

## КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

Темы: «Дифференциальное исчисление функции одной переменной»,  
«Интегральное исчисление функций одной переменной»

Задание 1. Найти производные  $\frac{dx}{dy}$  данных функций:

### Вариант 1

а)  $y = \frac{7x}{\sqrt{x^7 + 3}}$ ; б)  $y = \frac{\cos^2 x}{\operatorname{arctg} x}$ ; в)  $y = 2^{\sin 6x}$ ; г)  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$ ; д)  $x^2 y = \arcsin y$

### Вариант 2

а)  $y = 5x\sqrt{13 - x^4}$ ; б)  $y = \cos 5x + x^4 \ln x$ ; в)  $y = 5^{\ln x}$ ; г)  $y = (\cos x)^{\ln x}$ ; д)  $xy = 2^y$

### Вариант 3

а)  $y = \frac{2x}{\sqrt{3 - x^2}}$ ; б)  $y = \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ; в)  $y = \arcsin 2^x$ ; г)  $y = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$ ; д)  $y = e^{xy} + \sin x$

### Вариант 4

а)  $y = 3^6 \sqrt{9 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 3}}$ ; б)  $y = (\operatorname{arctg} x + 7)^3$ ; в)  $y = \ln \sin^3 x$ ; г)  $y = (5x)^{\sin \frac{x}{5}}$ ;

д)  $\frac{x}{y} = 7^y$

### Вариант 5

а)  $y = \sqrt[5]{\frac{(1 - x^2)}{(1 + x^2)}}$ ; б)  $y = \frac{4^x}{\cos^4 x}$ ; в)  $y = \frac{\cos 2x}{2 \operatorname{tg} x}$ ; г)  $y = (\cos x)^{\ln x}$ ; д)  $\operatorname{tg} x = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$

### Вариант 6

а)  $y = \frac{\sqrt[4]{2x - 1}}{3x^2 + 6x - 1}$ ; б)  $y = e^{\sin^2 x}$ ; в)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2 + x}{5 - x}}$ ; г)  $y = (\ln x)^{3x}$ ;

д)  $5^x - \operatorname{tg} y = xy$

### Вариант 7

а)  $y = \frac{5x}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$ ; б)  $y = \ln \arcsin x + xe^x$ ; в)  $y = \frac{\cos^3 x}{\sin 3x}$ ; г)  $y = (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$ ;

д)  $\operatorname{ctg} \left( \frac{x}{y} \right) = \arcsin 7x$

### Вариант 8

а)  $y = \frac{5}{\sqrt[5]{1 - x^5}} + x\sqrt{x^4 + 1}$ ; б)  $y = \ln^7(2x^5 + 3)$ ; в)  $y = \operatorname{arctg}^7(x^2 + e^x)$ ; г)  $y = (\operatorname{tg} x)^x$ ;

д)  $\operatorname{arctg}(xy) = y^2$

### Вариант 9

а)  $y = \sqrt{\frac{(1 - x^3)}{(1 + x^3)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{1 - x}}$ ; б)  $y = 8 + \cos^5(3x^2 - 1)$ ; в)  $y = (\arcsin^2 x) \ln x$ ;

г)  $y = x^{\operatorname{arctg} x}$ ; д)  $3^y = \operatorname{ctg} \left( \frac{y}{x} \right)$

**Вариант 10**

а)  $y = \frac{5}{\sqrt{7-x^3}} + \sqrt[3]{x \sin x}$ ; б)  $y = (\operatorname{tg} \sqrt{x}) \sin^2 x$ ; в)  $y = \frac{(\operatorname{tg} 3x)}{\cos^3 x}$ ; г)  $y = (\sin x)^{e^x}$ ;

д)  $y^2 x = 3 \ln y$

**Задание 2.** Найти  $\frac{dy}{dx}$  и  $\frac{d^2y}{dx^2}$  для заданных функций.

**Вариант 1**

а)  $y = \operatorname{ctg}^2 x$  б)  $x = \sqrt{1-t^2}$ ;  $y = t^2 + 1$

**Вариант 2**

а)  $y = \arccos 5x$  б)  $x = e^{3t}$ ;  $y = 9t^2 - 1$

**Вариант 3**

а)  $y = 6^{x^2}$  б)  $x = t + \ln t$ ;  $y = t \cdot \ln t$

**Вариант 4**

а)  $y = x^5 \ln x$ ; б)  $x = 2 \sin t$ ;  $y = \cos^2 t$

**Вариант 5**

а)  $y = e^{\arcsin x}$ ; б)  $x = 7t + t^4$ ;  $y = 4t^7$

**Вариант 6**

а)  $y = e^{-x} \operatorname{ctg} x$ ; б)  $x = e^{\sin t}$ ;  $y = e^{\cos t}$

**Вариант 7**

а)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ; б)  $x = e^{2t+1}$ ;  $y = \ln(2t+1)$

**Вариант 8**

а)  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ; б)  $x = \ln \cos t$ ;  $y = \ln \sin t$

**Вариант 9**

а)  $y = x \sqrt{1-x^2}$ ; б)  $x = t^5 + 8$ ;  $y = 5t + t^8$

**Вариант 10**

а)  $y = \arcsin 3x$ ; б)  $x = 3 \sin^2 t$ ;  $y = 2 \cos^3 t$

**Задание 3.** Найти наибольшее и наименьшее значения  $f(x)$  на отрезке  $[a; b]$ .

**Вариант 1**

$f(x) = 7 - 3x^3$ ,  $[-1; 2]$ ;  $y = \frac{1}{2} + x^5 - \frac{5}{3}x^3$ ,  $[0; 2]$ .

**Вариант 2**

$f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$ ,  $[0; 2]$ ;  $y = 2x^2 - \ln x + \frac{1}{2}$ ,  $[\frac{1}{4}; 1]$ .

**Вариант 3**

$f(x) = x^3 - 27x + 1$ ,  $[0; 3]$ ;  $y = \frac{x^2}{1+x} - \sqrt{2}$ ,  $[-\frac{1}{2}; 4]$ .

**Вариант 4**

$f(x) = x^4 - 4x$ ,  $[-1; 2]$ ;  $y = 3x + x^3 - 1 - 3x^2$ ,  $[-1; 2]$ .

**Вариант 5**

$$f(x) = \sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}x, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; y = 1 - 2x^2 + x^4, [-2; 0].$$

**Вариант 6**

$$f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, [0; 2]; y = x^2 + e^{-x} + 3, [-1; 4].$$

**Вариант 7**

$$f(x) = \cos x + x, [0; \pi]; y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3, [-2; 3].$$

**Вариант 8**

$$f(x) = 2x^4 - x, [0; 1]; y = \sin 2x - x - 2, \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

**Вариант 9**

$$f(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4, [-2; 0]; y = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}, \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

**Вариант 10**

$$f(x) = \cos x + \frac{x}{2}, \left[0; \frac{\pi}{2}\right]; y = 3x^4 - 16x^3 + 9, [-3; 1].$$

**Задание 4.** Исследовать методами дифференциального исчисления функции  $y = f(x)$ ; используя результаты исследования, построить ее график:

**Вариант 1**

a)  $y = 3x^2 - 2 - x^3$

**Вариант 2**

a)  $y = 4x^2 - x^4 - 3$

**Вариант 3**

a)  $y = 12x - x^3 - 1$

**Вариант 4**

a)  $y = 6x - 8x^3$

**Вариант 5**

a)  $y = x^4 - 2x^2 + 5$

**Вариант 6**

a)  $y = 3x^2 - 2 - x^3$

**Вариант 7**

a)  $y = 2x^3 + 9x^2 + 12x$

**Вариант 8**

a)  $y = x^4 - 6x^2 + 5$

**Вариант 9**

a)  $y = x^4 - 8x^2$

**Вариант 10**

a)  $y = 6x^2 - x^4$

**Задание 5.** Найти пределы функций по правилу Лопиталья:

**Вариант 1**

a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$

**Вариант 2**

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$$

**Вариант 3**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin x} - \frac{2}{x} \right)$$

**Вариант 4**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$$

**Вариант 5**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \cdot \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

**Вариант 6**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - e^x}{\sin x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

**Вариант 7**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{\sin 2x} - \frac{1}{\sin 2x} \right)$$

**Вариант 8**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{e^{2x} - \cos 2x}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin 2x} - \operatorname{ctg} x \right)$$

**Вариант 9**

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^3}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right)$$

**Вариант 10**

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$$

**Задание 6.** Найти неопределенные интегралы.

**Вариант 1**

$$1) \int \left( 10 + \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{7}{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} + \cos x \right) dx; \quad 2) \int \sqrt[3]{5x+4} dx; \quad 3) \int \frac{dx}{x+2x^{5/7}}; \quad 4) \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$5) \int \frac{(x+3)dx}{x^2+3x+2}.$$

**Вариант 2**

$$1) \int \left( 3^x - \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{8}{x^3} - 10\sqrt[5]{x^3} - 4 \right) dx; \quad 2) \int 3^{8-5x} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x-5\sqrt[4]{x}}; \quad 4) \int xe^{2x} dx; \quad 5) \int \frac{(3x-2)dx}{x^2+x-6}.$$

**Вариант 3**

$$1) \int \left( \frac{6}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sqrt{x^2 - 4}} - \frac{5}{x} + e^x - \sqrt[4]{x^3} \right) dx; \quad 2) \int \frac{dx}{15 - 7x};$$

$$3) \int \frac{dx}{x + 3 \sqrt[9]{x^4}}; \quad 4) \int x^3 \ln x dx; \quad 5) \int \frac{(5x - 1) dx}{x^2 - 5x + 6}.$$

**Вариант 4**

$$1) \int \left( 15 \sin x - \frac{1}{x^2 + 9} + \frac{8}{\sqrt[3]{x}} + 13 \cdot 4^x - 6 \right) dx; \quad 2) \int \cos(1 + 2x) dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x - 7 \sqrt[3]{x}}; \quad 4) \int x \sin 4x dx; \quad 5) \int \frac{(4x - 1) dx}{x^2 + 4x + 3}.$$

**Вариант 5**

$$1) \int \left( 2 \cdot 5^x - 3 \cos x + \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt[6]{x^5}} + 3 \right) dx; \quad 2) \int \sin(3x - 4) dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x - 8 \sqrt[5]{x^2}}; \quad 4) \int \arcsin x dx; \quad 5) \int \frac{(x + 5) dx}{x^2 - x - 12}.$$

**Вариант 6**

$$1) \int \left( \frac{10}{16 + x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{x} - \sqrt[5]{x^4} + 3 \right) dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sin^2(1 + 3x)};$$

$$3) \int \frac{dx}{x + \sqrt[6]{x^5}}; \quad 4) \int x^6 \ln x dx; \quad 5) \int \frac{(4x - 3) dx}{x^2 - 7x + 12}.$$

**Вариант 7**

$$1) \int \left( \frac{15}{\sqrt{x^2 - 25}} + \frac{4}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2^{-x} \right) dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\cos^2(6 - 4x)};$$

$$3) \int \frac{dx}{x + 4 \sqrt[5]{x^3}}; \quad 4) \int x \cos 5x dx; \quad 5) \int \frac{(x + 7) dx}{x^2 - 2x - 3}.$$

**Вариант 8**

$$1) \int \left( \frac{9}{4 + x^2} - 3^x + \sqrt[4]{x^3} - 7 \cos x + 3 \right) dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt[4]{(8 - 3x)^3}};$$

$$3) \int \frac{dx}{x - 2 \sqrt[7]{x^4}}; \quad 4) \int x e^{-2x} dx; \quad 5) \int \frac{(3x - 1) dx}{x^2 + 6x + 5}.$$

**Вариант 9**

$$1) \int \left( 6^x - 5 + 3 \sin x + \frac{8}{x^2 + 4} - 2 \sqrt[7]{x^5} \right) dx; \quad 2) \int e^{5+6x} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x - 3 \sqrt[8]{x}}; \quad 4) \int x \ln x dx; \quad 5) \int \frac{(4x + 5) dx}{x^2 - 4x + 3}.$$

**Вариант 10**

$$1) \int \left( 2 - \frac{10}{\sqrt{4 + x^2}} + \frac{3}{\sin^2 x} - 15^x - \frac{5}{x} \right) dx; \quad 2) \int 2^{6+5x} dx;$$

$$3) \int \frac{dx}{x + 4 \sqrt[10]{x^7}}; \quad 4) \int \arctg x dx; \quad 5) \int \frac{(5x + 1) dx}{x^2 + 2x - 8}.$$

**Задание 7.** Вычислить определенный интеграл.

**Вариант 1**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 - \sin x + \cos x}.$$

**Вариант 2**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x + \cos x}.$$

**Вариант 3**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 - 3 \sin x - \cos x}.$$

**Вариант 4**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x - \cos x}.$$

**Вариант 5**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 - \sin x - \cos x}.$$

**Вариант 6**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 - \sin x - 2 \cos x}.$$

**Вариант 7**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + 2 \sin x + \cos x}.$$

**Вариант 8**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 - 2 \sin x + \cos x}.$$

**Вариант 9**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 + \sin x - \cos x}.$$

**Вариант 10**

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3 + \sin x + 2 \cos x}.$$

**Задание 8.** Исследовать на сходимость несобственный интеграл.

**Вариант 1**

$$\int_0^{+\infty} \frac{x + \sin^2 x}{x^2 + 3} dx.$$

**Вариант 2**

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \cos 4x}{x^6 + x + 1} dx.$$

**Вариант 3**

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \operatorname{arctg} 3x}{x^3 + x + 2} dx.$$

**Вариант 4**

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^3 + 2 \sin x}{x^6 + x - 1} dx.$$

**Вариант 5**

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 3 \cos^2 x}{x^4 + 2} dx.$$

**Вариант 6**

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^4 + x^2 - \operatorname{arctg} x}{x^6 + x^2 + 1} dx.$$

**Вариант 7**

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin 10x}{x^3 + x^2 + 2x - 1} dx.$$

**Вариант 8**

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + 7 - \cos 3x}{x^3 + 5x^2 - 1} dx.$$

**Вариант 9**

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - x + \operatorname{arctg} 2x}{x^5 + x^4 - 2x^2 + 4} dx.$$

**Вариант 10**

$$\int_2^{+\infty} \frac{(x^2 - x + \sin^3 x)}{x^3 + 4x^2 - 1} dx.$$

**Задание 9.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой  $y = ax^2 + bx + c$  и прямой  $y = kx + b$ . Сделать чертёж.

**Вариант 1**

$$y = -x^2 + 4x - 1; y = -x - 1$$

**Вариант 2**

$$y = x^2 - 6x + 7; y = x + 1$$

**Вариант 3**

$$y = -x^2 + 6x - 5; y = x - 5$$

**Вариант 4**

$$y = x^2 - 6x + 7; y = -x + 7$$

**Вариант 5**

$$y = -x^2 + 6x - 5; y = -x + 1$$

**Вариант 6**

$$y = -x^2 - 6x - 5; y = x + 1$$

**Вариант 7**

$$y = x^2 + 6x + 7; y = x + 7$$

**Вариант 8**

$$y = -x^2 - 6x - 6; y = -x - 6$$

**Вариант 9**

$$y = x^2 + 6x + 7; y = -x + 1$$

**Вариант 10**

$$y = x^2 - 4x + 1; y = x + 1$$

**Задание 10.** Найти объем тела, образованный вращением вокруг оси  $O_x$  ( $V_x$ ) или оси  $O_y$  ( $V_y$ ) фигуры, ограниченной заданными линиями. Сделать чертеж.

**Вариант 1**

$$y = \frac{1}{4}x^2 + 2, \quad 5x - 8y + 14 = 0;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 2**

$$y = x^2, \quad 8x = y^2;$$

$$V_y = ?$$

**Вариант 3**

$$x \cdot y = 4, \quad x = 1, \quad x = 4, \quad y = 0;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 4**

$$y = 2x - x^2, \quad y = 0;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 5**

$$y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 2;$$

$$V_y = ?$$

**Вариант 6**

$$y = \sin x, \quad y = 0, \quad 0 \leq x \leq 2\pi;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 7**

$$y = \sin x, \quad y = \frac{2}{\pi}x;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 8**

$$y = x^3, \quad x = 1, \quad x = 2;$$

$$V_x = ?$$

**Вариант 9**

$$xy = 4, \quad y = 1, \quad y = 4, \quad x = 0;$$

$$V_y = ?$$

**Вариант 10**

$$y = x^3, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$$

$$V_y = ?$$