frac{-1}{\sin^2\ln\sin x}\cdot\left[\ln\sin x\right]'=$$

(воспользуемся формулой $\left[\ln u\right]'=\frac{1}{u}\cdot u'$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \ln\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot [\sin x]' =$$

(воспользуемся формулой $[\sin x]' = \cos x$)

$$2^{\sqrt{ctg\ln\sin x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{ctg\ln\sin x}} \cdot \frac{-1}{\sin^2 \ln\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x;$$

8) (данная функция — сложная, воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$y' = 8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left[tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $[\cos u]' = -\sin u \cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot \left[tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right] =$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left[tg\, e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $[tg\, u]' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot \left[e^{\sqrt[4]{x}}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $[e^u]' = e^u \cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left[\sqrt[4]{x}\right]' =$$

(воспользуемся формулой $[u^n]' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$)

$$8\cos^7 tg^3 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \left(-\sin tg^3 e^{\sqrt[4]{x}}\right) \cdot 3tg^2 e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 e^{\sqrt[4]{x}}} \cdot e^{\sqrt[4]{x}} \cdot \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}};$$

9) Данная функция заданна неявно

(Если из уравнения $F(x,y)=0$ выразить явно переменную y как функцию аргумента x затруднительно, тогда говорят о неявно заданной функции y от аргумента x).

(Для того чтобы найти производную функции заданной неявно надо уравнение $F(x,y)=0$ продифференцировать, считая y функцией от x, и вновь полученное уравнение решить относительно производной y').

Продифференцируем обе части уравнения, учитывая, что y — есть функция от x, получим:

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y) \cdot (1-2y')$ или

$3x^2 + 3y^2 \cdot y' = \cos(x-2y) - 2y' \cdot \cos(x-2y)$.

Отсюда находим y':

$3y^2 \cdot y' + 2y' \cdot \cos(x-2y) = \cos(x-2y) - 3x^2$ или

$y'\left(3y^2 + 2\cos(x-2y)\right) = \cos(x-2y) - 3x^2$, т.е.

$$y' = \frac{\cos(x-2y) - 3x^2}{3y^2 + 2\cos(x-2y)};$$

10) Это уравнение определяет y как неявную функцию x. Дифференцируем по x:

$x_x \cdot \ln y + x \cdot \frac{1}{y} \cdot y'_x - \left(y'_x \cdot \ln x + y \cdot \frac{1}{x}\right) = 0$. Так как $x'_x = 1$, то

$\ln y + \frac{x}{y} y'_x - y'_x \ln x - \frac{y}{x} = 0$, откуда

$y'_x \cdot \left(\frac{x}{y} - \ln x\right) = \frac{y}{x} - \ln y$, т.е. $y'_x = \frac{\frac{y}{x} - \ln y}{\frac{x}{y} - \ln x}$. ◄

Задание 2. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: 1) $y = \sin^2 x$; 2) $y = \ln \sin x$; 3) $x = t^2, y = t^3$; 4) $x = 3\cos 2t, y = \sin t$.

► 1) Найдём первую производную заданной функции $y' = 2\sin x \cdot [\sin x]' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$. Теперь найдём вторую производную $y'' = \cos 2x \cdot 2 = 2\cos 2x$;

2) Найдём первую производную заданной функции $y' = \frac{1}{\sin x} \cdot [\sin x]' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = ctg\, x$.

Теперь найдём вторую производную $y'' = -\frac{1}{\sin^2 x}$;

3) Для нахождения второй производной функции *y=y(x)*, заданной параметрически воспользуемся формулой

($y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$).

Откуда $y''_{xx} = \frac{(t^2)' \cdot (t^3)'' - (t^3)' \cdot (t^2)''}{\left[(t^2)'\right]} = \frac{2t \cdot 6t - 3t^2 \cdot 2}{(2t)^3} = \frac{6t^2}{8t^3} = \frac{3}{4t}$;

4) Воспользуемся формулой

($y''_{xx} = \frac{x'_t \cdot y''_{tt} - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}$)

$$y''_{xx} = \frac{\sin t \cdot 6\sin 2t + 12\cos 2t \cdot \cos t}{-216\sin^3 2t} = \frac{6\cos t + 6\cos 2t \cdot \cos t}{-216\sin^3 2t} = \frac{6\cos t(1 + \cos 2t)}{-216\sin^3 2t} =$$

$$\frac{12\cos^3 t}{-216 \cdot 2\sin^3 t\cos^3 t} = \frac{-1}{36\sin^3 t}.$$ ◄

Задание 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции: $f(x) = x^2 - 6x + 13$, на отрезке $[0;\ 5]$.

► Область определения данной функции $D(y) = R$.

Найдем критические точки первого рода, т.е. $f'(x) = 2x - 6$; $2x - 6 = 0$; $x = 3 \in [0; 5]$, тогда $f(3) = 4$.

Вычислим значения функции на концах отрезка $[0;5]$, т.е. $f(0) = 13$; $f(5) = 8$.

Среди всех вычисленных значений функции выберем наибольшее и наименьшее: $f_{наим}(3) = 4$; $f_{наиб}(0) = 13$. ◄

Задание 4. Исследовать методами дифференциального исчисления функции а) $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$, б) $y = \sqrt[3]{x^2} - x$; используя результаты исследования, построить ее график:

► а) Область определения функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$: $D(y) = R / \{\pm 2\}$.

Исследуем поведение функции в граничных точках области определения и при $\tilde{o} \to \pm\infty$:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$, т.е. при $x \to \pm\infty$ функция стремится к $\pm\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2-0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty$, т.е. при $x\to-2-0$ функция стремится к $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to-2+0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty$, т.е. при $x\to-2+0$ функция стремится к $+\infty$;

$\lim\limits_{x\to2-0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty$, т.е. при $x\to2-0$ функция стремится к $-\infty$;

$\lim\limits_{x\to2+0}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty$, т.е. при $x\to2+0$ функция стремится к $+\infty$.

Выясним чётность и периодичность: $y(-x)=\dfrac{-x^3}{x^2-4}=-y(x)$, т.е. функция нечетна; функция не является периодической.

Найдем асимптоты функции:

вертикальные асимптоты: $x=\pm 2$, т.к. $\lim\limits_{x\to\pm2}\dfrac{x^3}{x^2-4}=\pm\infty$;

наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^3}{x^3-4x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=1$,

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^3}{x^2-4}-x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x}{x^2-4}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=0$, т.е. $y=x$ — наклонная асимптота;

горизонтальных асимптот нет.

Точки пересечения графика с осями координат:

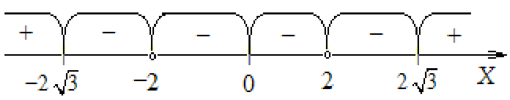
с осью OX: $\dfrac{x^3}{x^2-4}=0$; $x=0$, т.е. $(0;0)$;

с осью OY: $\dfrac{0^3}{0^2-4}=0$, т.е. $(0;0)$.

Найдем точки экстремума и интервалы монотонности:

$$y'=\frac{3x^2\left(x^2-4\right)-x^3\cdot 2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2};$$

$\dfrac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=0$; $x^2=0$; $x=\pm 2\sqrt{3}$; $x\neq\pm 2$ — критические точки I рода.



Функция

на интервале $\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)$ и $\left(2\sqrt{3};\infty\right)$ возрастает;

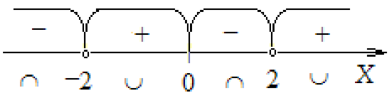
на интервале $\left(-2\sqrt{3};-2\right)$, $(-2;0)$, $(0;2)$, $\left(2;2\sqrt{3}\right)$ убывает, тогда $x=-2\sqrt{3}$ — максимум; $y\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}$; $x=2\sqrt{3}$ — минимум; $y\left(2\sqrt{3}\right)=3\sqrt{3}$.

Найдем точки перегиба функции и интервалы выпуклости и вогнутости:

$$y''=\frac{\left(4x^3-24x\right)\left(x^2-4\right)^2-\left(x^4-12x^2\right)2\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^4}=$$

$$=\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3};$$

$\frac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0$; $x=0$, $x\neq\pm 2$ — критические точки II рода.

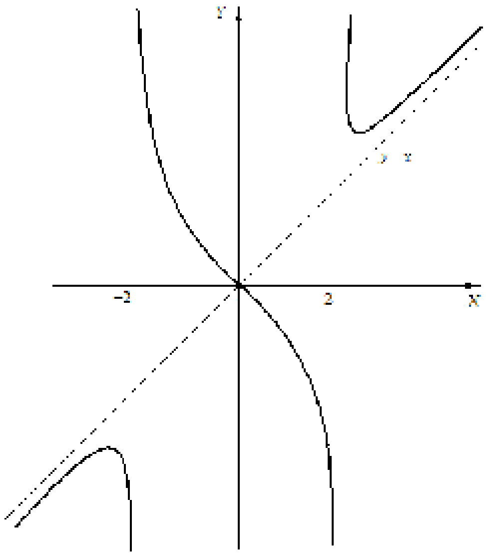


Функция

на интервале $(-\infty;-2)$, $(0;2)$ выпукла;

на интервале $(-2;0)$, $(2;\infty)$ вогнута, тогда $x=0$ — точка перегиба; $y(0)=0$.

Построим эскиз графика функции $y=\frac{x^3}{x^2-4}$.



б) Область определения функции $y=\sqrt[3]{x^2}-x$: $D(y)=R$.

Исследуем поведение функции:

при $x\to-\infty$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-x\right)=\infty$, т.е. функция стремится к ∞;

при $x\to\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)=\infty(-1)=-\infty$, т.е. функция стремится к $-\infty$.

Функция общего вида, т.к. $y(-x)=\sqrt[3]{(-x)^2}-(-x)=\sqrt[3]{x^2}+x$; функция не является периодической.

Найдем асимптоты: вертикальных асимптот нет, т.к. нет точек разрыва;

наклонные асимптоты: $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2}-x}{x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-1\right)}{x}=-1$;

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\sqrt[3]{x^2}-x+x\right]=\infty$, т.е. наклонных и горизонтальных асимптот кривая не имеет.

Точки пересечения графика с осями координат:

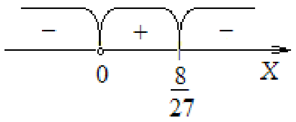
с осью OX: $y=0$; $\sqrt[3]{x^2}-x=0$, $\sqrt[3]{x^2}\left(1-\sqrt[3]{x}\right)=0$, $x_1=0$ и $x_2=1$, т.е. $(0;0)$ и $(1;0)$;

с осью OY: $x=0$, $y=0$, т.е. $(0;0)$.

Найдем точки экстремума функции и интервалы монотонности:

$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}}$;

$\frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{3\sqrt[3]{x}} = 0$; $x = \frac{8}{27}$, $x \neq 0$ — критические точки I рода.



Функция

на интервале $(-\infty;0)$, $\left(\frac{8}{27};\infty\right)$ убывает;

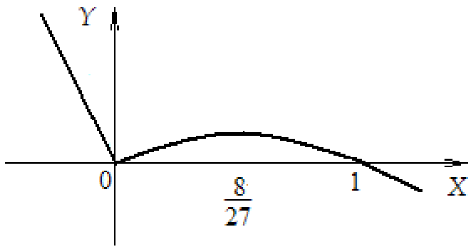
на интервале $\left(0;\frac{8}{27}\right)$ возрастает, тогда $x=0$ — минимум, $y(0)=0$;

$x = \frac{8}{27}$ — максимум, $y\left(\frac{8}{27}\right) = \frac{4}{27}$.

Найдем точки перегиба функции и интервалы выпуклости и вогнутости:

$y'' = \left(\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} - 1\right)' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$ всегда отрицательна, значит, точек перегиба нет, кривая всегда выпукла.

Построим эскиз графика функции $\sqrt[3]{x^2} - x$.



◄

Задание 5. Найти пределы функций по правилу Лопиталя: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctg\,2x}$; 3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{100}}{e^x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{ctg\,x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

► 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(x^3\right)'}{\left(x-\sin x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(3x^2\right)'}{\left(1-\cos x\right)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{6}{\cos x} = 6$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{ctg\,2x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(ctg\,2x)'} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{\sin^2 2x}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{-2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\sin^2 2x\right)'}{(-2x)'} = -\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 2x\cos 2x}{2} = -\lim\limits_{x\to 0}\sin 4x = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^{100}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left(x^{100}\right)'}{\left(e^x\right)'} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{100x^{99}}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(100x^{99}\right)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{100\cdot 99x^{98}}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(100\cdot 99x^{98}\right)'}{\left(e^x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{100\cdot 99\cdot 98x^{97}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{100!}{e^x}=0;$$

4) $\lim_{x\to1}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{1}{x-1}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to1}\frac{2-(x+1)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2-x-1}{x^2-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to1}\frac{-1}{2x}=-\frac{1}{2};$

5) $\lim_{x\to0^+}x\cdot\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{x}=-\lim_{x\to0^+}x=0;$

6) $\lim_{x\to0}(1+x)^{ctg\,x}=\left[1^\infty\right]=\left|\begin{array}{l}f(x)^{g(x)}=(1+x)^{ctgx}=\\=e^{\ln(1+x)^{ctgx}}=e^{ctg\,x\ln(1+x)}\\x>-1\end{array}\right|=\lim_{x\to0}e^{ctg\,x\ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to0}ctg\,x\ln(1+x)};$

Вычислим $\lim_{x\to0}ctg\,x\cdot\ln(1+x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{tg\,x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to0}\frac{\cos^2 x}{1+x}=1.$ Окончательно имеем: $\lim_{x\to0}(1+x)^{ctg\,x}=e^{\lim\limits_{x\to0}ctg\,x\ln(1+x)}=e^1=e;$

7) $\lim_{x\to0}x^{\sin x}=\left[0^0\right]=\left|\begin{array}{l}f(x)^{g(x)}=x^{\sin x}=\\=e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\sin x\ln x}\\x>0\end{array}\right|=\lim_{x\to0}e^{\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln x};$

Вычислим $\lim_{x\to0}\sin x\cdot\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}=$

$=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=\left[\frac{0}{0}\right]=-\lim_{x\to0}\frac{2\sin x\cdot\cos x}{\cos x-x\cdot\sin x}=0.$

Окончательно имеем: $\lim_{x\to0}x^{\sin x}=e^{\lim\limits_{x\to0}0}=e^0=1$. ◄

Задание 6. Найти неопределенные интегралы.

1) $\int\frac{3-2x^4+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}}dx$; 2) $\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(4-8x)^2}}$; 3) $\int\cos(2-5x)\,dx$;

4) $\int\frac{3\,dx}{\sqrt{4x^2-3}}$; 5) $\int\frac{7x\,dx}{3x^2+4}$; 6) $\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}$.;

7) $\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx$; 8) $\int\frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}$; 9) $\int\frac{3x+10}{6x^2-4}dx$;

10) $\int\frac{3-7x}{4x^2+5}dx$; 11) $\int\frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)}$; 12) $\int(x-7)\sin 5x\,dx$;

13) $\int x\cdot e^{x-7}\,dx$; 14) $\int\left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}\,dx$;

15) $\int\cos^3(7x+2)\,dx$; 16) $\int ctg^4 5x\,dx$;

17) $\int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1}$; 18) $\int \frac{\mathrm{dx}}{6\mathrm{x}^2 - 3x + 2}$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{5x^2 + 2x - 7}}$; 20) $\int \frac{3x^4 - 4x}{x^2 + 1}\, dx$;

21) $\int \frac{7x - \mathrm{x}^2 - 4}{(x+1)\left(x^2 - 5x + 6\right)}\, dx$;

22) $\int \frac{x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 43x + 27}{(x-2)\left(x^2 - 2x + 5\right)}\, dx$; 23) $\int \mathrm{x}^2 \sqrt{16 - x^2}\, dx$.

Решение: При нахождении интегралов следует помнить свойства и таблицу простейших неопределённых интегралов

(Свойства неопределённого интеграла:

1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\mathrm{d}\int \mathrm{f(x)\,dx} = \mathrm{d}\left[\mathrm{F(x) + C}\right] = F'(x)\,dx = f(x)\,dx, \qquad (1)$$

$$\int \mathrm{d\,F(x)} = \int \mathrm{F'(x)\,dx} = \int \mathrm{f(x)\,dx} = \mathrm{F(x) + C}. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что символы дифференциала и неопределённого интеграла, применённые последовательно, «уничтожают» друг друга (равенство (2) справедливо с точностью до постоянного).

2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int \mathrm{d}\varphi(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}) + \mathrm{C}. \qquad (3)$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределённого интеграла:

$$\int \mathrm{k \cdot f(x)dx} = \mathrm{k} \cdot \int \mathrm{f(x)dx} \qquad (\mathrm{k=const}) \qquad (3)$$

4. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$имеют первообразные, то функция $f_1(x)+f_2(x)$ также имеет первообразную, причём

$$\int \left(\mathrm{f_1(x) + f_2(x)}\right)\mathrm{dx} = \int \mathrm{f_1(x)dx} + \int \mathrm{f_2(x)dx}. \qquad (4)$$

Таблица простейших неопределённых интегралов:

$$\int \mathbf{0 \cdot dx = C}; \qquad [1]$$

$$\int \mathbf{dx = x + C}; \qquad [2]$$

$$\int \mathbf{u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C}; \qquad [3]$$

$$\int \mathbf{\frac{du}{u} = \ln|u| + C}; \qquad [4]$$

$$\int \mathbf{a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C}; \qquad [5]$$

$$\int \mathbf{e^u du = e^u + C}; \qquad [6]$$

$$\int \mathbf{\sin u\, du = -\cos u + C}; \qquad [7]$$

$$\int \mathbf{\cos u\, du = \sin u + C}; \qquad [8]$$

$$\int \mathbf{\frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C}; \qquad [9]$$

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} = tg\, u + C; \qquad [10]$$

$$\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C; \qquad [11]$$

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C; \qquad [12]$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C_1; \qquad [13]$$

$$\int \frac{u\, du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = -\sqrt{a^2 - u^2} + C; \qquad [14]$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln|\, u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\, | + C; \qquad [15]$$

$$\int \frac{u\, du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \sqrt{u^2 + a^2} + C; \qquad [16]$$

$$\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u - a}{u + a}\right| + C; \qquad [17]$$

$$\int \frac{u\, du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2}\ln|\, u^2 - a^2\, | + C; \qquad [18]$$

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C_1; \qquad [19]$$

$$\int \frac{u\, du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{2}\ln|\, a^2 + u^2\, | + C; \qquad [20]$$

$$\int tg\, u\, du = \int \frac{\sin u}{\cos u} du = -\ln|\cos u| + C; \qquad [21]$$

$$\int ctg\, u\, du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du = \ln|\sin u| + C; \qquad [22]$$

$$\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C; \qquad [23]$$

$$\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C; \qquad [24])$$

1) $\int \frac{3 - 2x^4 + \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[4]{x}} dx = 3\int x^{-1/4} dx - 2\int x^{15/4} dx + \int x^{5/12} dx = 3 \cdot \frac{x^{-1/4+1}}{\frac{3}{4}} - 2 \cdot \frac{x^{15/4+1}}{\frac{19}{4}} + \frac{x^{5/12+1}}{\frac{17}{12}} + C =$

$= 4\sqrt[4]{x^3} - \frac{8}{19}x^4\sqrt[4]{x^3} + \frac{12}{17}x\sqrt[12]{x^5} + C;$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(4 - 8x)^2}} = -\frac{1}{8}\frac{(4 - 8x)^{-2/5+1}}{\frac{3}{5}} + C = -\frac{5}{24}\sqrt[5]{(4 - 8x)^3} + C;$

3) $\int \cos(2 - 5x)\, dx = -\frac{1}{5}\sin(2 - 5x) + C;$

4) $\int \frac{3\, dx}{\sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \frac{3}{4}}} =$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-\frac{3}{4}}\right|+C=\frac{3}{2}\ln\left|2x+\sqrt{4x^2-3}\right|+C.$$

5) $$\int\frac{7x\,dx}{3x^2+4}=\left|\begin{array}{l}u=3x^2+4\\ dx=6x\,dx\\ x\,dx=\dfrac{du}{6}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{7}{6}\int\frac{du}{u}=\frac{7}{6}\ln|u|+C=\frac{7}{6}\ln\left|3x^2+4\right|+C.$$

6) $$\int\frac{dx}{\sqrt{6-5x^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{6}{5}-x^2}}=\frac{1}{\sqrt5}\arcsin\frac{\sqrt5\,x}{\sqrt6}+C;$$

7). $$\int\frac{\sqrt[7]{\ln^3(x+2)}}{x+2}dx=\left|\begin{array}{l}u=\ln(x+2)\\ du=\dfrac{dx}{x+2}\end{array}\right|=\int u^{3/7}\,du=\frac{7}{10}u^{10/7}+C=\frac{7}{10}\sqrt[7]{\left(\ln(x+2)\right)^{10}}+C;$$

8) $$\int\frac{\cos 3x\,dx}{\sqrt[5]{\sin 3x-4}}=\left|\begin{array}{l}u=\sin 3x-4\\ du=3\cos 3x\,dx\\ \cos 3x\,dx=\dfrac{du}{3}\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{du}{u^{1/5}}=\frac{1}{3}\frac{5}{4}u^{4/5}+C=\frac{5}{12}\sqrt[5]{\left(\sin 3x-4\right)^4}+C;$$

9) $$\int\frac{3x+10}{6x^2-4}dx=\int\frac{3x}{6x^2-4}dx+\int\frac{10}{6x^2-4}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=6x^2-4\\ du=12x\,dx\\ 3x\,dx=\dfrac{du}{4}\end{array}\right|=\frac{1}{4}\int\frac{du}{u}+\frac{10}{\sqrt6}\int\frac{dx}{x^2-\frac{4}{6}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln|u|+\frac{10}{\sqrt6}\frac{1}{2\cdot2}\ln\left|\frac{\sqrt6x-2}{\sqrt6x+2}\right|+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|6x^2-4\right|+\frac{5}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{\sqrt6x-2}{\sqrt6x+2}\right|+C.$$

10) $$\int\frac{3-7x}{4x^2+5}dx=\int\frac{3}{4x^2+5}dx-\int\frac{7x}{4x^2+5}dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l}u=4x^2+5\\ du=8x\,dx\\ x\,dx=\dfrac{du}{8}\end{array}\right|=\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x^2+\frac{5}{4}}-\frac{7}{8}\int\frac{du}{u}=$$

$$=\frac{3}{4}\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt5}-\frac{7}{8}\ln|u|+C=\frac{3}{2\sqrt5}\operatorname{arctg}\frac{2x}{\sqrt5}-\frac{7}{8}\ln\left|4x^2+5\right|+C$$

$$11)\ \int \frac{dx}{e^{3x}\left(2-e^{-3x}\right)} = \left| \begin{matrix} u = 2-e^{-3x} \\ du = \dfrac{3\,dx}{e^{3x}} \\ \dfrac{dx}{e^{3x}} = \dfrac{du}{3} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln|u| + C = \frac{1}{3}\ln\left|2-e^{-3x}\right| + C;$$

$$12)\ \int (x-7)\sin 5x\ dx = \left| \begin{matrix} u = x-7 & du = dx \\ dv = \sin 5x\ dx & v = -\dfrac{1}{5}\cos 5x \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x + \int \cos 5x\ dx = -\frac{x-7}{5}\cdot\cos 5x + \frac{1}{25}\sin 5x + C;$$

$$13)\ \int x\cdot e^{x-7}\ dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^{x-7} & v = e^{x-7} \end{matrix} \right| =$$

$$= x\cdot e^{x-7} - \int e^{x-7}dx = x\cdot e^{x-7} - e^{x-7} + C;$$

$$14)\ \int \left(x^2-4x+3\right)e^{-2x}\ dx = \left| \begin{matrix} u = x^2-4x+3 & du = (2x-4)dx \\ dv = e^{-2x} & v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| =$$

$$= -\frac{x^2-4x+3}{2}\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}(2x-4)\ dx = -\frac{x^2-4x+3}{2}\cdot e^{-2x} + \int e^{-2x}(x-2)\ dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x-2 & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = -\dfrac{1}{2}e^{-2x} \end{matrix} \right| = -\frac{x^2-4x+3}{2}\cdot e^{-2x} - \frac{x-2}{2}\cdot e^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{x^2-4x+3}{2}\cdot e^{-2x} - \frac{x-2}{2}\cdot e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C;$$

$$15)\ \int \cos^3(7x+2)\ dx = \int \cos^2(7x+2)\cdot\cos(7x+2)\ dx = \int \left(1-\sin^2(7x+2)\right)\cdot\cos(7x+2)\ dx =$$

$$= \int \cos(7x+2)\ dx - \int \sin^2(7x+2)\cdot\cos(7x+2)\ dx = \frac{1}{7}\sin(7x+2) - \frac{1}{21}\sin^3(7x+2) + C;$$

$$16)\ \int \mathrm{ctg}^4 5x\ dx = \int \mathrm{ctg}^2 5x\cdot\mathrm{ctg}^2 5x\ dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{\sin^2 5x} - 1\right)\cdot\mathrm{ctg}^2 5x\ dx = \int \frac{\mathrm{ctg}^2 5x\ dx}{\sin^2 5x} - \int \mathrm{ctg}^2 5x\ dx =$$

$$= -\frac{\mathrm{ctg}^3 5x}{15} + \frac{\mathrm{ctg}\,5x}{5} + x + C;$$

$$17)\ \int \frac{dx}{3\sin x - 2\cos x + 1} = \left| \begin{matrix} t = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} & \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2\,dt}{1+t^2} & \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int \frac{dt}{3t^2+6t-1} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \dfrac{4}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}t+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}t+\sqrt{3}+2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{6}\ln\left|\frac{\sqrt{3}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}\mathrm{tg}\dfrac{x}{2}+\sqrt{3}+2}\right| + C;$$

$$18)\ \int \frac{dx}{6x^2-3x+2}=\left|\begin{array}{l} 6x^2-3x+2=6\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{13}{48}\right] \\ u=x-\frac{1}{4};\ du=dx;\quad a=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{48}}. \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\int \frac{du}{u^2+\frac{13}{48}}=\frac{1}{6}\frac{1}{\sqrt{\frac{13}{48}}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{\frac{13}{48}}}=\frac{1}{6}\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{13}}\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{3}(x-1/4)}{\sqrt{13}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{13}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}(4x-1)}{\sqrt{13}}+C;$$

$$19)\ \int \frac{dx}{\sqrt{5x^2+2x-7}}=$$

$$=\left|\begin{array}{l} 5\left(x^2+\frac{2}{5}x-\frac{7}{5}\right)=5\left[\left(x+\frac{1}{5}\right)^2-\frac{36}{25}\right]; \\ u=x+\frac{1}{5};\quad du=dx;\quad a=\frac{6}{5}. \end{array}\right|=\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{du}{\sqrt{u^2-\frac{36}{25}}};$$

$$20)\ \int \frac{3x^4-4x}{x^2+1}\,dx=$$

$$=\left|\frac{3x^4-4x}{x^2+1}=3x^2+3x-\frac{x}{x^2+1}\right|=3\int x^2dx+3\int x\,dx-\int \frac{x\,dx}{x^2+1}=$$

$$=x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C;$$

$$21)\ \int \frac{7x-x^2-4}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}\,dx=$$

$$\left|\begin{array}{l} \frac{7x-x^2-4}{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}=\frac{7x-x^2-4}{(x+1)(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} \\ 7x-x^2-4\equiv A(x-2)(x-3)+B(x+1)(x-3)+C(x+1)(x-2) \\ \begin{array}{c|l} x=-1 & -12=A(-3)(-4)\Rightarrow A=-1 \\ x=2 & 6=B\cdot 3\cdot(-1)\Rightarrow B=-2 \\ x=3 & 8=C\cdot 4\cdot 1\Rightarrow C=2 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$-\int \frac{dx}{x+1}-2\int \frac{dx}{x-2}+2\int \frac{dx}{x-3}==-\ln|x+1|-2\ln|x-2|+2\ln|x-3|+C;$$

$$22)\ \int \frac{x^4-8x^3+23x^2-43x+27}{(x-2)\left(x^2-2x+5\right)}\,dx=$$

$$=\left|\begin{array}{l} x^4-8x^3+23x^2-43x+27=x-4+\dfrac{-2x^2+3x-13}{(x-2)\left(x^2-2x+5\right)}; \\ \dfrac{-2x^2+3x-13}{(x-2)\left(x^2-2x+5\right)}=\dfrac{A}{x-2}+\dfrac{Bx+C}{x^2-2x+5} \\ -2x^2+3x-13\equiv A\left(x^2-2x+5\right)+(Bx+C)(x-2) \\ \begin{array}{l|lc} x^2 & -2=A+B & A=-3 \\ x^1 & 3=-2A-2B+C & B=1 \\ x^0 & -13=5A-2C & C=-1 \end{array} \end{array}\right|=$$

$$=\int x\,dx-4\int dx-3\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{x-1}{x^2-2x+5}\,dx=\int x\,dx-4\int dx-3\int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{x}{(x-1)^2+4}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}-4x-3\ln|x-2|+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+5|+C;$$

23) $$\int x^2\sqrt{16-x^2}\,dx=\left|\begin{array}{l} x=4\sin t;\ dx=4\cos t\,dt; \\ \sin t=\dfrac{x}{4};\quad t=\arcsin\dfrac{x}{4}. \end{array}\right|=$$

$$=\int 16\sin^2 t\sqrt{16-16\sin^2 t}\,4\cos t\,dt=256\int\sin^2 t\cos^2 t\,dt=$$

$$=64\int\sin^2 2t\,dt=32\int(1-\cos 4t)dt=32t-8\sin 4t+C=32\arcsin\frac{x}{4}-8\sin 4\left(\arcsin\frac{x}{4}\right)+C=$$

$$=32\arcsin\frac{x}{4}-\frac{x}{4}\left(8-x^2\right)\sqrt{16-x^2}+C.$$

Задание 7. Вычислить определённые интегралы: 1) $\int\limits_1^2\frac{dx}{x(1+x^2)}$; 2) $\int\limits_1^e \ln^2 x\,dx$; 3) $\int\limits_3^4\frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx$; 4) $\int\limits_0^1\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 5) $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$; 6) $\int\limits_0^1\frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$; 7) $\int\limits_{2/3}^{10/3}\frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}$.

►1) Используя формулу Ньютона-Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx-F(b)-F(a)$, вычисляем интеграл от дробно-рациональной функции:

$$\int\limits_1^2\frac{dx}{x(1+x^2)}=\left|\begin{array}{l} \dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{1+x^2} \\ 1\equiv A(1+x^2)+(Bx+C)x \\ \begin{array}{l|lc} x^2 & A+B=0; & A=1 \\ x & C=0; & B=-1 \\ x^0 & A=1 & C=0 \end{array} \end{array}\right|=\int\limits_1^2\frac{dx}{x}-\int\limits_1^2\frac{x\,dx}{1+x^2}=$$

$$=\ln|x|\Big|_1^2-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=0{,}24;$$

2) Дважды применив метод интегрирования по частям, получим

$$\int_1^e \ln^2 x\,dx = \left|\begin{matrix} u=\ln^2 x & du=\dfrac{2\ln x}{x}dx \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right| = x\ln^2 x\Big|_1^e - 2\int_1^e \ln x\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=dx & v=x \end{matrix}\right| = e\ln^2 e - 2(x\ln x - x)\Big|_1^e = e\text{-}2=0{,}72;$$

3) Подынтегральная функция представляет собой правильную рациональную дробь. Разложив знаменатель на простые множители, а затем полученную дробь — на простые дроби имеем: $\int_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx =$

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2} = \dfrac{9x^2-14x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)} = \dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{x-2} \\ 9x^2-14x+1 \equiv A(x-1)(x-2)+B(x+1)((x-2)+C(x+1)(x-1) \\ \begin{array}{r|ll} x=-1 & 24=6A & A=4 \\ x=1 & -4=-2B & B=2 \\ x=2 & 9=3C & C=3 \end{array} \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{4}{x+1}+\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}\right)dx =$$

$$= \left(4\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2|\right)\Big|_3^4 = \ln\frac{5^4\cdot 3^2\cdot 2}{4^4} = 3{,}78;$$

4) $\int_0^1 \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left|\begin{matrix} \sqrt{x^2+1} & x^2+1=t^2 & x\,dx=t\,dt \\ t=1; \quad x=0 & & t=\sqrt{2}; \quad x=1 \end{matrix}\right| =$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{(t^2-1)t}{t}dt = \int_1^{\sqrt{2}} (t^2-1)dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - t\right)\Big|_1^{\sqrt{2}} = 0{,}2;$$

5) Подынтегральная функция является чётной относительно sin$x$ и cos$x$, применим подстановку t=tg$x$:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x} = \left|\begin{matrix} t=tgx & dx=\dfrac{dt}{1+t^2} \\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2} & \sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2} \\ t=0; \quad x=0 & t=1; \quad x=\frac{\pi}{4} \end{matrix}\right| =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)\left(4-\dfrac{3}{1+t^2}+\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right)} = \int_0^1 \frac{dt}{9t^2+1} = \frac{1}{3}arctg3t\Big|_0^1 = 0{,}42;$$

6) Разобьём данный интеграл на два интеграла таким образом, чтобы получить в числителе первого производную от квадратного трёхчлена, стоящего под знаком радикала в знаменателе, и проведём необходимые преобразования.
$\int_0^1 \frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx = -4\int_0^1 \frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx - 19\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-(x+1)^2}} =$

$$=-8\sqrt{3-2x-x^2}\Big|_0^1-19\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^1=8\sqrt{3}-\frac{19}{2}\pi+\frac{19}{6}\pi=\text{-6,05};$$

$$7)\ \int_{2/3}^{10/3}\frac{x\,dx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}=\left|\begin{matrix}\sqrt{3x-1}=t & t=1 & x=2/3\\ x=\frac{1}{3}(t^2+1) & t=3 & x=10/3\\ dx=\frac{2}{3}t\,dt & & \end{matrix}\right|=$$

$$=\int_1^3\frac{\frac{1}{3}(t^2+1)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t^2\cdot t}=\frac{2}{9}\int_1^3\frac{t^3+t}{t^3}dt=\frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Big|_1^3=0{,}59.◄$$

Задание 8. Исследовать на сходимость несобственный интеграл 1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$;

2) $\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

► 1) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9}+\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}=\lim_{a\to-\infty}\int_a^0\frac{dx}{(x+2)^2+5}+\lim_{b\to+\infty}\int_0^b\frac{dx}{(x+2)^2+5}=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_a^0+\lim_{b\to+\infty}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Big|_0^b=$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{a+2}{\sqrt{5}}\right)+\lim_{b\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{b+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

2) $$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\lim_{b\to0-}\int_{-1}^{b}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim_{a\to0+}\int_a^1\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{b\to0-}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_{-1}^{b}+\lim_{a\to0+}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Big|_a^1=157{,}43.◄$$

Задание 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-6x+5$ и прямой $y=x-1$. Сделать чертеж.

► Построим параболу и прямую.

Для построения параболы найдем координаты ее вершины и точки пересечения ее с осями координат. Вершина параболы является точкой экстремума, поэтому для ее отыскания найдем производную и приравняем ее к нулю: $y'=\left(x^2-6x+5\right)'=2x-6$; $2x-6=0$; $x=3$.

Тогда $y(3)=3^2-6\cdot3+5=9-18+5=-4$.

Итак, вершина параболы в точке $(3;-4)$.

Точки пересечения параболы с осью OX: $y=0$, тогда $x^2-6x+5=0$, откуда $x_1=1$; $x_2=5$, то есть точки $(1;0)$и $(5;0)$.

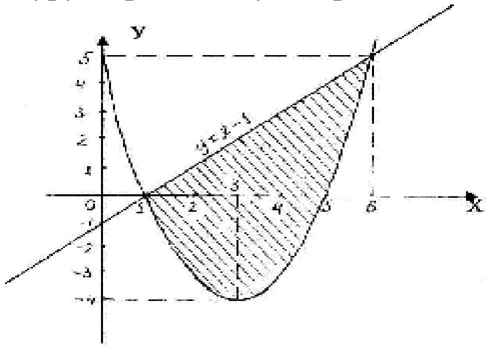
Точка пересечения с осью OН: $x=0$, тогда $y=5$; то есть точка $(0;5)$.

Строим параболу по найденным точкам, замечая, что ветви параболы направлены вверх.

Прямую $y=x-1$ строим по двум точкам:

x	0	1
y	-1	0

Заштрихуем плоскую фигуру, ограниченную параболой и прямой.



Найдем точки пересечения параболы и прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = x^2 - 6x + 5 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 6 = 25; \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{2}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = 6.$$

Для отыскания искомой площади воспользуемся формулой: $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] \cdot dx$, где функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничивают фигуру соответственно снизу и сверху, то есть $f_2(x) > f_1(x)$ при $x \in [a;b]$.

В нашей задаче $f_1(x) = x^2 - 6x + 5$ а $f_2(x) = x - 1$; $x \in [1;6]$, поэтому

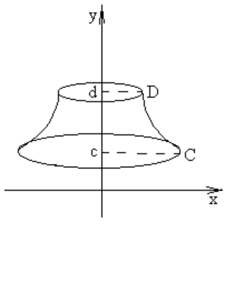
$$S = \int_1^6 [(x-1) - (x^2 - 6x + 5)] \cdot dx = \int_1^6 (-x^2 + 7x - 6) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - 6x \right]_1^6 = \left(-\frac{216}{3} + 7 \cdot \frac{36}{2} - 36 \right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{7}{2} - 6 \right) = \frac{125}{6}.$$ ◄

Задание 10. Вычислить объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* фигуры, лежащей в плоскости *xOy* и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, x=0;

► Для вычисления объёма воспользуемся соответствующей формулой

(Объём тела, полученного вращением вокруг оси *Oy* криволинейной трапеции *CcdD,*



ограниченной дугой *CD* кривой y=φ (y) ($\varphi(y) \geq 0$) и прямыми y=c и y=d, вычисляется по формуле: $\mathbf{V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2 dy}$)

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_{-2}^{2} (4 - y^2)^2 \, dy =$$

$$= 2\pi \int_0^2 (4 - y^2)^2 \, dy = 2\pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) \, dy =$$

$$= 2\pi \left(16y - \frac{8}{3} y^3 + \frac{y^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = 2\pi \left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5} \right) = \frac{512\pi}{15} \approx 107{,}23$$ ◄