Типовой расчет по теме «Теория вероятностей» разработан преподавателями кафедры «Высшая математика»

Руководство к решению типового расчета выполнила преподаватель Тимофеева Е.Г.

Основные определения и теоремы

Определение: *Случайной величиной* (СВ) называют переменную величину, которая в зависимости от исходов принимает значения, зависящие от случая.

Определение: СВ, принимающая лишь некоторые значения из числового промежутка, называется *дискретной случайной величиной* (ДСВ).

Определение: *Законом распределения дискретной случайной величины* называется соответствие между значениями этой величины и их вероятностями.

Закон распределения ДСВ может быть задан: а) таблично; б) аналитически; в) графически.

а) таблично:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

События $X= x_i$ (i=1,2,…,n) являются несовместными и единственно возможными, т.е. они образуют полную группу несовместных событий, поэтому сумма вероятностей их равна единице (условие полноты):

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = 1 .$$

б) аналитически: $p=f(x)$ (т.е. с помощью формулы);

в) графически: для чего в прямоугольной системе координат строят точки $(x_k; p_k)$ и соединяют их последовательно отрезками прямых. Получившаяся при этом ломаная линия называется *многоугольником распределения случайной величины X*.

Определение: СВ, которая может принимать все значения из некоторого промежутка, называется *непрерывной случайной величиной*.

Для непрерывной случайной величины нельзя построить ряд распределения, т.к. невозможно перечислить все ее возможные значения. Непрерывная СВ может быть задана либо *функцией распределения*, либо *плотностью вероятности*.

Определение: Функцией распределения СВ X называется функция действительной переменной X, определяемая равенством:

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\ ,$$

где $P(X < x)$ – вероятность того, что СВ X примет значение, меньшее x.

Функция распределения *F(X) для дискретной случайной величины X*, которая может принимать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями, имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k)\ ,$$

где неравенство $x_k<x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x. В этом случае $F(x)$ представляет собой разрывную функцию, остающуюся постоянной между отдельными значениями СВ и меняющуюся скачком при переходе через каждое из этих значений.

Функция $F(x)$ случайной величины X имеет следующие свойства:

1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку [0;1], т.е. $0\leq F(x)\leq 1$.
2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей, т.е. если $x_1< x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$.
3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева.
4. Если все возможные значения СВ X принадлежат интервалу (a;b), то для ее функции распределения $F(x)$ верно: $F(x)=0$, при $x\leq a$; $F(x)=1$ при $x\geq b$.
5. Если все возможные значения СВ X принадлежат бесконечному интервалу $(-\infty;+\infty)$, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0;\ \ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

На основании свойств функции распределения можно судить об особенностях ее графика (рис. 1, 2).

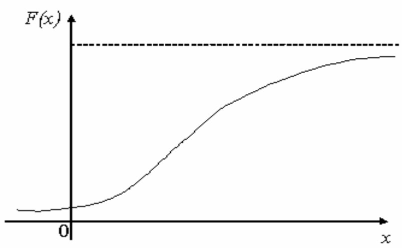

Рисунок 1

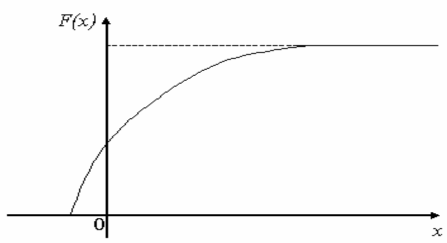

Рисунок 2

Зная функцию распределения, можно найти вероятность того, что СВ X попадет в интервал $(x_1; x_2)$ по формуле:

$$P(x_1 <X< x_2)=F(x_2)-F(x_1),$$

т.е. вероятность попадания значения случайной величины в заданный интервал равняется разности значений функции распределения этой СВ, вычисленных в конце и начале интервала.

Определение: *Плотностью распределения* (дифференциальной функцией распределения) вероятностей случайной величины *X* в точке *x* называется предел (если он существует) отношения вероятности попадания значений этой величины в интервал $(x;x+\Delta x)$ к длине отрезка $[x;x+\Delta x]$, когда последняя стремится к нулю:

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x}.$$

Вероятность попадания значений СВ *X* в интервал $(x_1;\ x_2)$ равна определенному интегралу от плотности распределения *f(x)* по отрезку $(x_1; x_2)$, т.е.:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

Плотность распределения обладает следующими свойствами:

1. Плотность распределения *f(x)* – неотрицательная функция, т.е. $f(x) \geq 0$.
2. На области дифференцируемости функции распределения *F(x)* ее производная равна плотности распределения:

$$f(x) = F'(x)$$

(производная интегральной функции равна дифференциальной функции).

3. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty;+\infty)$ от плотности распределения *f(x)* равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Если все возможные значения СВ принадлежат отрезку $[x_1;x_2]$, то $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 1$, так как $f(x)=0$ вне этого отрезка.

Определение: *Математическим ожиданием дискретной случайной величины X* называется сумма произведений ее значений на соответствующие им вероятности.

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k.$$

Математическое ожидание ДСВ приближенно равно *среднему арифметическому* всех ее возможных значений. Вследствие этого математическое ожидание СВ называют ее средним значением или просто средним.

Математическое ожидание ДСВ, принимающей бесконечную последовательность значений, определяется формулой:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot p_k \ ,$$

если этот ряд сходится абсолютно.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X, все значения которой принадлежат [x_1, x_2], а $f(x)$ – ее плотность вероятностей, определяется формулой:

$$M(X)=\int_{x_1}^{x_2} xf(x)dx \ .$$

Если все значения непрерывной СВ X принадлежат бесконечному промежутку, то математическое ожидание определяется формулой:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \ ,$$

когда этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Значение математического ожидания СВ X заключено между ее наименьшим и наибольшим значениями:

$$a \le M(X) \le b,$$

где a – наименьшее, b – наибольшее значение величины X.

Определение: *Дисперсией*, или рассеиванием, СВ X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от среднего:

$$D(X)=M\left(\left(X-M(X)\right)^2\right).$$

Дисперсия ДСВ равна разности между математическим ожиданием квадрата СВ X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2.$$

Если ДСВ принимает бесконечную последовательность значений, то ее дисперсия определяется формулой:

$$D(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_k-M(x_k)\right)^2 p_k \ .$$

Дисперсия СВ X представляет собой ее числовую характеристику, которая *определяет меру рассеивания* значения этой величины *относительно ее математического ожидания*. Дисперсия любой СВ неотрицательна, т.е. $D(X) \ge 0$.

Дисперсия непрерывной СВ X, значения которой принадлежат [x_1, x_2], определяется формулой:

$$D(X)=\int_{x_1}^{x_2} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2 .$$

Дисперсия непрерывной СВ *X*, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку, определяется формулой:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} \left(x-M(X)\right)^2 f(x)dx ,$$

если этот несобственный интеграл сходится абсолютно.

Определение: *Средним квадратическим отклонением* СВ *X* называется квадратный корень из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)} .$$

Среднее квадратическое, как и дисперсия, служит *мерой рассеивания* случайной величины относительно ее математического ожидания.

Определение: *Нормальным распределением*, или *распределением Гаусса*, называется распределение с плотностью вероятностей:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma>0,$$

где a – его математическое ожидание; σ – среднее квадратическое отклонение.

О случайной величине *X*, плотность распределения которой определяется данной функцией, говорят, что она распределена нормально с параметрами $a;\ \sigma$, и коротко называют ее нормальной кривой (кривой Гаусса). Вершина кривой соответствует точке с абсциссой $x=a=M(X)$, параметр σ (среднее квадратическое отклонение СВ *X*) определяет абсциссы точек перегиба кривой вероятностей (рис. 3).

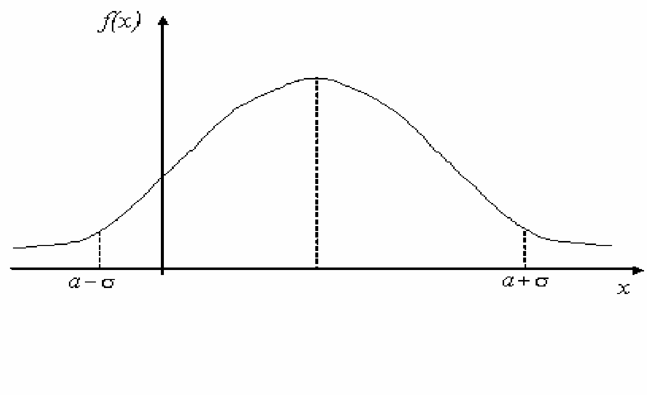

Рисунок 3

Вероятность попадания значений нормальной СВ *X* в интервал (*α;β*) определяется формулой:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где *Φ(x*) – функция Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$

Функция распределения СВ *X*, распределенной по нормальному закону выражается:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right).$$

Примерный вариант типового расчета

Задание 3. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения $P(X) = C_7^x \alpha^x (1-\alpha)^{7-x}$ с параметром α=0,1 при целом неотрицательном *X*. Требуется:

а). составить ряд распределения случайной величины *X*;

б). построить многоугольник распределения;

в). найти *M(X), D(X), σ(X);*

г). найти функцию распределения и построить ее график;

д). найти вероятность того, что случайная величина *X* попадет в интервал (0,5;2,5);

е). найти вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее 1,5.

Задание 4. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = \begin{cases} 0, & x < -\pi; \\ A \cdot \left(1 - \sin\dfrac{x}{2}\right), & -\pi \le x \le \pi; \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$ Требуется:

а). найти коэффициент *A*;

б). найти *M(X), D(X), σ(X)*;

в). найти функцию распределения *F(x)*;

г). построить графики *F(x)* и *f(x)*, рассматривая не менее 5 точек на интервале [-π; π];

д). найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (-π; 0).

Задание 5. Найти вероятность попадания в интервал (-0,5;2), нормально распределенной случайной величины *X*, у которой задано математическое ожидание ***a***=3,5 и среднее квадратическое отклонение **σ**=0,5***a***=1,75. Записать функции *F(x)* и *f(x)* этого нормального закона и построить их графики на указанном интервале.

Задание 3. Дискретная случайная величина *X* задана законом распределения $P(X)=C_7^x\alpha^x(1-\alpha)^{7-x}$ с параметром α=0,1 при целом неотрицательном *X*. Требуется:

а). составить ряд распределения случайной величины *X*;

б). построить многоугольник распределения;

в). найти *M(X), D(X), σ(X);*

г). найти функцию распределения и построить ее график;

д). найти вероятность того, что случайная величина *X* попадет в интервал (0,5;2,5);

е). найти вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее 1,5.

Решение:

а). составить ряд распределения случайной величины *X*.

Случайная величина X может принимать значения от 0 до 7. $P(X)=C_7^x\alpha^x(1-\alpha)^{7-x}$,

α=0,1; $\tilde{N}_n^k=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Найдем P(X):

$P(0)=C_7^0 0,1^0(1-0,1)^7=0,478$; $P(1)=C_7^1 0,1^1(1-0,1)^6=0,372$;

$P(2)=C_7^2 0,1^2(1-0,1)^5=0,124$; $P(3)=C_7^3 0,1^3(1-0,1)^4=0,023$;

$P(4)=C_7^4 0,1^4(1-0,1)^3=0,003$; $P(5)=C_7^5 0,1^5(1-0,1)^2=0$;

$P(6)=C_7^6 0,1^6(1-0,1)^1=0$; $P(7)=C_7^7 0,1^7(1-0,1)^0=0$.

Составим закон распределения в виде таблицы:

X	0	1	2	3	4
P	0,478	0,372	0,124	0,023	0,003

Ответ:

X	0	1	2	3	4
P	0,478	0,372	0,124	0,023	0,003

б). построить многоугольник распределения.

В прямоугольной системе координат строим точки M_1(0;0,478), M_2(1;0,372), M_3(2;0,124), M_4(3;0,023), M_5(4;0,003), соединяем эти точки отрезками прямых. Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5$ (см. рис. 4) является многоугольником распределения ДСВ.

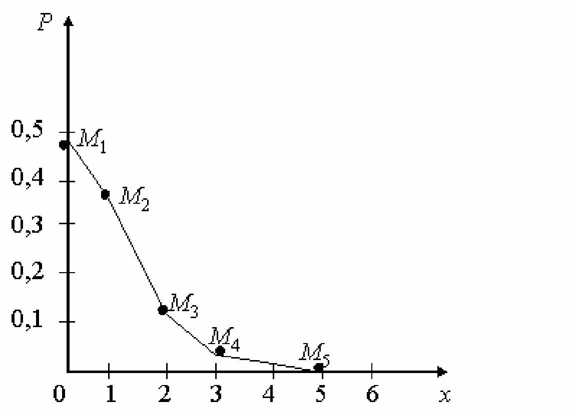

Рисунок 4

в). найти *M(X), D(X), σ(X).*

$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k$ =0·0,478+1·0,372+2·0,124+3·0,023+4·0,003=0,701;

$D(X)=M(X^2)-\left[M(X)\right]^2$. Для вычисления дисперсии необходимо найти $M(X^2)$. Квадрат случайной величины *X,* т.е X^2 – это новая СВ, которая с теми же вероятностями, что и СВ *X*, принимает значения, равные квадратам ее значений. Закон распределения СВ X^2 можно записать в виде:

X	0	1	4	9	16
P	0,478	0,372	0,124	0,023	0,003

$M(X^2)$= 0·0,478+1·0,372+4·0,124+9·0,023+16·0,003=1,123, следовательно,

$D(X)$=1,123 – $(0{,}701)^2$=0,633.

$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,633}$ =0,796.

Ответ: *M(X)*=0,701; *D(X)*=0,633; *σ(X)*=0,796.

г). найти функцию распределения и построить ее график.

Для построения функции распределения F(x) дискретной СВ X воспользуемся ее свойствами.

При

x≤0 $F(x)=\sum_{x_k<0} P(X=x_k)$ =0 ;

0<x≤1 $F(x)=\sum_{x_k<1} P(X=x_k)$ =$P(X=0)=0,478$;

1<x≤2 $F(x)=\sum_{x_k<2} P(X=x_k)$ =$P(X=0)+P(X=1)$ =0,478+0,372=0,85;

2<x≤3 $F(x)=\sum_{x_k<3} P(X=x_k) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$ =0,478+0,372+0,124=0,974;

3<x≤4 $F(x)=\sum_{x_k<4} P(X=x_k) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)$ =0,997;

x>4 $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)=1$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0; \\ 0,478 & 0<x\le 1; \\ 0,85 & 1<x\le 2; \\ 0,974 & 2<x\le 3; \\ 0,997 & 3<x\le 4; \\ 1 & x>4. \end{cases}$$

График функции изображен на рисунке 5

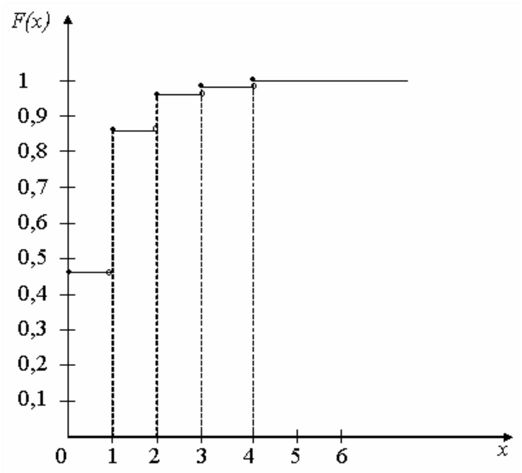

Рисунок 5

Ответ: $F(x)=\begin{cases} 0 & x\le 0; \\ 0,478 & 0<x\le 1; \\ 0,85 & 1<x\le 2; \\ 0,974 & 2<x\le 3; \\ 0,997 & 3<x\le 4; \\ 1 & x>4. \end{cases}$

д). найти вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал (0,5;2,5).

Найдем искомую вероятность по формуле:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

$P(0,5<x<2,5)=F(2,5)-F(0,5)$=0,974–0,478=0,4496.

Ответ: $P(0,5<x<2,5)$=0,4496.

е). найти вероятность того, что случайная величина X примет значение меньшее 1,5.

$P(x<1,5)=F(1,5)-F(0)$=0,85.

Ответ: $P(x<1{,}5)=0{,}85$.

Задание 4. Дифференциальная функция распределения случайной величины X имеет вид $f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ A\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ Требуется:

а). найти коэффициент A;

б). найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$;

в). найти функцию распределения $F(x)$;

г). построить графики $F(x)$ и $f(x)$, рассматривая не менее 5 точек на интервале $[-\pi; \pi]$;

д). найти вероятность попадания случайной величины X в интервал $(-\pi; 0)$.

Решение:

а). найти коэффициент A:

Плотность распределения должна удовлетворять третьему свойству, т.е. если все возможные значения СВ принадлежат отрезку $[x_1;x_2]$, то $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=1$, так как $f(x)=0$ вне этого отрезка. Значит:

$\int\limits_{-\pi}^{\pi} A\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=1$, откуда $A=\dfrac{1}{\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx}$;

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}dx-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin\frac{x}{2}dx=\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\pi+2\cos\frac{\pi}{2}-\left(-\pi+2\cos\frac{-\pi}{2}\right)=2\pi;$$

Следовательно, $A=\dfrac{1}{2\pi}$. Таким образом, плотность распределения имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \dfrac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\dfrac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: $A=0{,}159$.

б). найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$:

$$M(X)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^2}{2}+2x\cos\frac{x}{2}-4\sin\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=-\frac{4}{\pi}=-1,273;$$

$$D(X)=\int\limits_{-\pi}^{\pi} x^2\frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx-\left(1,273\right)^2=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^3}{3}+2x^2\cos\frac{x}{2}-8x\sin\frac{x}{2}-16\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}-$$

$$-\left(1,273\right)^2=\frac{\pi^2}{3}-\left(1,273\right)^2=1,669;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,669}=1,292.$$

Ответ: $M(X)=-1,273$; $D(X)=1,669$; $\sigma(X)=1,292$.

в). найти функцию распределения $F(x)$:

При

$x<-\pi$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{x} 0\cdot dt=0;$

$-\pi\le x\le\pi$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-\pi} f(t)dt+\int\limits_{-\pi}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-\pi} 0\cdot dt+\int\limits_{-\pi}^{x}\frac{1}{2\pi}\left(1-\sin\frac{t}{2}\right)dt=$$

$$=0+\frac{1}{2\pi}\left(t+2\cos\frac{t}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{x}=\frac{1}{2\pi}\left(x+2\cos\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2};$$

$x>\pi$ $\quad F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=1.$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$$

Ответ: $F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$

г). построить графики $F(x)$ и $f(x)$, рассматривая не менее 5 точек на интервале $[-\pi;\ \pi]$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi+x+2\cos\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}0, & x<-\pi;\\ \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1-\sin\frac{x}{2}\right), & -\pi\le x\le\pi;\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$$

Изобразим графики *F(x)* и *f(x)* на рисунках 6 и 7.

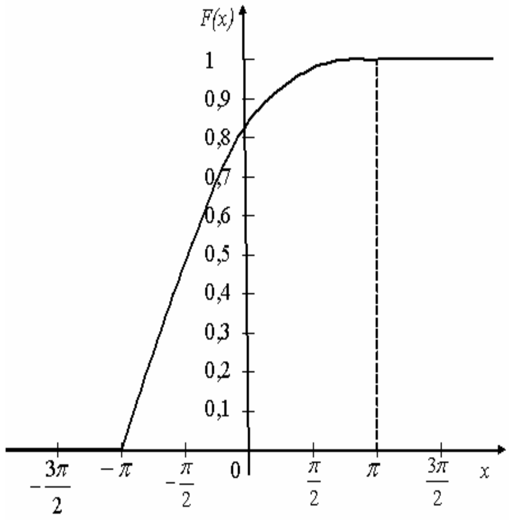

Рисунок 6

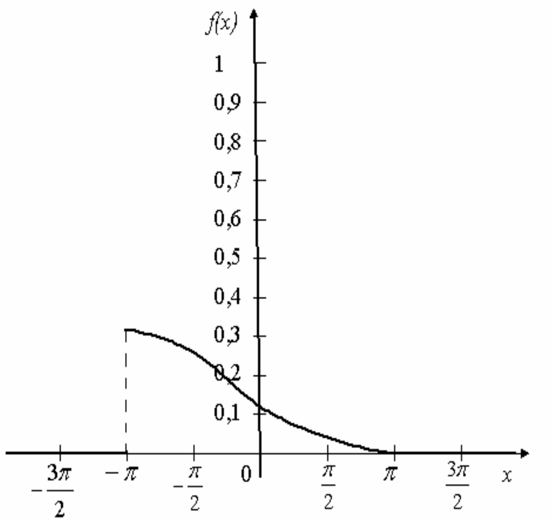

Рисунок 7

д). найти вероятность попадания случайной величины *X* в интервал (-π; 0):

1 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

$$P(-\pi < X < 0) = F(0) - F(-\pi) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi + 2\cos\frac{0}{2}\right) - \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\pi - \pi + 2\cos\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} = 0{,}818;$$

2 способ:

Воспользуемся формулой: $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$.

$$P(-\pi < X < 0) = \int\limits_{-\pi}^{0} \frac{1}{2\pi}\cdot\left(1 - \sin\frac{x}{2}\right)dx = \left(\frac{1}{2\pi}x + \frac{1}{\pi}\cos\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{0} = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} = 0{,}818.$$

Ответ: $P(-\pi < X < 0) = 0{,}818$.

Задание 5. Найти вероятность попадания в интервал (-0,5;2), нормально распределенной случайной величины *X*, у которой задано математическое ожидание ***a***=3,5 и среднее квадратическое отклонение **σ**=0,5***a***=1,75. Записать функции *F(x)* и *f(x)* этого нормального закона и построить их графики на указанном интервале.

Решение:

Найдем вероятность попадания в интервал (-0,5;2), нормально распределенной случайной величины *X*.

Вероятность попадания значений нормальной СВ X в интервал $(\alpha;\beta)$ определяется формулой:

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

$$P(-0,5 < x < 2) = \Phi\left(\frac{2 - 0,5}{1,75}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5 - 0,5}{1,75}\right) = \Phi\left(0,86\right) - \Phi\left(-0,57\right) = 0,3051 + 0,2157 = 0,5208.$$

Запишем функции $F(x)$ и $f(x)$ этого нормального закона:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}; \quad \sigma > 0 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{1,75\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-0,5)^2}{2(1,75)^2}} = \frac{1}{4,39} \mathring{a}^{-\frac{(\tilde{o}-0,5)^2}{6,125}};$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 0,5}{1,75}\right).$$

Построим графики функций $f(x)$ и $F(x)$ на интервале (-0,5;2) (рис. 8, 9). Вершина кривой $f(x)$ соответствует точке с абсциссой $\boldsymbol{a}$=3,5; точки перегиба: $\boldsymbol{a-\sigma}$=-0,75 и $\boldsymbol{a+\sigma}$=1,75.

f(-0,5)=0,19;	F(-0,5)=0,2843;
f(0)=0,22;	F(0)=0,3859;
f(0,5)=0,23;	F(0,5)=0,5;
f(1)=0,22;	F(1)=0,6141;
f(1,5)=0,19;	F(1,5)=0,7157;
f(2)=0,16;	F(2)=0,8051.

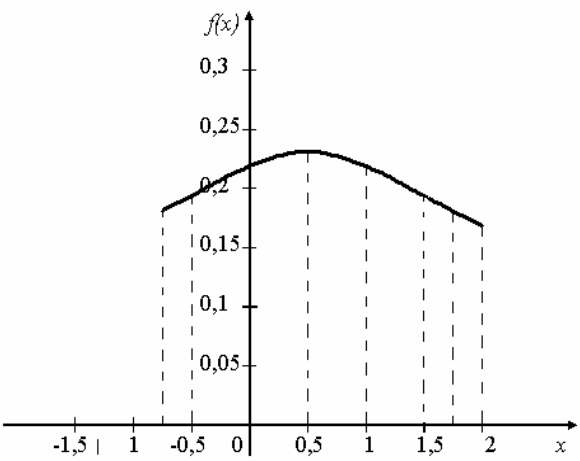

Рисунок 8

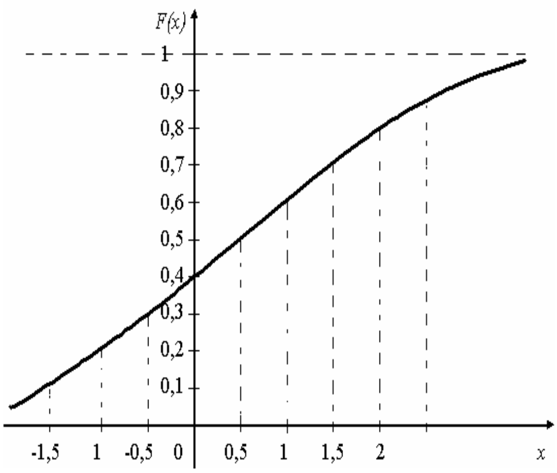

Рисунок 9

Ответ: $P(-0,5 < x < 2)$=0,5208; $f(x) = \frac{1}{4,39} \mathring{a}^{-\frac{(\tilde{o}-0,5)^2}{6,125}}$; $F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x - 0,5}{1,75}\right)$.

Теоретические вопросы для защиты типового расчета

1. Что называют случайной величиной?
2. Какую величину называют дискретной случайной величиной?
3. Какую величину называют непрерывной случайной величиной?
4. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?
5. Как задают закон распределения дискретной случайной величины, принимающий конечное множество значений?
6. Что называют многоугольником распределения?
7. Как определяется функция распределения для СВ?
8. Какими свойствами обладает функция распределения СВ *X*?
9. Как определяется функция распределения для ДСВ?
10. Какой график имеет функция распределения?
11. Как с помощью функции распределения вычислить вероятность того, что СВ *X* примет значения из интервала $(x_1; x_2)$?
12. Что называют плотностью распределения СВ?
13. Как с помощью плотности распределения найти вероятность попадания значений СВ *X* в интервала $(x_1; x_2)$?
14. Какие свойства имеет плотность распределения?
15. Как связаны между собой плотность распределения и функция распределения?
16. Как определяется математическое ожидание ДСВ *X*, принимающей конечное и бесконечное множество значений?
17. Как определяется математическое ожидание непрерывной СВ, все значения которой принадлежат $[x_1; x_2]$; бесконечному промежутку?
18. Что называют отклонением СВ от ее математического ожидания?
19. Как определяется дисперсия СВ?
20. Как определяется дисперсия СВ, все значения которой принадлежат $[x_1; x_2]$; бесконечному промежутку?
21. Что такое среднее квадратическое отклонение?
22. Какое распределение вероятностей СВ называют нормальным?
23. Каков вероятностный смысл параметров, входящих в функцию, задающую нормальное распределение?
24. Чему равно математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение нормальной СВ?
25. Как вычислить вероятность попадания значений СВ *X* в заданный интервал?

Учебники и методические указания

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.
2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике.
3. Пекельник Н.М. Практические занятия по курсу «Теория вероятностей».
4. Колышкин В.П. Элементы теории вероятностей. Ч. 1,2.
5. Никитина Л.А. Задачи по курсу теория вероятностей.