МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

ТЕМЫ: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Математический анализ функции одной переменной»

Задание 1. Даны матрицы A, B, C и числа α и β. Найти $\alpha \cdot A^2 + \beta \cdot BC$ если $A=\begin{pmatrix}5 & -4 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $\alpha=2$, $\beta=-3$.

► При заданных значениях требуемое выражение имеет вид: $\alpha \cdot A^2 + \beta \cdot BC = 2\cdot A^2 - 3\cdot B\cdot C$.

Найдем

$$A^2=\begin{pmatrix}5 & -4 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & -4 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25-4+0 & -20-8+12 & 20-8+16\\ 5+2+0 & -4+4+6 & 4+4+8\\ 0+3+0 & 0+6+12 & 0+6+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}21 & -16 & 28\\ 7 & 6 & 16\\ 3 & 18 & 22\end{pmatrix};$$

$$2A^2=2\cdot\begin{pmatrix}21 & -16 & 28\\ 7 & 6 & 16\\ 3 & 18 & 22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42 & -32 & 56\\ 14 & 12 & 32\\ 6 & 36 & 44\end{pmatrix};$$

$$B\cdot C=\begin{pmatrix}-4 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 3\\ 3 & 2 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4+0-2 & -8+0+1 & 12+0+3\\ 2-2-6 & 4+0+3 & -6-1+9\\ 3+4-4 & 6+0+2 & -9+2+6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -7 & 15\\ -6 & 7 & 2\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix};$$

$$3\cdot B\cdot C=3\begin{pmatrix}-6 & -7 & 15\\ -6 & 7 & 2\\ 3 & 8 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-18 & -21 & 45\\ -18 & 21 & 6\\ 9 & 24 & -3\end{pmatrix};$$

$$2\cdot A^2-3\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}42 & -32 & 56\\ 14 & 12 & 32\\ 6 & 36 & 44\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-18 & -21 & 45\\ -18 & 21 & 6\\ 9 & 24 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}60 & -11 & 11\\ 32 & -9 & 26\\ -3 & 12 & 47\end{pmatrix}.◄$$

Задание 2. Доказать совместность системы линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+5x_2-x_3=3;\\ 2x_1+4x_2-3x_3=2;\\ 3x_1-x_2-3x_3=-7.\end{cases}$$

и решить ее: а) по правилу Крамера; б) методом Гаусса; в) матричным методом.

Дана система линейных алгебраических уравнений

► Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера-Капелли. С помощью элементарных преобразований найдём ранги основной матрицы A и расширенной матрицы $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 2 & 4 & -3 & 2\\ 3 & -1 & -3 & -7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 5 & -1 & 3\\ 0 & -6 & -1 & -4\\ 0 & -16 & 0 & -16\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & -5 & 3\\ 0 & -1 & -6 & -4\\ 0 & 0 & -16 & -16\end{array}\right).$$

Следовательно, $Rang\,A = Rang\,\overline{A} = 3 = r$; число неизвестных $n = 3$; $r = n$, следовательно, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) Решим её по формулам Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -16$;

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ -7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 64$; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -16$; $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 32$;

$x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

б) Для нахождения решения системы с помощью обратной матрицы запишем систему уравнений в матричной форме: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Найдём обратную матрицу A^{-1} (она существует, т.к. $\Delta = \det A = -16 \neq 0$):

$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -15$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 16$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -11$;

$-A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 0$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 16$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -6$.

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы в матричной форме имеет вид: $X = A^{-1}B$.

$$X = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -45+32+77 \\ -9-7 \\ -42+32+42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Из полученной матрицы имеем решение системы: $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$.

в) Решим систему методом Гаусса. Исключим x_1 из второго и третьего уравнений. Для этого первое уравнение умножим на 2 и вычтем из второго, затем первое уравнение умножим на 3 и вычтем из третьего:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3; \\ \quad -6x_2 - x_3 = -4; \\ \quad -16x_2 = -16. \end{cases}$$

$-16x_2 = -16$, тогда $x_2 = 1$;

$-6\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = -4$, $-6 \cdot 1 - \tilde{o}_3 = -4$, тогда $x_3 = -2$;

$\tilde{o}_1 + 5\tilde{o}_2 - \tilde{o}_3 = 3$, $\tilde{o}_1 + 5 \cdot 1 + 4 = 3$, тогда $x_1 = -4$.

Таким образом, $x_1 = -4$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$. ◄

Задание 3. Установить совместность СЛАУ с помощью теоремы Кронекера-Капелли. В случае ее совместности найти решение системы по формулам Крамера.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

► Исследуем исходную систему уравнений на совместность:
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right),$$
ранги основной и расширенной матриц равны $R(A) = R(\overline{A}) = 2$, т.е. исходная система совместна, $n = 5$, $r < n$ — система имеет множество решений.

Составим базисный минор (т.к. $R(A) = R(\overline{A}) = 2$, то и ранг базисного минора должен быть равен 2): $M^2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$, т.е. базисных переменных — две: x_1, x_2, свободных переменных — три: x_3, x_4, x_5.

С учетом выбранных базисных переменных запишем систему уравнений:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_3 + x_4 - x_5 + 1; \\ -4x_2 = -7x_3 - 7x_4 + 1. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера: главный определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -4$, вспомогательные определители:
$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 & 1 \\ -7x_3 - 7x_4 + 1 & -4 \end{vmatrix} = -x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 5$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2x_3 + x_4 - x_5 + 1 \\ 0 & -7x_3 - 7x_4 + 1 \end{vmatrix} = -7x_3 - 7x_4 + 1$,

тогда $x_1 = \dfrac{-x_3 + 3x_4 + 4x_5 - 5}{-4} = \dfrac{x_3}{4} - \dfrac{3x_4}{4} - x_5 + \dfrac{5}{4}$,

$x_2 = \dfrac{-7x_3 - 7x_4 + 1}{-4} = \dfrac{7x_3}{4} + \dfrac{7x_4}{4} - \dfrac{1}{4}$.

Общее решение системы уравнений: $X_{общ}=\begin{pmatrix}\frac{x_3}{4}-\frac{3x_4}{4}-x_5+\frac{5}{4}\\ \frac{7x_3}{4}+\frac{7x_4}{4}-\frac{1}{4}\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$, пусть $x_3=C_1$, $x_4=C_2$, $x_5=C_3$, тогда $X_{общ}=\begin{pmatrix}\frac{C_1}{4}-\frac{3C_2}{4}-C_3+\frac{5}{4}\\ \frac{7C_1}{4}+\frac{7C_2}{4}-\frac{1}{4}\\ C_1\\ C_2\\ C_3\end{pmatrix}$. Придавая свободным переменным x_3, x_4, x_5 числовые значения, например, $C_1=0$, $C_2=0$, $C_3=0$, получим частное решение: $X_{част}=\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\ \frac{1}{4}\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$. ◄

Задание 4. Решить задачу.

Известны вершины $O(0;0)$, $A(-2;0)$ параллелограмма *AOCD* и точка пересечения его диагоналей $B(2;-2)$. Записать уравнения сторон параллелограмма.

► Уравнение стороны *OA* можно записать сразу: $y=0$. Так как точка *B* является серединой диагонали *AD*, то по формулам деления отрезка пополам можно вычислить координаты вершины $D(x;y)$:

$2=\frac{-2+x}{2}$,

тогда $x=6$;

$-2=\frac{0+y}{2}$, $y=-4$.

Теперь можно найти уравнения всех остальных сторон. Учитывая параллельность сторон *OA* и *CD*, составляем уравнение стороны *CD*: $y=-4$.

Уравнение стороны *OD* составляем по двум точкам $\frac{\tilde{o}-x_1}{x_2-x_1}=\frac{\acute{o}-y_1}{y_2-y_1}$:

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-4-0} \text{ или } 2x+3y=0.$$

Уравнение стороны *AC* находим, учитывая, что она проходит через известную точку $A(-2;0)$ параллельно известной прямой *OD*, используя формулу $y-y_0=k\left(x-x_0\right)$:

$y-0=-\frac{2}{3}(x+2)$ или $2x+3y+4=0$. ◄

Задание 5. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$: $A_1(3,5,3)$, $A_2(-2,11,-5)$, $A_3(1,-1,4)$, $A_4(0,6,4)$. Найти:

1) уравнения прямой A_1A_4;

2) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;

3) угол между ребром A_1A_2 и гранью $A_1A_2A_3$;

4) площадь грани $A_1A_2A_3$;

5) объем пирамиды;

Сделать чертеж.

► 1) Составим уравнения прямой A_1A_2. Для этого воспользуемся уравнениями прямой, проходящей через две заданные точки и A_2: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Получаем: $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-5}{6}=\dfrac{z-3}{-8}$

.

2) Уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ можно найти по формуле: $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$, где $\overline{N}=(A,B,C)$, $A_1(x_1,y_1,z_1)$. Следовательно, уравнение плоскости $A_1A_2A_3$ имеет вид: $-42\cdot(x-3)+21\cdot(y-5)+42(z-3)=0$ или после упрощения $2x-y-2z+5=0$.

3) Чтобы найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$, определим нормальный вектор $\overline{N}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Из пункта (2) $\overline{N}=(2,-1,-2)$ и направляющий вектор прямой A_1A_4. Запишем уравнение $\dfrac{x-3}{-3}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-3}{1}$ и тогда $\overline{l}=(-3,1,1)$. Тогда $\sin\alpha=\sin(\overline{l\wedge N})=\dfrac{-3\times2+1\times(-1)+1\times(-2)}{\sqrt{11}\sqrt{9}}=\dfrac{-9}{3\sqrt{11}}=\dfrac{-3}{\sqrt{11}}$, $\alpha=\arcsin\left|\dfrac{-3}{\sqrt{11}}\right|$.

4) Площадь грани $A_1A_2A_3$ можем найти по формуле $S=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\overline{N}\right|=\dfrac{63}{2}$.

Следовательно, $S=\dfrac{63}{2}$ кв. ед.

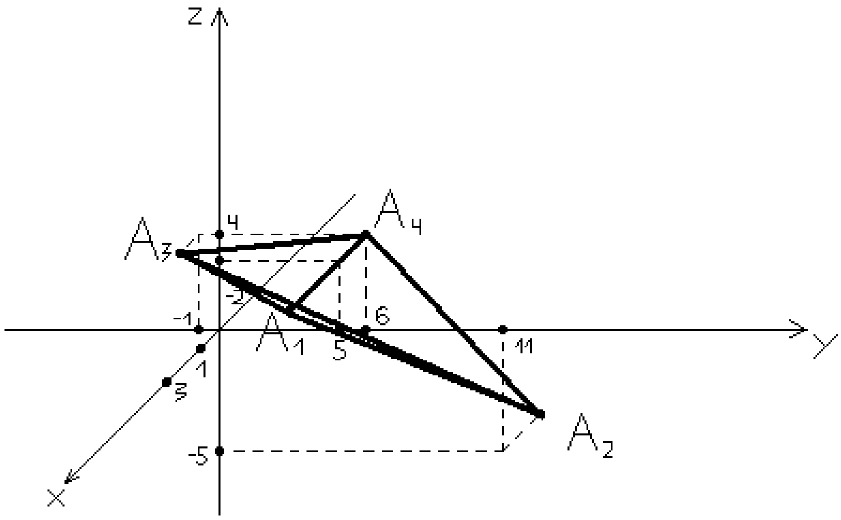
5)

$$V_{пир.}=\frac{1}{6}V_{пар.}=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_3}\right)\cdot\overline{A_1A_4}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-5 & 6 & -8\\ -2 & -6 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{6}\left|30-18+16+144+12+5\right|=\frac{189}{6}=\frac{63}{2}$$

Таким образом, $V=\dfrac{63}{2}$ куб.ед.

Сделаем теперь чертеж:



Задание 6. Составить уравнение линии, каждая точка которой одинаково удалена от точки $A_0(4,3\ )$ и прямой $y=1$. Сделать чертеж.

► Пусть $M(x;y)$ — любая точка искомой линии, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y=1$. Тогда точка N имеет координаты $N(x;1)$. Расстояние от точки M до прямой $y=1$ есть расстояние между точками M и N: $d_1=\sqrt{(x-x)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y-1)^2}=|y-1|$.

Теперь определим расстояние между точками M и A_0: $d_2=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}$.

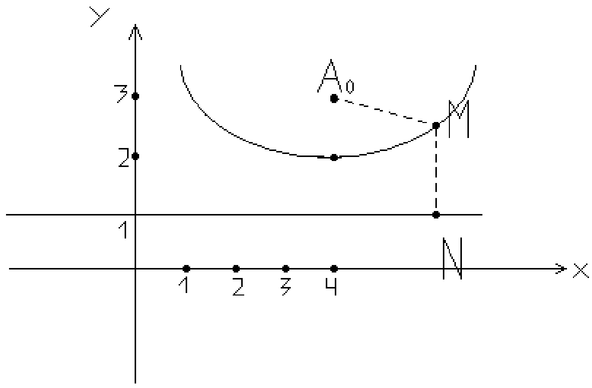
По условию задачи $d_1=d_2$. Следовательно, для любой точки $M(x;y)$ справедливо равенство: $\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(y-1)^2}$;

$(x-4)^2+(y-3)^2=y^2-2y+1$;

$y=\frac{1}{4}(x-4)^2+2$.

Полученное уравнение является уравнением параболы с вершиной в точке $O'(4;2)$. Действительно, сделаем замену $x'=x-4,\ y'=y-2$.

Тогда уравнение примет вид: $y'=\frac{1}{4}(x'\ )^2$ — каноническое уравнение параболы.



Задание 7. Линия задана уравнением $\rho = \dfrac{1}{3(1+\cos\varphi)}$ в полярной системе координат.

Требуется:

1) построить график функции в полярной системе координат по точкам, давая φ значения через промежуток $\dfrac{\pi}{8}$, начиная от $\varphi = 0$;

2) найти уравнение линии в прямоугольной декартовой системе координат, начало которой совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс — с полярной осью;

3) по полученному уравнению определить, какая это будет линия;

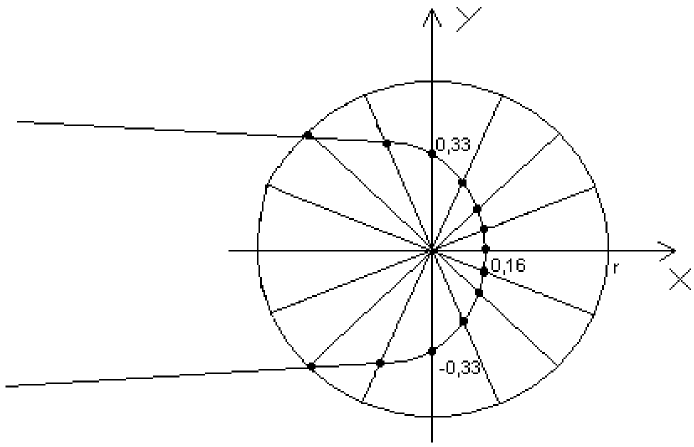
4) сделать чертеж.

► 1) Совместим декартову и полярную системы координат и рассмотрим окружность произвольного, достаточно большого радиуса r с центром в полюсе. Построим радиусы, образующие углы φ с полярной осью, где φ принимает значения от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ с шагом $\dfrac{\pi}{8}$. Вычислим косинусы этих углов и по этим значениям найдем $\rho = \rho(\varphi)$. Результаты вычислений занесем в таблицу:

φ	$\cos\varphi$	ρ
0	1	0,16
$\frac{\pi}{8}$	0,92	0,17
$\frac{\pi}{4}$	0,7	0,19
$\frac{3}{8}\pi$	0,38	0,24
$\frac{\pi}{2}$	0	0,33
$\frac{5}{8}\pi$	-0,38	0,53
$\frac{3}{4}\pi$	-0,7	1,11
$\frac{7}{8}\pi$	-0,92	4,16
π	-1	∞

$\frac{9}{8}\pi$	-0,92	4,16
$\frac{5}{4}\pi$	-0,7	1,11
$\frac{11}{8}\pi$	-0,38	0,53
$\frac{3}{2}\pi$	0	0,33
$\frac{13}{8}\pi$	0,38	0,24
$\frac{7}{4}\pi$	0,7	0,19
$\frac{15}{8}\pi$	0,92	0,17
2π	1	0,16

Построим точки $(\rho;\varphi)$ и по полученным точкам построим искомую линию:



2) Найдем уравнение данной линии в декартовой системе координат. Для этого воспользуемся формулами: $\begin{cases} x = \rho\cdot\cos\varphi; \\ y = \rho\cdot\sin\varphi. \end{cases}$ $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Тогда имеем: $\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{3\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$

$3\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)=1$.

Чтобы определить тип линии, определяемой полученным уравнением, преобразуем его к каноническому виду:

$\sqrt{x^2+y^2} = \dfrac{1}{3} - x$;

$x^2+y^2 = \left(\dfrac{1}{3}-x\right)^2$;

$(y')^2 = \dfrac{2}{3}x'$, где $y' = y$, $x' = \dfrac{1}{6} - x$.

Таким образом, данное уравнение определяет параболу. ◄

Задание 8. Найти область определения функции 1) $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$; 2) $y=\sqrt{3-x}+\arccos\frac{x-2}{3}$.

► 1) Функция $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$ принимает действительные значения в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком корня, будет иметь неотрицательные значения, а выражение, находящееся под знаком логарифма — положительным: $\begin{cases}\lg\frac{5x-x^2}{4}\ge 0;\\ \frac{5x-x^2}{4}>0.\end{cases}$ Решая первое неравенство $\lg\frac{5x-x^2}{4}\ge 0$, имеем $\frac{5x-x^2}{4}\ge 1$ или $x^2-5x+4\le 0$, т.е. $1\le x\le 4$. Решая второе неравенство $\frac{5x-x^2}{4}>0$, имеем $5x-x^2>0$, т.е. $0\le x\le 5$.

Решение системы является областью определения заданной функции, т.е. $1\le x\le 4$.
2) Функция принимает действительные значения в тех точках, в которых выражение, стоящее под знаком корня, будет иметь неотрицательные значения, т.е. $3-x\ge 0$ или $x\le 3$.

Функция $\arccos\frac{x-2}{3}$ определена для всех значений *x*, удовлетворяющих неравенству $\left|\frac{x-2}{3}\right|\le 1$ или $-1\le\frac{x-2}{3}\le 1$, откуда $-3\le x-2\le 3$ или $-1\le x\le 5$.

Таким образом, данная функция определена на отрезке $[-1;3]$. ◄

Задание 9. Найти указанные пределы, не пользуясь правилом Лопиталя:
1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-2x+1}{3x^2+5x+8}$;
5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{17x+12}{6x^2+15x-8}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{\sin 3x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$; 9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-7}\right)^x$;
10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+5}{3x+7}\right)^{2x-1}$; 11) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\ln(x^2-5x+7)}{x-2}$; 12) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{9^x-3^x}{x}$; 13) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$;
14) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{x}$.

► 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{18}{-2}=-9$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+2x}-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+2x}-1\right)\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+2x}+1\right)}{1+2x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+1}{2}=1$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x+1}{4x^2+2x+5}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{2}{x}+\frac{5}{x}}=\frac{1}{2}$ или степень числителя равна 2, степень знаменателя также равна двум, следовательно, предел равен отношению коэффициентов при старших неизвестных;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x+1}{3x^2+5x+8}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7-\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\left[\dfrac{7}{0}\right]=\infty$ или, т.к. степень числителя больше степени знаменателя предел равен бесконечности;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x+12}{6x^2+15x-8}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{17}{x}+\frac{12}{x^2}}{6+\frac{15}{x}-\frac{8}{x^2}}=\left[\dfrac{0}{6}\right]=0$ или, т.к. степень числителя меньше степени знаменателя предел равен нулю;

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg2x}{\sin 3x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x\cdot tg2x}{3x\cdot\sin 3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot tg2x}{3x\cdot 2}=\dfrac{2}{3}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2=2\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{2\dfrac{x}{2}}\right)^2=2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{2}$;

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin 2x\cdot\sin 4x}{x\cdot x}=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cdot4\cdot\sin 2x\cdot\sin 4x}{2x\cdot 4x}=2\cdot2\cdot4=16$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{2x-7}\right)^x=\left|\begin{array}{l}f(x)=\dfrac{3x+2}{2x-7};\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+2}{2x-7}=\dfrac{3}{2}\\ g(x)=x;\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty\end{array}\right|=\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}\right]=\left|\lim\limits_{x\to+\infty}a^x=\begin{cases}0, & 0<a<1;\\ +\infty, & a>1.\end{cases}\right|=\infty$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)^{2x-1}=\left|\begin{array}{l}f(x)=\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right);\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x+7}\right)=1\\ g(x)=2x-1;\ \lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)=\infty\end{array}\right|=\left[1^{\infty}\right]=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+5}{3x+7}-1\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3x+5-3x-7}{3x+7}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2}{3x+7}\right)^{2x-1}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(\left(1+\dfrac{-2}{3x+7}\right)^{\frac{3x+7}{-2}}\right)^{\frac{-2}{3x+7}}\right)^{2x-1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2(2x-1)}{3x+7}}=e^{-\frac{4}{3}}$;

11) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\ln(x^2-5x+7)}{x-2}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}t=x-2;\\ x\to2,\quad t\to0;\\ x^2-5x+7=\\ =(2+t)^2-5(2+t)+7=\\ =1+t^2-t\end{array}\right|=$

$=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln\left(1+t^2-t\right)}{t^2-t}\cdot\dfrac{t^2-t}{t}=1\cdot(-1)=-1$;

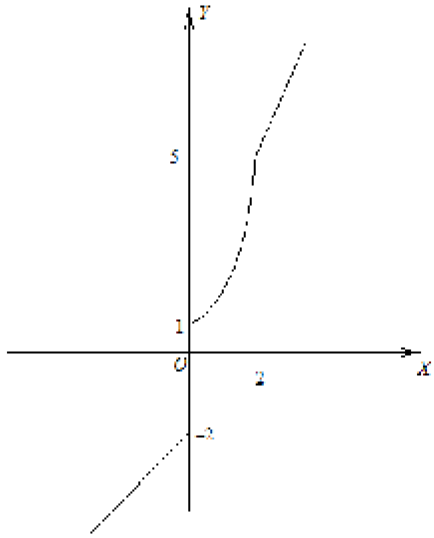
12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9^x-3^x}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3^x\left(3^x-1\right)}{x}=\lim\limits_{x\to0}3^x\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\left(3^x-1\right)}{x}=3^0\ln3=\ln3$;

13) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-e^x}{e^x\cdot x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{e^x\cdot x}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x}=-1$;

14) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt[7]{1+\sin x}-1}{\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{7}\cdot1=\dfrac{1}{7}$. ◄

Задание 10. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип $f(x)=\begin{cases} x-2, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<2; \\ 2x+1, & x\ge 2. \end{cases}$

▲ Так как функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0)$, $(0;2)$ и $(2;\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x=0$ и $x=2$.



Исследуем точку $x=0$: $f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-2)=-2$.

Символ $x\to 0-0$ позволяет выбрать нужное аналитическое выражение $f(x)$ из уравнений, ее определяющих.

$f(0+0)=\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}(x^2+1)=1$.

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой, следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок $|f(0-0)-f(0+0)|=3$.

Исследуем точку $x=2$: $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0}(x^2+1)=4+1=5$,

$f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2+0}(2x+1)=5,\ f(2)=(2x+1)\big|_{x=2}=5$.

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности. ◄