Аналитическая геометрия в пространстве

Содержание

1 Общие сведения

Пусть x, y, z — произвольные декартовы координаты. Это означает что под символами x, y, z подразумеваются какие угодно вещесьвенные числа. Соотношение вида $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x, y и z называется уравнением с тремя переменными.

Три числа $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ удовлетворяют уравнению, если при подстановке их в уравнение вместо переменных, последнее превращается в тождество.

Определение. 1.1 *Уравнением поверхности называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.*

С другой стороны.

Определение. 1.2 *Поверхность, определенная данным уравнением, есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

Пример. 1.1 *В декартовых прямоугольных координатах уравнение*

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

определяет сферу, центр которой находится в точке $C(a, b, c)$ и радиус которой равен r. В самом деле, если $M(x, y, z)$ — произвольная точка, то

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2} = CM.$$

Отсюда ясно, что уравнению удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые удалены от точки C на расстояние r. Следовательно, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению есть сфера с центром в точке $C(a, b, c)$ и радиусом r.

В пространственной аналитической геометрии каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей и соответственно этому определяется заданием двух уравнений.

Определение. 1.3 *Если $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$ — уравнения двух поверхностей, пересекающихся по некоторой линии L, то линия L есть геометрическое место общих точек этих поверхностей, т. е. точек, координаты которых удовлетворяют одновременно и уравнению $F(x, y, z) = 0$, и уравнению $\Phi(x, y, z) = 0$. Таким образом, система из двух уравнений*

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

определяет линию L.

Пример. 1.2 *Например, два уравнения*

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14 \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases}$$

совместно определяют окружность, как пересечение двух сфер.

Если $F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$ и $\Psi(x,y,z)=0$ — уравнения трех поверхностей, то каждое совместнее решение системы

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ \Phi(x,y,z)=0 \\ \Psi(x,y,z)=0 \end{cases}$$

дает координаты общей точки этих поверхностей. Следовательно, геометрическая задача разыскания точек пересечения трех поверхностей равносильна алгебраической задаче совместного решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

Пример. 1.3 *Найти точки пересечения трех поверхностей при условии, что первая поверхность есть сфера с центром $(-1;-1;0)$ и радиусом 5, вторая поверхность есть сфера с центром $(1;1;3)$ и радиусом 4, а третья поверхность есть плоскость, параллельная плоскости Oxy и лежащая в верхнем полупространстве на расстоянии 3 от плоскости Oxy.*

Задача сводится к совместному решению трех уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y+2)^2+z^2=25 \\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=16 \\ z=3 \end{cases}$$

Полагая в первых двух уравнениях $z=3$ и раскрывая скобки, мы получим:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x+2y=14 \\ x^2+y^2-2x-2y=14 \\ z=3 \end{cases}$$

Отсюда $x+y=0$, $x^2+y^2=14$, следовательно,$x=\pm\sqrt{7}$, $y=-x$. Итак, получаем две точки: $(\sqrt{7};-\sqrt{7};3)$ и $(-\sqrt{7};\sqrt{7};3)$.

2 Плоскость в пространстве

Теорема. 2.1 *В декартовых координатах плоскость задается уравнением первой степени.*

Определение. 2.1 *Уравнение вида:*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты A*,* B *и* C *одновременно не обращаются в* 0*, называется общим уравнением плоскости.*

Определение. 2.2 *Вектор* $\vec{n} = (A, B, C)$ *называется нормальным вектором к данной плоскости.*

Вектор $\vec{n}$ перпендикулярен любой прямой, лежащей в заданной плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через точку $(x_0; y_0; z_0)$, и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ выглядит следующим образом:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Пример. 2.1 *Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку* $(1; 1; 1)$ *перпендикулярно к вектору* $\vec{n} = (2, 2, 3)$.

Искомое уравнение есть

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0,$$

или

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

Теорема. 2.2 *Если два уравнения* $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ *и* $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ *определяют одну и тоже плоскость, то их коэффициенты пропорциональны.*

Рассмотрим некоторые частные случаи.

Если $D = 0$, то уравнение (1) имеет вид $Ax + By + Cz = 0$ и определяет плоскость, проходящую через начало координат.

Если $C = 0$, то уравнение (1) имеет вид $Ax + By + D = 0$ и определяет плоскость, параллельную оси Oz (или проходящую через эту ось).

$B = 0$ и $C = 0$, уравнение имеет вид $Ax + D = 0$, или $x = a$, и определяет плоскость, параллельную координатной плоскости Oyz, или совпадающую с ней.

Аналогичным образом можно рассмотреть случаи равенства 0 остальных коэффициентов.

Теперь рассмотрим разные способы задания плоскости в пространстве.

2.1 Уравнение в отрезках

Пусть дано уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Такое уравнение может быть приведено к некоторому специальному виду, который бывает удобен в ряде задач аналитической геометрии.

Перенесем свободный член D в правую часть уравнения и поделим на него:

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1,$$

или

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$

Вводя обозначения $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$, получим:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Определение. 2.3 *Уравнение вида*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

называется уравнением в отрезках.

Это и есть тот специальный вид уравнения плоскости, который мы хотели получить. Здесь числа a, b, c имеют весьма простой геометрический смысл, это величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая каждый от начала координат). Чтобы убедиться в этом достаточно найти точки пересечения плоскости с координатными осями.

2.2 Нормальное уравнение плоскости

Пусть дана произвольная плоскость. Проведем через начало координат прямую, перпендикулярную плоскости, и будем называть ее нормалью n, и пометим буквой P точку в которой она пересекает плоскость (рис. 1). Назначим на нормали положительное направление от точки O к точке P (если точка P совпадает с точкой O, т. е. если данная плоскость проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно).

Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет направленная нормаль с осями координат, через p — длину отрезка OP.

Пусть уравнение плоскости задано в виде:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Поделим обе части на величину:

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

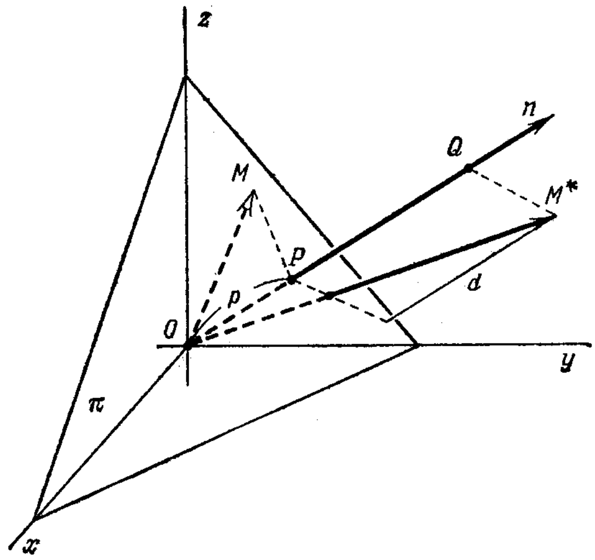

Рис. 1. Нормаль к плоскости

Величина μ называется нормирующим множителем, знак берется противоположным знаку свободного члена D (если $D = 0$, то можно выбрать любой знак).

Получим:

$$\mu Ax + \mu By + \mu Cz + \mu D = 0,$$

или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0.$$

Определение. 2.4 *Уравнение вида*

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

называется нормальным уравнением плоскости.

Здесь $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормального вектора $\vec{n}$, а p — расстояние от начала координат до плоскости.

2.3 Расстояние от точки до плоскости

Пусть дана произвольная плоскость, и M^* — какая угодно точка пространства, d — ее расстояние от данной плоскости (рис. 1). Условимся называть отклонением точки от данной плоскости число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от плоскости, куда идет положительное направление нормали, $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной плоскости. Отклонение точки от плоскости будем обозначать буквой δ; таким образом, $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и

$\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от плоскости (для точек, лежащих на плоскости, $\delta = 0$).

Чтобы найти отклонение какой-либо точки $M^*(x^*; y^*; z^*)$ от некоторой плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения этой плоскости вместо текущих координат подставить координаты точки M^*. Полученное число и будет равно искомому отклонению. Соответственно если требуется найти расстояние от точки до плоскости, то достаточно вычислить по только что указанному правилу отклонение и взять его абсолютную величину.

Пример. 2.2 *Даны плоскость*

$$3x - 4y + 12z + 14 = 0$$

и точка $M(4; 3; 1)$. *Найти отклонение точки* M *от данной плоскости.*

Надо прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду. С этой целью находим нормирующий множитель:

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = -\frac{1}{13}.$$

Умножая данное уравнение на μ, *получим искомое нормальное уравнение плоскости:*

$$-\frac{3}{13}x + \frac{4}{13}y - \frac{12}{13}z - \frac{14}{13} = 0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M, *имеем:*

$$-\frac{3 \cdot 4}{13} + \frac{4 \cdot 3}{13} - \frac{12 \cdot 1}{13} - \frac{14}{13} = -2.$$

Итак, точка M *имеет отрицательное отклонение от данной плоскости и удалена от нее на расстояние* $d = 2$.

3 Прямая в пространстве

Поскольку в пространственной аналитической геометрии каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей и определяется заданием двух уравнений, то каждую прямую линию будем рассматривать как пересечение двух плоскостей и соответственно этому определять заданием двух уравнений первой степени (конечно, в декартовых координатах).

Так как прямая a представляет собой пересечение плоскостей, то она определяется совместным заданием двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{2}$$

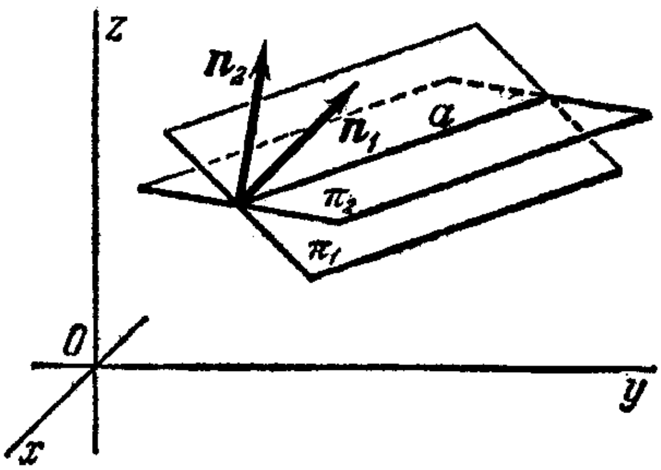

Рис. 2. Прямая

Представим себе, что нам заранее даны какие-нибудь два уравнения первой степени, и пусть они написаны в виде (2). Всегда ли они совместно определяют некоторую прямую? Очевидно, это будет в том и только в том случае, когда соответствующие им плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом, т. е. когда нормальные векторы этих плоскостей $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ не коллинеарны. Вспомним, что условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их координат.

Определение. 3.1 *Два уравнения вида*

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

совместно определяют прямую в том и только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 одного из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 другого.

Через каждую прямую проходит бесконечно много различных плоскостей; ясно, что существует бесконечно много возможностей выбрать из них какие-нибудь две. Отсюда следует, что всякую прямую можно определять двумя уравнениями бесконечно многими различными способами.

Укажем сейчас весьма простой прием, который позволяет, зная уравнения двух плоскостей, проходящих через данную прямую, «скомбинировать» из них сколько угодно новых уравнений, каждое из которых определяет плоскость, также проходящую через данную прямую.

Пусть даны некоторая прямая a и уравнения двух различных плоскостей, проходящих через эту прямую: $A_1x + B_1y +$

$C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Возьмем какие-нибудь два числа α и β не равные одновременно нулю. Тогда равенство $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2) = 0$ определяет плоскость также проходящую через прямую a. Пользуясь этим можно упрощать уравнения прямой.

С другой стороны, из курса линейных уравнений известно что систему уравнений можно преобразовать, домножив уравнения на некоторые числа, а потом прибавить к одному уравнению другое. Нетрудно видеть что именно это и происходит в данном случае.

3.1 Направляющий вектор прямой.

В целях удобства решения ряда задач в аналитической геометрии используется некоторый специальный вид уравнений прямой, который сейчас будет указан. Этот специальный вид уравнений прямой можно получить из общих ее уравнений путем алгебраических преобразований, однако мы предпочтем установить его непосредственно, тем самым будет отчетливо выявлена геометрическая суть дела.

Определение. 3.2 *Пусть дана какая-нибудь прямая. Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором этой прямой.*

Указанные векторы называются направляющими потому именно, что любой из них, будучи задан, определяет направление прямой.

Направляющий вектор произвольной прямой мы будем обозначать буквой $\vec{a} = (l; m; n)$.

Выведем сейчас уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей данный направляющий вектор $\vec{a}$. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная («текущая») точка прямой. Вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ коллинеарен направляющему вектору $\vec{a} = (l; m; n)$. Следовательно, координаты вектора $\overrightarrow{M_0M}$ пропорциональны координатам вектора $\vec{a}$:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Этим соотношениям, как мы видим, удовлетворяют координаты каждой точки $M(x; y; z)$ лежащей на рассматриваемой прямой; напротив, если точка $M(x; y; z)$ не лежит на этой прямой, то ее координаты не удовлетворяют соотношениям, так как в этом случае векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ не коллинеарны и координаты их не пропорциональны.

3.2 Канонические уравнения прямой.

Определение. 3.3 *Уравнения вида:*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}.$$

представляют собой уравнения прямой, проходящей через точку $\overrightarrow{M_0M}$ в направлении вектора $\vec{a}$ и называются каноническими.

Координаты $(l;m;n)$ любого направляющего вектора $\vec{a}$ прямой называются направляющими параметрами этой прямой. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ называются направляющими косинусами той же прямой.

Пусть некоторая прямая задана двумя общими уравнениями:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

Покажем, как составить канонические уравнения этой прямой.

Обозначим направляющие вектора плоскостей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$. Чтобы составить канонические уравнения прямой нужно:

1. найти какую-нибудь ее точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, для этого следует задать численное значение одной из неизвестных координат x, y или z и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения, и найти две другие координаты путем их совместного решения;

2. найти направляющий вектор $\vec{a}=(l;m;n)$. Так как данная прямая, определена пересечением плоскостей, то она перпендикулярна к каждому из векторов $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ (рис. 2). Поэтому в качестве вектора $\vec{a}$ можно взять любой вектор, перпендикулярный к векторам $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$, например их векторное произведение: $\vec{a}=[\vec{n}_1\times\vec{n}_2]$.

3.3 Параметрические уравнения прямой.

Пусть, даны канонические уравнения какой-нибудь прямой. Обозначим буквой t каждое из равных отношений, которые участвуют в этих канонических уравнениях; мы получим:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x=x_0+lt\\ y=y_0+mt\\ z=z_0+nt\end{cases}$$

Это — параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в направлении вектора $\vec{a} = (l; m; n)$. В уравнениях t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, x, y, z как функции от t. При изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой. Параметрические уравнения прямой удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью.

3.4 Некоторые дополнительные предложения и примеры

В аналитической геометрии часто требуется составить уравнения прямой, зная две ее точки. Пусть даны две произвольные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Для решения задачи достаточно заметить, что в качестве направляющего вектора рассматриваемой прямой можно взять вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$, отсюда

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

Назначая точке $M_1(x_1; y_1; z_1)$ ту же роль, какую играет в определении точка M_0, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это и есть искомые (канонические) уравнения прямой, проходящей через две данные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$.

Решим также в общем виде следующую задачу: составить уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

Обозначим через $M(x; y; z)$ произвольную точку пространства и рассмотрим три вектора: $\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1; z - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$ и $\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1)$. Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только в том случае, когда векторы M_1M, M_1M_2 и M_1M_3 компланарны. Условием компланарности этих трех векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из их координат. В данном случае имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, так как ему удовлетворяют координаты x, y, z точки M в том и только в том случае, когда она лежит в этой плоскости.

3.5 Углы между прямыми и плоскостями

В ряде задач аналитической геометрии требуется знать условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, двух прямых, а также прямой и плоскости. Выведем эти условия.

Пусть даны две плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Данные плоскости параллельны в том и только в том случае, когда их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ — коллинеарны (совпадение плоскостей мы рассматриваем сейчас как особый случай параллельности). Отсюда и получаем условие параллельности двух плоскостей:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Данные плоскости перпендикулярны в том и только в том случае, когда их нормальные векторы перпендикулярны. Отсюда получаем условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пусть даны две прямые

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1},$$

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

Данные прямые параллельны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы $\vec{a}_1 = (l_1; m_1; n_1)$ и $\vec{a}_2 = (l_2; m_2; n_2)$ коллинеарны (совпадение прямых мы рассматриваем сейчас как особый случай параллельности). Отсюда получаем условие параллельности двух прямых:

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{m_2}{m_1} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Данные прямые перпендикулярны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы перпендикулярны (в пространстве перпендикулярные прямые могут быть и не пересекающимися). Отсюда получаем условие перпендикулярности двух прямых:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Пусть даны прямая и плоскость. Прямая параллельна плоскости в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой перпендикулярен к нормальному вектору плоскости:

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Прямая перпендикулярна плоскости в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой параллелен к нормальному вектору плоскости:

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

4 Поверхности второго порядка

Определение. 4.1 *Поверхность второго порядка — поверхность, задаваемая в декартовых координатах уравнением второй степени:* $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0.$

Путем поворота осей координат уравнение поверхности можно привести к виду, в котором отсутствуют члены содержащие xy, xz, yz. А выбором начала координат уравнения приводятся к каноническому виду, который и будет рассмотрен ниже.

4.1 Эллипсоид

Определение. 4.2 *Эллипсоидом называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется каноническим уравнением:*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (3)$$

Постараемся уяснить себе форму эллипсоида и изобразить его на чертеже. С этой целью мы употребим так называемый «метод параллельных сечений». Рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h \end{cases}$$

Отсюда видно, что при условии $|h| < c$ плоскость $z = h$ пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}$$

$$b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}},$$

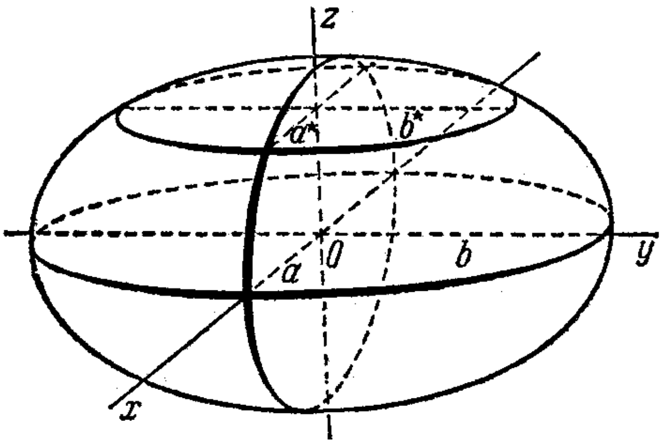

Рис. 3. Еллипсоид

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz (рис. 3). Величины a^* и b^* имеют наибольшие значения при $z = 0$ (тогда $a^* = a$, $b^* = b$), иначе говоря, самый крупный эллипс образуется в сечении координатной плоскостью $z = 0$.

При $h = \pm c$ величины a^* и b^* обращаются в нуль, т. е. эллипс, образуемый сечением эллипсоида плоскостью $z = c$ или плоскостью $z = -c$, вырождается в точку (рис. 3); иначе говоря, плоскости $z \pm c$ касаются эллипсоида.

При $|h| > c$ уравнения определяют мнимый эллипс; это означает, что плоскость $z = h$ при с данным эллипсоидом не пересекается совсем. Совершенно аналогичная картина выявляется при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными Oxz и Oyz.

В результате, мы можем заключить, что эллипсоид есть замкнутая овальная поверхность, обладающая тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. При данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

Величины a, b, c называются полуосями эллипсоида, Если все они различны, эллипсоид называется трехосным. Рассмотрим случай, когда какие-либо две из величин a, b, c одинаковы. Пусть, например, $a = b$. Тогда уравнения (3) определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a = b$ эллипсоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением эллипса вокруг одной из его осей. Если эллипсоид образован вращением эллипса вокруг его большой оси, он называется вытянутым эллипсоидом вращения-, эллипсоид, образованный вращением эллипса вокруг меньшей оси, называется сжатым эллипсоидом вращения.

В случае $a = b = c$ эллипсоид является сферой.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

Левая часть его содержит такое же выражение, что стоит слева в каноническом уравнении эллипсоида. Так как это выражение $\geqslant 0$, а справа в уравнении стоит -1, то уравнение не определяет никакого действительного образа, в таком случае ввиду аналогии с говорят что уравнение является уравнением мнимого эллипсоида.

4.2 Гиперболоиды

Определение. 4.3 *Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (4)$$

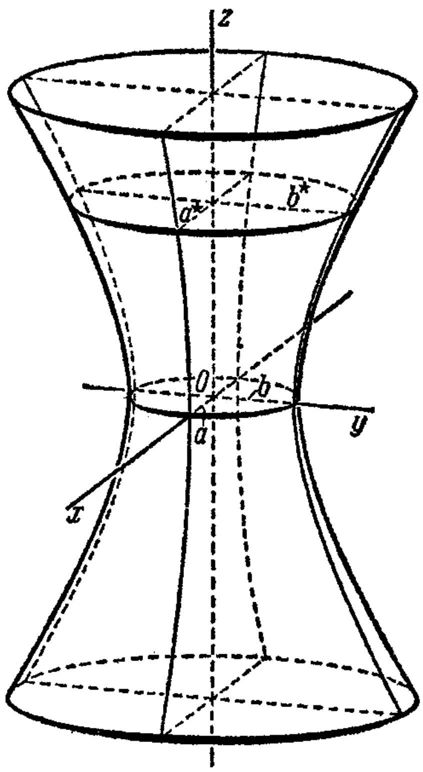

Рис. 4. Однополостной гиперболоид

Рассмотрим сечения его координатными плоскостями Oxz и

Oyz. Сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что оно представляет собой гиперболу (рис. 4), расположенную симметрично относительно координатных осей Ox, Oy и пересекающую ось Ox в точках $(a; 0; 0)$ и $(-a; 0; 0)$. Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0, \end{cases}$$

и также представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно осей Oy, Oz и пересекающую ось Oy в точках $(0; b; 0)$ и $(0; -b; 0)$.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а сечение гиперболоида этой плоскостью определяется уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2} \\ z = h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что любая полуплоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по эллипсу (рис. 4) с полуосями

$$a^* = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}$$
$$b^* = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}},$$

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz. Величины a^* и b^* имеют наименьшие значения при $z = 0$ (тогда $a^* = a$, $b^* = b$), иначе говоря, самых малых размеров эллипс образуется в сечении координатной плоскостью $z = 0$ (он называется горловым эллипсом однополостного гиперболоида).

При бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* бесконечно возрастают (рис. 4).

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся в обе стороны от горлового эллипса. Однополостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

Величины a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида. Заметим, что в случае $a = b$ любая полуплоскость $z = h$ пересекает гиперболоид по окружности с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a = b$ однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей, а именно той, которая гиперболу не пересекает.

Определение. 4.4 *Двухполостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \tag{5}$$

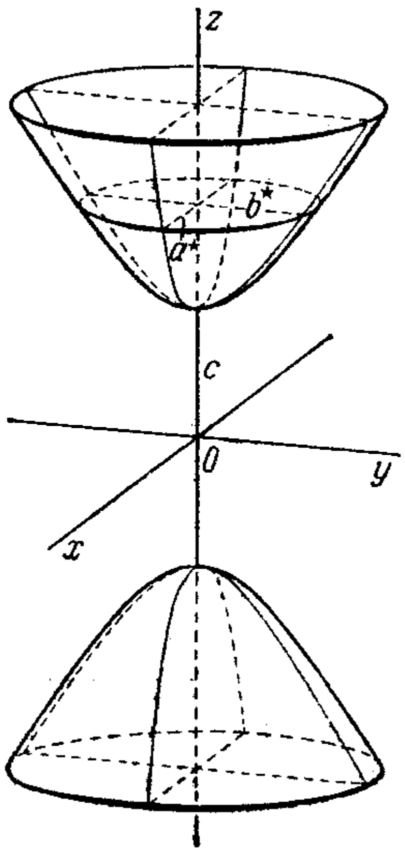

Рис. 5. Двухполостной гиперболоид

Рассмотрим сечения его координатными плоскостями Oxz и Oyz. Сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \\ y = 0. \end{cases}$$

Мы видим (рис. 5), что оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Ox, Oz и пересекающую ось Oz в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

Сечение плоскостью Oyz также представляет собой гиперболу (рис. 5), расположенную симметрично относительно осей Oy, Oz и пересекающую ось Oz также в точках $(0; 0; c)$ и $(0; 0; -c)$.

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а сечение гиперболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1 \\ z = h. \end{cases}$$

Отсюда видно (рис. 5), что при условии $|h| > c$ плоскость $z = h$ пересекает двухполостный гиперболоид по эллипсу с полуосями

$$a^* = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}$$
$$b^* = b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1},$$

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz

При возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают бесконечно.

Если $|h|$, убывая, приближается к c, то a^* и b^* также убывают и приближаются к нулю; при $h = \pm c$ имеем: $a^* = 0$ и $b^* = 0$; это означает, что эллипс, образуемый сечением плоскостью $z = c$ или плоскостью $z = -c$, вырождается в точку, иначе говоря, плоскости $z = \pm c$ касаются гиперболоида.

При $|h| < c$ видно что в сечении образуется мнимый эллипс, это означает что плоскость $z = h$ с данным гиперболоидом не встречается совсем (рис. 5).

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что двухполостный гиперболоид есть поверхность, состоящая из двух отдельных «полостей» (отсюда его название — «двухполостный»); каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Двухполостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

Величины a, b, c называются полуосями двухполостного гиперболоида. Заметим, что в случае $a = b$ в сечении получается окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a = b$ двухполостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей, а именно, той, которая гиперболу пересекает.

4.3 Конус второго порядка

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Особенностью уравнения является то, что оно однородно, т. е. все его члены имеют одну и ту же степень (= 2). Отсюда проистекает следующая геометрическая особенность определяемой им поверхности. Если некоторая точка M (отличная от начала координат) лежит на этой поверхности, то все точки прямой, которая проходит через начало координат и точку M, также лежат на этой поверхности. Докажем наше утверждение.

Пусть M — точка с координатами $(l; m; n)$, N — какая угодно точка прямой OM. Тогда координаты $(x; y; z)$ точки N определяются равенствами где

$$x = lt, \quad y = mt, \quad z = nt,$$

где t — некоторое число. Предположим, что точка M лежит на рассматриваемой поверхности, тогда

$$\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2} = 0.$$

Но в таком случае

$$\frac{(lt)^2}{a^2} + \frac{(mt)^2}{b^2} - \frac{(nt)^2}{c^2} = t^2\left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} - \frac{n^2}{c^2}\right) = 0,$$

следовательно, точка N также лежит на этой поверхности. Утверждение доказано.

Заметим, что тем же самым свойством обладает каждая поверхность, которая в декартовых координатах определяется однородным уравнением (поскольку в проведенном сейчас рассуждении мы ничем, кроме однородности данного уравнения, не пользовались). Иначе говоря, поверхность, определяемая однородным уравнением, состоит из прямых, проходящих через одну точку, а именно через начало координат. Такая поверхность называется конической, или просто конусом.

Определение. 4.5 *Поверхность, которая в некоторой системе декартовых координат определяется уравнением вида*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{6}$$

называется конусом второго порядка (рис. 6).

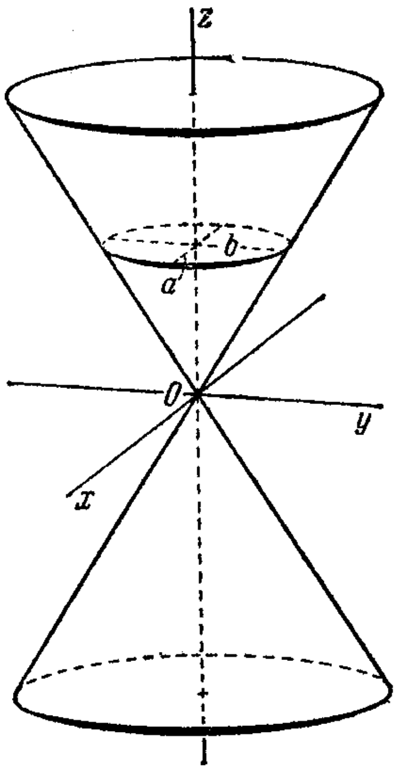

Рис. 6. Конус второго порядка

Прямые, из которых составлен конус, называются его образующими, точка, через которую все они проходят, называется вершиной конуса.

Чтобы уяснить себе форму конуса второго порядка, достаточно рассмотреть его сечение какой-нибудь плоскостью, не проходящей через начало координат (т. е. не проходящей через вершину). Возьмем, например, плоскость $z = c$. Сечение конуса этой плоскостью определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c. \end{cases}$$

Очевидно, оно представляет собой эллипс с полуосями a, b, расположенный симметрично относительно координатных плоскостей Oxy и Oyz. Заметим, что если $a = b$, то эллипс, определяемый уравнениями, есть окружность с центром на оси Oz и, следовательно, конус оказывается *круглым*.

4.4 Параболоиды

Существуют две поверхности, которые являются пространственными аналогами парабол на плоскости. Их называют параболоидами (эллиптическим и гиперболическим).

Определение. 4.6 *Эллиптическим параболоидом (рис. 7) называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется каноническим уравнением*

$$2z = \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} \tag{7}$$

(при положительных p и q).

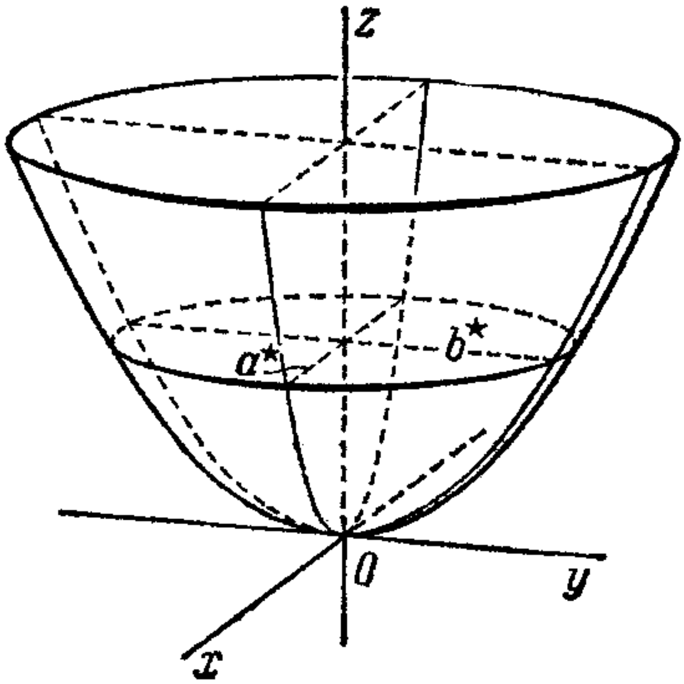

Рис. 7. Эллиптический параболоид

Исследуем эту поверхность методом сечений. Прежде всего рассмотрим сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz. При $y = 0$ из уравнения (7) имеем:

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что сечение представляет собой восходящую параболу, симметричную относительно оси Oz с вершиной в начале координат; параметр этой параболы равен p.

Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\begin{cases} y^2 = 2qz \\ x = 0. \end{cases}$$

и представляет собой аналогичным образом расположенную параболу с параметром q (рис. 7).

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а сечение параболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что

1. При $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a^* = \sqrt{2hp}$ и $b^* = \sqrt{2hq}$ (рис. 7) расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz. При возрастании h величины a^* и b^* также возрастают.

2. Если h, убывая, приближается к нулю, то величины a^* и b^* убывают и также приближаются к нулю. При $h = 0$ имеем $a^* = 0$ и $b^* = 0$, это означает, что эллипс, образуемый сечением параболоида плоскостью $z = 0$ вырождается в точку. Иначе говоря, плоскость $z = 0$ касается данного эллиптического параболоида.

3. При $h < 0$ уравнения сечения определяют мнимый эллипс; это означает, что плоскость $z = h$ при $h < 0$ с данным параболоидом не встречается совсем.

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxz и Oyz. Точка, с которой совмещено начало координат, называется вершиной эллиптического параболоида; числа p и q называются его параметрами. Заметим, что в случае $p = q$ уравнения сечения определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $p = q$ эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси.

Определение. 4.7 *Поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением вида*

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} \tag{8}$$

(при положительных p и q), называется гиперболическим параболоидом.

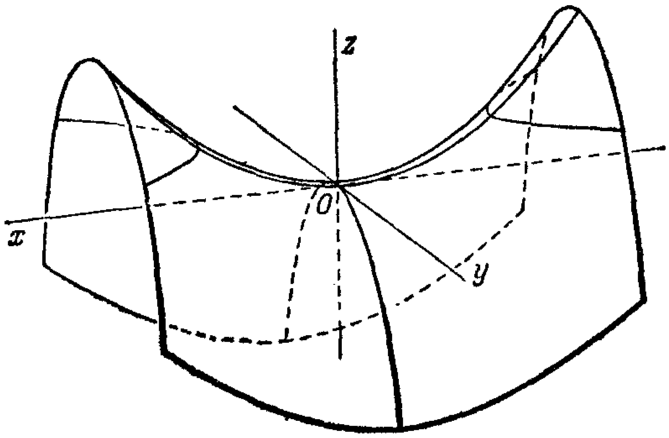

Рис. 8. Гиперболический параболоид

Займемся исследованием этой поверхности. Рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью Oxz. При $y = 0$ из уравнения (8) имеем $x^2 = 2pz$; таким образом, сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 = 2pz \\ y = 0. \end{cases}$$

Мы видим, что сечение представляет собой восходящую параболу, симметричную относительно оси Oz с вершиной в начале координат; параметр этой параболы равен p.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oyz, Каждое из таких сечений параболоида определяется уравнениями

$$\begin{cases} 2z = -\frac{y^2}{q} + \frac{h^2}{p} \\ x = h. \end{cases}$$

Отсюда видно, что при любом h плоскость $x = h$ пересекает гиперболический параболоид по нисходящей параболе, расположенной симметрично относительно плоскости Oxz (рис. 8). Все эти параболы, как показывает первое из уравнений, имеют общий параметр, равный q; вершина каждой из них лежит на линии, которая образуется сечением параболоида плоскостью Oxz, т. е. на восходящей параболе.

Заметим, что каждая плоскость $y = h$ пересекает гиперболический параболоид по восходящей параболе, что видно из уравнений

$$\begin{cases} 2z = \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q} \\ y = h, \end{cases}$$

определяющих такие сечения; одно из этих сечений, а именно, соответствующее значению $y = 0$, было рассмотренов первую очередь. На рис. 8 изображен кусок гиперболического параболоида; край изображенного куска составлен из двух отрезков восходящих парабол, плоскости которых параллельны плоскости Oxz и двух отрезков нисходящих парабол, плоскости которых параллельны плоскости Oyz.

Рассмотрим, наконец, сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Каждая плоскость имеет уравнение $z = h$, а сечение параболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\begin{cases} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2h \\ z = h, \end{cases}$$

Отсюда мы видим, что плоскости $z = h$ пересекают гиперболический параболоид по гиперболам, расположенным симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz. Если $h > 0$, то соответствующая гипербола пересекает плоскость Oxz если $h < 0$, — гипербола пересекает плоскость Oyz; при $h = 0$ гипербола вырождается в пару прямых (на рис. 8 изображено одно сечение параболоида плоскостью $z = h$ для случая $h > 0$.

Все изложенное позволяет заключить, что гиперболический параболоид имеет форму седла. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxz и Oyz. Точка, с которой совмещено начало координат, называется вершиной гиперболического параболоида; числа p и q называются его параметрами.

4.5 Цилиндры второго порядка

Рассмотрим уравнение второй степени, не содержащее текущей координаты z. Мы можем написать его в виде

$$Ax^2 + Bxz + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \tag{9}$$

Данное уравнение определяет цилиндрическую поверхность (или, как говорят короче, — цилиндр) с образующими, параллельными оси Oz. Поскольку уравнение (9) есть уравнение второй степени, определяемая им поверхность называется цилиндром второго порядка.

Заметим теперь, что уравнение по существу на плоскости Oxy определяет линию второго порядка. Отсюда заключаем, что сечение рассматриваемого цилиндра плоскостью Oxy есть линия второго порядка. В зависимости от характера этой линии мы имеем цилиндры второго порядка следующих типов.

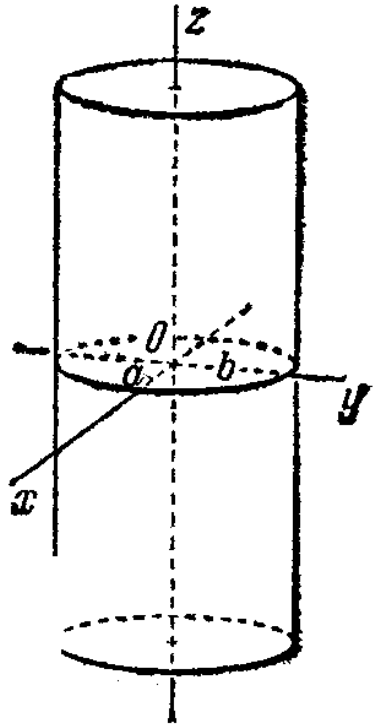

Рис. 9. Эллиптический цилиндр

1. Эллиптический цилиндр (рис. 9) при помощи надлежащего выбора координатной системы его уравнение может быть приведено к виду
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Если $a = b$, то цилиндр оказывается круговым.

2. Гиперболический цилиндр (рис. 10), его уравнение может быть приведено к виду
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. Параболический цилиндр (рис. 11), его уравнение может быть приведено к виду $y^2 = 2px$.

Кроме того, возможен случай, когда левая часть уравнения (9) есть произведение двух множителей первой степени. Тогда цилиндр «вырождается» в пару плоскостей.

Наконец, возможно еще, что уравнение вида (9) совсем не имеет вещественных решений (например $x^2+y^2 = -1$) и, следовательно, совсем не определяет никакого геометрического образа. Относительно такого уравнения принято говорить, что оно определяет мнимый цилиндр.

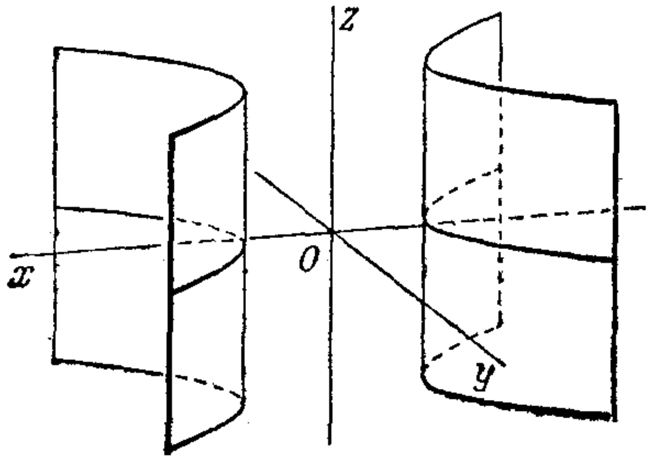

Рис. 10. Гиперболический цилиндр

4.6 Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида.

Среди различных типов поверхностей второго порядка имеются линейчатые поверхности, т. е. поверхности, составленные из прямых: конусы, цилиндры. Но оказывается, что кроме конусов и цилиндров линейчатыми поверхностями второго порядка являются еще однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Этот факт «на взгляд» не очевиден, однако легко доказывается алгебраически.

Проведем доказательство для однополостного гиперболоида. Представим каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

или

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right)$$

Рассмотрим далее два уравнения первой степени:

$$\begin{cases}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right)\end{cases} \tag{10}$$

где α и β некоторые числа, не равные одновременно нулю. Если α и β фиксированы, то уравнения совместно определяют прямую; меняя α и β, получим бесконечную систему прямых.

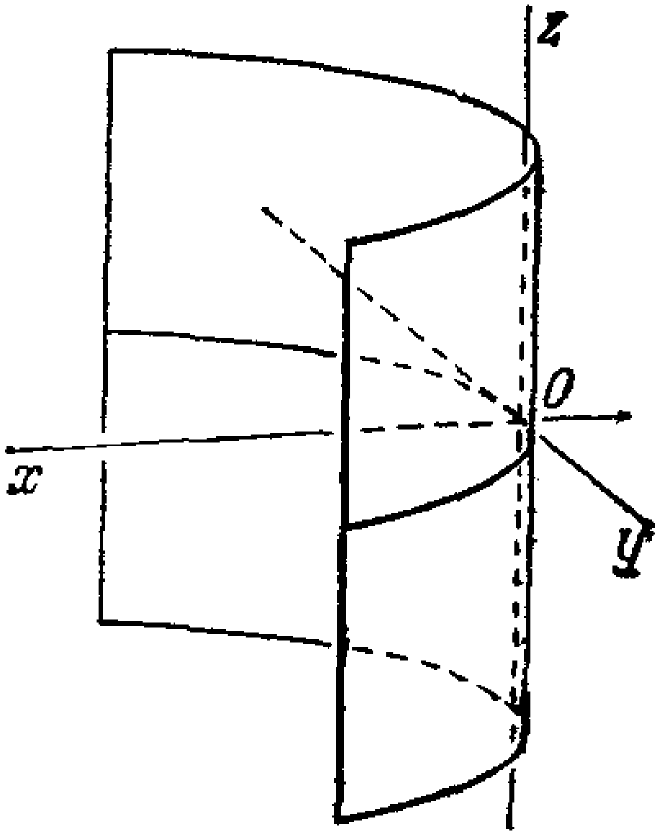

Рис. 11. Параболический цилиндр

Заметим теперь, что, перемножая уравнения (10) почленно, мы получим уравнение однополостного гиперболоида. Отсюда следует, что каждая из этих прямых целиком лежит на однополостном гиперболоиде. В самом деле, если координаты $(x; y; z)$ некоторой точки удовлетворяют двум уравнениям (10), то они удовлетворяют также уравнению однополостного гиперболоида); таким образом, каждая точка прямой, определяемой уравнениями (10) при любых α, β (не равных одновременно нулю), лежит на рассматриваемом однополостном гиперболоиде, т. е. на нем лежит вся эта прямая.

Покажем, наконец, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит одна и только одна прямая из указанной системы. Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — произвольная точка однополостного гиперболоида; так как координаты ее удовлетворяют уравнению гиперболоида, то

$$\left(\frac{x_0}{a} - \frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a} + \frac{z_0}{c}\right) = \left(1 - \frac{y_0}{b}\right)\left(1 + \frac{y_0}{b}\right)$$

Будем искать такие числа α, β чтобы соответствующая им прямая системы (10) проходила через точку M_0. Так как координаты точки M_0 должны удовлетворять уравнениям этой прямой, то для определения неизвестных α, β мы имеем два уравнения:

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)=\beta\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\alpha\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\end{cases}$$

Если

$$\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\neq 0$$

, то из первого уравнения этой системы находим $\beta = k\alpha$, где положено

$$k=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}}$$

При $\beta = k\alpha$ также и второе уравнение системы будет удовлетворено. Подставим $\beta = k\alpha$ в уравнения (10), считая α каким угодно, но не равным нулю. Так как оба уравнения в каждой своей части имеют после этой подстановки множитель α, то α можно сократить. Мы получим вполне определенную пару уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{a}+\frac{z}{c}=k\left(1+\frac{y}{b}\right)\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b},\end{cases}$$

которой соответствует одна вполне определенная прямая. Эта прямая проходит через точку M_0.

Если же

$$\left(1+\frac{y_0}{b}\right)=0,$$

то непременно

$$\left(1-\frac{y_0}{b}\right)\neq 0.$$

В таком случае решение системы можно найти, исходя из второго ее уравнения, после чего, аналогично предыдущему, можно доказать, что и в этом случае через точку M_0 проходит одна-единственная прямая системы (10). Итак, уравнения (10) при различных значениях α, β определяют бесконечную систему прямых, которые лежат на однополостном гиперболоиде и покрывают его сплошь. Эти прямые называются прямолинейными образующими однополостного гиперболоида.

Мы показали, что однополостный гиперболоид составлен из прямых, т.е. является линейчатой поверхностью. Но, более того, однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью. Это означает, что он обладает двумя системами прямолинейных образующих. В самом деле, аналогично уравнениям (10) можно составить уравнения

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right)\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right)\end{cases} \tag{11}$$

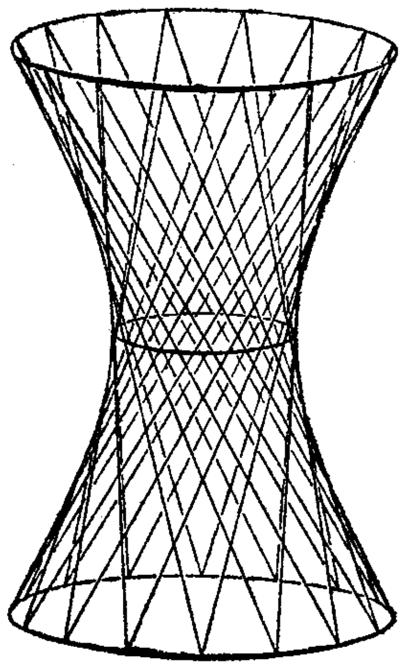

Рис. 12. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида

которые также определяют систему прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, причем отличную от той, которая определена уравнениями.

Однополостный гиперболоид с двумя системами своих прямолинейных образующих изображен на рис. 12.

4.7 Прямолинейные образующие гиперболического парабалоида.

Аналогичным образом можно показать что гиперболический параболоид также имеет две системы прямолинейных образующих, из которых одна определяется уравнениями

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha, \end{cases} \tag{12}$$

а другая — уравнениями

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\beta z \\ \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\alpha, \end{cases} \tag{13}$$

Изображение гиперболического параболоида с его двумя системами прямолинейных образующих дано на рис. 13.

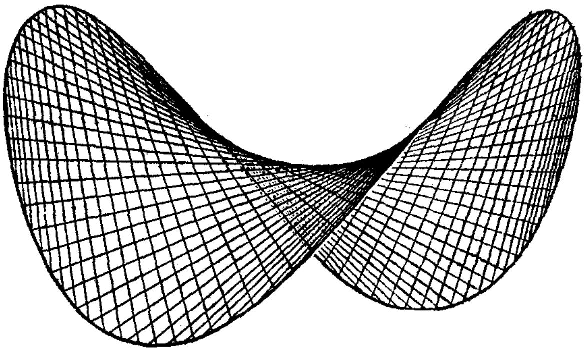

Рис. 13. Прямолинейные образующие гиперболического парабалоида

Знаменитому русскому инженеру Владимиру Григорьевичу Шухову принадлежит идея использования линейчатого характера однополостного гиперболоида в строительной технике. В. Г. Шухов предложил конструкции из металлических балок, расположенных так, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (вращения). Такие конструкции оказались легкими и прочными. Они часто применяются для устройства водонапорных башен и высоких радиомачт.

4.8 Приведение уравнения поверхности к каноническому виду

Определение. 4.8 *Каноническое уравнение поверхности, в котором x заменен на $x - x_0$, y на $y - y_0$, z на $z - z_0$ называется уравнением параллельно-смещенной поверхности.*

Пусть задано уравнение поверхности в виде:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dx + Ey + Fz + G = 0.$$

Для приведения его к каноническому виду необходимо:

1. Выделить полный квадрат при x, y и z (если соответствующие коэффициенты при старших степенях $\neq 0$)

2. По знакам при старших степенях определить тип поверхности.

3. Тождественными преобразованиями подвести уравнение под соответствующий канонический вид.

Пример. 4.1

$$225x^2 - 36y^2 + 100z^2 - 900x - 72y - 200z + 64 = 0.$$

Выделим полные квадраты:

$$\left[(15x)^2 - 2\cdot 15\cdot 30x + 900 - 900\right] -$$
$$\left[(6y)^2 + 2\cdot 6\cdot 6y + 36 - 36\right] +$$
$$\left[(10z)^2 - 2\cdot 10\cdot 10z + 100 - 100\right] + 64 = 0,$$

далее

$$(15x-30)^2 - 900 - (6y+6)^2 + 36 + (10z-10)^2 - 100 + 64 = 0$$

$$(15x-30)^2 - (6y+6)^2 + (10z-10)^2 = 900$$
$$225(x-2)^2 - 36(y+1)^2 + 100(z-1)^2 = 900$$

Получился однополостной гиперболоид, центр которого находится в т. $(2;-1;1)$ *и направленный вдоль оси* Oy. *Поделим на* 900 *и окончательно получим:*

$$\frac{(x-2)^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{25} + \frac{(z-1)^2}{9} = 1$$