

Числовые ряды

Содержание

1	Числовые ряды. Основные понятия	1
2	Необходимый признак сходимости ряда	1
3	Простейшие свойства числовых рядов	2
4	Знакоположительные ряды	3
5	Знакопеременные ряды	9
6	Знакопеременные ряды	10
7	Рекомендации	12

1 Числовые ряды. Основные понятия

Пусть дана последовательность действительных чисел

$$\{u_n; u_n \in R, n \geq 1\}.$$

Определение. 1.1 Выражение вида

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (1)$$

называется *числовым рядом*, числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ — членами ряда, u_n — n -ым или общим членом ряда.

Определение. 1.2 Сумма n первых членов ряда называется n -ой частичной суммой и обозначается символом S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Определение. 1.3 Если для последовательности S_n частичных сумм существует конечный предел S , то ряд (1) называется *сходящимся*, а число S — суммой данного ряда. В этом случае пишут:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S.$$

Определение. 1.4 Ряд (1) называется *расходящимся*, если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

не существует или бесконечен.

Определение. 1.5 Ряд, полученный из (1) отбрасыванием первых его m членов, называется *остатком* ряда:

$$u_{m+1} + u_{m+2} + \dots + u_{m+n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_{m+n}.$$

Ряд сходится или расходится вместе со своим остатком.

2 Необходимый признак сходимости ряда

Теорема. 2.1 Если ряд (1) сходится, то его общий член стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Следствие. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0,$$

то ряд (1) расходится.

Пример. 2.1 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}.$$

Найдем предел общего члена ряда:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n} = \infty$$

(в числителе стоит показательная функция, которая растет быстрее чем n), следовательно, ряд расходится.

Пример. 2.2 Исследовать сходимость гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad (2)$$

Очевидно, условие теоремы 2.1 выполняется, однако, гармонический ряд расходится. Действительно, если предположить, что ряд сходится и его сумма равна S , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S - S = 0.$$

Тогда из неравенства

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

следует что:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} - S_n) \geq \frac{1}{2}$$

Получили противоречие.

3 Простейшие свойства числовых рядов

Рассмотрим ряды:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n); \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n. \quad (a; b; c; d)$$

Ряд (с) называется суммой рядов (а) и (b), а ряд (d) — произведением ряда (а) на число α . Если сходятся ряды (а) и (b), то сходятся и ряды (с) и (d) и если

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = U; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = V,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n) = S + V; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha u_n = \alpha U.$$

4 Знакоположительные ряды

Определение. 4.1 *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется *знакоположительным*, если $\forall n : u_n \geq 0$.

Приведем некоторые достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Теорема. 4.1 (*Признак сравнения в неперелыной форме*). Даны 2 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (a;b)$$

Если, начиная с некоторого n , выполняется условие $u_n \leq v_n$ и ряд (b) сходится, то сходится и ряд (а). Если же ряд (а) расходится, то ряд (b) тоже расходится.

Теорема. 4.2 (*Признак сравнения в перелыной форме*). Даны 2 ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (a;b)$$

Если существует конечный и не равный нулю предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k \neq 0,$$

то ряды (а) и (b) сходятся или расходятся одновременно.

В качестве рядов для сравнения удобно выбирать:

1. гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который расходится;

2. обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

(ряд Дирихле), который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$;

3. геометрическую прогрессию

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

которая сходится, если $|q| < 1$ и расходится, если $|q| \geq 1$.

В случае, когда геометрическая прогрессия сходится, можно найти ее сумму:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

Признак сравнения в предельной форме особенно эффективен для рядов, общий член которых есть алгебраическая функция целого аргумента, либо функция, в пределе приводимая к вышеуказанной (использование таблицы эквивалентных бесконечно малых), т.к. позволяет свести исследование сходимости исходного ряда к рассмотрению одного из трех «эталонных» рядов.

Пример. 4.1 Исследовать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} + 3}$$

Ряд знакоположительный, применим к нему признак сравнения в предельной форме, сравнив его с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}},$$

который сходится как обобщенный гармонический ряд с $p = \frac{5}{4} > 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n}}{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} + 3} : \frac{1}{n^{5/4}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n} \sqrt[4]{n^5}}{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} + 3} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2}}{n^{3/2} - n^{1/3} + 3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{n^{7/6}} + \frac{3}{n^{3/2}}} = 1. \end{aligned}$$

Предел отношения общих членов этих рядов при $n \rightarrow \infty$ конечный, не равный нулю, следовательно, ряды ведут себя одинаково — данный ряд сходится.

Ряд для сравнения подбираем по степени n следующим образом: при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{\sqrt[4]{n}}{n\sqrt{n} - \sqrt[3]{n} + 3} \sim \frac{n^{1/4}}{n^{3/2}} \sim \frac{1}{n^{5/4}}.$$

Пример. 4.2 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}$$

Ряд знакоположительный. Т.к. при $n \rightarrow \infty$ аргумент $\pi/4n \rightarrow 0$, то (первый замечательный предел)

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n} \sim \frac{\pi}{4n},$$

по-этому для сравнения берем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{4n} = \frac{\pi}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Последний ряд является гармоническим, все члены которого умножены на $\pi/4$, что не влияет на его расходимость. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4n}}{\frac{\pi}{4n}} = 1,$$

то оба ряда расходятся.

Пример. 4.3 Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \cos \pi n}{n^2}$$

Ряд является знакоположительным, так как $\cos \pi n = (-1)^n$, т.е. он может быть равен 1 или -1 , то $2 \leq \cos \pi n \leq 4$. отсюда следует что:

$$\frac{2}{n^2} \leq \frac{3 + \cos \pi n}{n^2} \leq \frac{4}{n^2}$$

Из последнего неравенства видно, что исходный ряд можно сравнить с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2},$$

а этот ряд сходится (обобщенный гармонический с $p = 2 > 1$, все члены которого умножены на 4). Но так как ряд с большими членами сходится, то на основании признака сравнения в непердельной форме будет сходиться и исходный ряд.

Теорема. 4.3 (признак Даламбера). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится; при $q > 1$ ряд расходится; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Признак Даламбера не дает результата для рядов с общим членом в виде дробно-рациональной функции или функции, содержащей под радикалом переменную n , т.к. замена n на $n + 1$ не меняет коэффициента при старших степенях n . Признак эффективен в случае наличия в общем члене ряда показательной функции или факториалов. ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$).

Пример. 4.4 Исследовать сходимость ряда

$$\frac{2}{1} + \frac{2 \cdot 5}{1 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{1 \cdot 5 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-1)}$$

с помощью признака Даламбера.

Здесь

$$u_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-1)}, \quad u_{n+1} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot (3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-1) \cdot (4n+1)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1) \cdot (3n+2) \cdot 1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-1) \cdot (4n+1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1. \end{aligned}$$

Ряд сходится, т.к. $q < 1$.

Пример. 4.5 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n + 1}.$$

$$u_n = \frac{n!}{2^n + 1}, \quad u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1} + 1},$$

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)n!(2^n + 1)}{(2^{n+1} + 1)n!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n (1 + 1/2^n) (n+1)}{2^n (2 + 1/2^n)} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

Т.к. $q > 1$, ряд расходится.

Теорема. 4.4 (Признак Коши, радикальный). Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q,$$

то при $q < 1$ ряд сходится; при $q > 1$ ряд расходится; при $q = 1$ вопрос о сходимости ряд остается открытым.

Радикальный признак Коши дает результат в случае, когда общий член ряда имеет вид степенно-показательной функции целочисленного аргумента.

Пример. 4.6 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}.$$

Ряд знакоположительный, применим к нему признак Коши; найдем

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{\ln^n(n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1.$$

По теореме 5 ряд сходится.

Теорема. 4.5 (интегральный признак Коши) Пусть дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если функция $y = f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. $f(n) = u_n$;
2. непрерывна, положительна и монотонно убывает при $1 \leq a \leq x$,

то ряд и несобственный интеграл

$$\int_a^{\infty} f(x) dx$$

одновременно сходятся или расходятся.

Интегральный признак Коши удобно применять в тех случаях, когда функция $f(x)$, полученная заменой в общем члене ряда целочисленной переменной n на непрерывную переменную x , обладает легко находимой первообразной.

Пример. 4.7 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^2}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}.$$

При натуральных значениях аргумента значения функции совпадают с соответствующими членами ряда. Кроме того, $f(x)$ при $x \geq 1$ будет непрерывной, положительной и монотонно убывающей (функция $(x+1)^2$, стоящая в знаменателе, растет быстрее, чем $\ln(x+1)$, стоящая в числителе). Показать, что $f(x)$ будет монотонно убывающей, можно и с помощью $f'(x)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} \right)' &= \frac{(x+1)^2 \cdot \frac{1}{x+1} - 2(x+1)\ln(x+1)}{(x+1)^4} = \\ &= \frac{(x+1)(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^4} = \frac{(1 - 2\ln(x+1))}{(x+1)^3} < 0 \end{aligned}$$

для $\forall x \in [1, \infty)$, следовательно, $f(x)$ — убывающая на $[1, \infty)$.

Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx,$$

который берется по частям:

$$u = \ln(x+1), \quad du = \frac{dx}{x+1}, \quad dv = \frac{dx}{(x+1)^2}, \quad v = -\frac{1}{x+1},$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx = - \left. \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right|_1^{\infty} - \left. \frac{1}{x+1} \right|_1^{\infty}.$$

Пределы найдем отдельно, для нахождения первого применим правило Лопиталя:

$$\begin{aligned} - \left. \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right|_1^{\infty} &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} + \frac{\ln 2}{2} = \\ &= - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} + \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Далее:

$$- \left. \frac{1}{x+1} \right|_1^{\infty} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Итак,

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2} dx = \ln \sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

Интеграл сходится, следовательно, сходится и данный ряд.

5 Знакопередающие ряды

Определение. 5.1 Ряд называется знакопередающим, если он имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, \quad u_n \geq 0.$$

Теорема. 5.1 (признак Лейбница). Если члены знакопередающего ряда не возрастают по абсолютной величине с ростом n , т.е., начиная с некоторого n , верно неравенство $u_{n+1} \leq u_n$, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0,$$

то ряд сходится, причем, если его сумма равна s , то $0 \leq s \leq u_1$.

Пример. 5.1 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Ряд знакопередающийся, применим признак Лейбница:

$$u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2} = u_n.$$

Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Выполнены оба условия признака Лейбница, следовательно, ряд сходится.

Пример. 5.2 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}.$$

Члены этого ряда по абсолютной величине монотонно убывают. В самом деле,

$$u_n = \frac{n}{6n-5} > \frac{n+1}{6(n+1)-5} = u_{n+1},$$

т.к.

$$\frac{n}{6n-5} - \frac{n+1}{6(n+1)-5} = \frac{6n^2+n-6n^2+5n-6n+5}{(6n-5)(6n+1)} = \frac{5}{(6n-5)(6n+1)} > 0.$$

Однако,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{6n-5} = \frac{1}{6} \neq 0.$$

Значит, ряд расходится по необходимому признаку (следствие из теоремы 2.1), по признаку Лейбница расходимость не установить.

6 Знакопеременные ряды

Определение. 6.1 Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

называется знакопеременным, если членами его являются любые действительные числа: $\forall n : u_n \in R$.

Теорема. 6.1 (признак абсолютной сходимости). Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|,$$

то сходится и исходный ряд, который в этом случае называется абсолютно сходящимся.

Так как знакопеременный ряд — частный случай знакопеременного ряда, то и к знакопеременному ряду можно применять признак абсолютной сходимости.

Пример. 6.1 Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}.$$

Дан знакопеременный ряд. Применим к нему признак абсолютной сходимости. Составим ряд из абсолютных величин членов исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}.$$

Этот знакоположительный ряд сравним в неопределенной форме с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln 10)^n},$$

который сходится, поскольку представляет собой геометрическую прогрессию с $q = \ln 10 < 1$. Имеем очевидное неравенство:

$$\frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n} \leq \frac{1}{(\ln 10)^n},$$

тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{(\ln 10)^n}$$

также сходится, а значит по признаку абсолютной сходимости исходный ряд сходится абсолютно.

Определение. 6.2 Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

сходится, а ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$$

расходится, то исходный ряд называется условно сходящимся.

Пример. 6.2 Пример. Исследовать на абсолютную или условную сходимость так называемый ряд Лейбница:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

По признаку Лейбница этот ряд сходится, т.к. для него выполняются оба условия этого признака:

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = u_n,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Но ряд, составленный из абсолютных величин данного ряда, является гармоническим, который расходится (2). Следовательно, ряд Лейбница сходится условно.

Теорема. 6.2 В сходящемся (абсолютно или условно) ряде можно группировать члены, не меняя их порядка. Иными словами, если сходится ряд $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$, то сходится и ряд $(u_1 + u_2 + \dots + u_n) + (u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_l) + (u_{l+1} + u_{l+2} + \dots + u_m) + \dots$, причем оба ряда имеют одну и ту же сумму.

Теорема. 6.3 Абсолютно сходящийся ряд остается сходящимся и сохраняет сумму при любой перестановке его членов.

Теорема. 6.4 В условно сходящемся ряде при соответствующей перестановке его членов можно сделать его сумму равной любому наперед заданному числу или сделать ряд расходящимся.

Определение. 6.3

Произведением рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = s_1; \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = s_2$$

называется ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

где $w_n = u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1$.

Теорема. 6.5 Если перемножаемые ряды сходятся абсолютно, то ряд — произведение сходится также абсолютно и имеет сумму, равную $s_1 \cdot s_2$.

7 Рекомендации

Краткие рекомендации по применению тех или иных признаков сходимости к соответствующим рядам приведены в следующем списке:

Знакоположительные ряды.

1. Необходимый.
2. Сравнения в неопределенной форме.
3. Сравнения в предельной форме.
4. Даламбера.
5. Коши радикальный.
6. Коши интегральный.

Знакопеременные ряды.

1. Необходимый.
2. Лейбница.
3. Абсолютной сходимости.

Знакопеременные ряды.

1. Необходимый.
2. Абсолютной сходимости.

Следует иметь в виду, что существуют и другие признаки сходимости рядов, с которыми можно познакомиться в литературе.