

Дискретная математика

Содержание

1	Натуральные числа. Метод математической индукции	2
2	Системы счисления	5
3	Булева алгебра	8
4	Логика и исчисление предикатов	14

Натуральные числа. Метод математической индукции.

Класс положительных чисел N называется классом *натуральных чисел* или чисел, используемых для счета:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\} \quad (1)$$

Множество натуральных чисел является *упорядоченным* множеством, т.е. для любых двух натуральных чисел m и n имеет место одно из трех соотношений: $\forall m, n \in N \{m < n, m = n, m > n\}$. (Обозначение " $\forall m, n \in N$ " читается как "для любых m, n из множества N ", а символ " $\forall$ " называется квантором всеобщности).

Свойства натуральных чисел могут быть выведены из следующих *аксиом Пеано*.

1. $1 \in N$, т.е. единица есть натуральное число.
2. $\forall n \in N \exists! m \in N: m = S(n) = n+1$, т.е. для каждого натурального числа n существует (символ " $\exists$ " - квантор существования) единственное (" $!$ " - квантор единственности) натуральное число m , следующее за ним. $S(n)$ - функция следования.
3. $\forall n \in N S(n) \neq 1$, т.е. единица не имеет предыдущего для нее натурального числа.
4. $\forall m, n \in N S(m) = S(n) \Rightarrow m = n$, т.е. из равенства следующих для m и n чисел следует равенство самих этих чисел.
5. *Принцип полной индукции.* Множество натуральных чисел N_0 , содержащее единицу и для каждого $n \in N_0$ содержащее $S(n) \in N_0$, содержит все натуральные числа, т.е. $N_0 \equiv N$.

Из аксиом Пеано очевидны следующие свойства:

1. Коммутативность сложения $a + b = b + a$; умножения $a \cdot b = b \cdot a$.
2. Ассоциативность сложения $a + (b + c) = (a + b) + c$; умножения $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
3. Существование единицы $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
4. Дистрибутивность $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Ряд математических утверждений доказывается *методом математической индукции* (ММИ), который основан на принципе полной индукции. Суть этого метода в следующем. Пусть $A(n)$ - некоторое утверждение (равенство, неравенство, условие), имеющее смысл для натуральных чисел n . Пусть оно истинно при $n=1$. Тогда, если из истинности этого утверждения для некоторого $n=k>1$ следует истинность утверждения при $n=k+1$, то утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n .

Доказательство методом математической индукции состоит в следующем.

- 1) проверяется, что утверждение $A(n)$ верно при $n=1$.
- 2) предполагается, что утверждение $A(n)$ верно при $n=k$.
- 3) доказывается, что утверждение $A(n)$ верно при $n=k+1$.

После этого на основании принципа полной индукции делается вывод о том, что утверждение $A(n)$ истинно для любого натурального числа n .

Пример 1. Доказать с помощью ММИ равенство $2+6+10+\dots+2 \cdot (2n-1) = 2n^2$ (*).

Решение.

1. проверим верность равенства при $n=1$:
левая часть $2 \cdot (2 \cdot 1 - 1) = 2 \cdot (2 - 1) = 2$, правая часть $2 \cdot 1^2 = 2 \Rightarrow 2 = 2 \Rightarrow$ тождество.
2. предположим, что равенство обращается в тождество при некотором $n=k$, т.е. верно, что
$$2+6+10+\dots+2 \cdot (2k-1) = 2k^2. \quad (**)$$
3. докажем, что при $n=k+1$ равенство тоже обращается в тождество, т.е. что верно
$$2+6+10+\dots+2 \cdot (2(k+1)-1) = 2(k+1)^2.$$

Рассмотрим левую часть:

$$2+6+10+\dots+2 \cdot (2(k+1)-1) = 2+6+10+\dots+2 \cdot (2k-1) + 2 \cdot (2(k+1)-1) = (\text{из } (**)) 2k^2 + 2 \cdot (2(k+1)-1) = 2k^2 + 2 \cdot (2k+1) = 2k^2 + 4k + 2 = 2(k^2 + 2k + 1) = 2(k+1)^2, \text{ что совпадает с правой частью.}$$

Таким образом, по принципу полной индукции равенство (*) является тождеством. $\square$

Пример 2. Доказать с помощью ММИ неравенство Бернулли $(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha \cdot n$, для любого действительного числа $\alpha > -1$.

Решение.

1. проверим верность неравенства при $n=1$: $(1+\alpha)^1 = (1+\alpha) \geq 1+\alpha \cdot 1 = 1+\alpha \Rightarrow$ неравенство верно.
2. предположим, что неравенство верно при некотором $n=k$, т.е. $(1+\alpha)^k \geq 1+\alpha \cdot k$.
3. докажем, что при $n=k+1$ неравенство тоже выполняется, т.е. верно $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1+\alpha \cdot (k+1)$.

Для этого умножим верное по пункту 2 неравенство на $(1+\alpha)$. Тогда получим, что

$$(1+\alpha)^k(1+\alpha)=(1+\alpha)^{k+1} \geq (1+\alpha \cdot k)(1+\alpha) = 1+\alpha \cdot k+\alpha+\alpha^2 \cdot k \geq 1+\alpha \cdot k+\alpha = 1+\alpha \cdot (k+1),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, по принципу полной индукции неравенство Бернулли выполняется для любого натурального n . Заметим, что при $\alpha \leq -1$ это неравенство не выполняется, поскольку выражение $(1+\alpha)$ оказывается неположительным. $\square$

Признаки делимости натуральных чисел. Алгоритм Евклида.

Определение. Натуральное число N , имеющее делителями только самого себя и единицу, называется *простым* натуральным числом.

Определение. Если для некоторых чисел $n, p \in \mathbb{N} \quad \exists q \in \mathbb{N}: n = p \cdot q$, то говорят, что n кратно p или что p – делитель n , и обозначается как $n : p$.

Определение. Если $n = p \cdot q + r$, где $n, p, q, r \in \mathbb{N}$, и верно, что $r < p$ и $n \geq p$, то r называется остатком от деления n на p , а q – частным от этого деления.

Определение. Число $n \in \mathbb{N}$ называется четным, если верно, что $n:2$, и нечетным в противном случае.

Признаки делимости натуральных чисел следующие:

- | | |
|---|--|
| :2 – последняя цифра числа четная или 0. | :5 – последняя цифра 0 или 5. |
| :3 – сумма всех цифр числа кратна 3. | :8 – три последние цифры кратны 8 или 000. |
| :4 – две последние цифры кратны 4 или 00. | :9 – сумма всех цифр числа кратна 9. |
| :11 – сумма цифр, расположенных на нечетных местах числа равна сумме цифр на четных местах, либо их разность кратна 11. | |
| :25 - две последние цифры 00 или кратны 25. | |

Определение. Общее кратное нескольких натуральных чисел – натуральное число, кратное для каждого из них. Минимальное из таких кратных называется *наименьшим общим кратным* или НОК.

Определение. Общий делитель нескольких натуральных чисел – натуральное число, являющееся делителем каждого из них. Максимальный из таких делителей называется *наибольшим общим делителем* или НОД.

Свойство НОД и НОК.

$$m \cdot n = \text{НОК}(m, n) \cdot \text{НОД}(m, n). \quad (2)$$

Алгоритм Евклида поиска НОД.

Пусть необходимо найти НОД(n, p), причем $n > p$. Составляется цепочка выражений вида:

$$n = p \cdot q_1 + r_1, 0 \leq r_1 < p \Rightarrow p_1 = r_1 \cdot q_2 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1}, \text{ t.e. } r_{n+1} = 0. \quad (3)$$

Тогда последний ненулевой остаток от деления $r_n \neq 0$ и есть НОД(n, p).

Пример 3. Найти НОД(294,36) и НОК(294,36).

Решение. Поскольку $294 > 36$, то $n = 294$, $p = 36$. Воспользуемся алгоритмом Евклида и построим цепочку делений вида (3):

$$\left. \begin{array}{l} 294 \\ 288 \\ 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} 36 \\ 8 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q_1 = 8 \\ r_1 = 6 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 36 \\ 36 \\ 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 6 \\ 6 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} q_2 = 6 \\ r_2 = 0 \end{array} \Rightarrow r_{n+1} = 0, n=2 \Rightarrow \text{НОД}(294, 36) = r_n = r_1 = 6.$$

Чтобы определить НОК(294,36), воспользуемся свойством (2):

$$\text{НОК}(294,36) = 294 \cdot 36 / \text{НОД}(294,36) = 294 \cdot 36 / 6 = 294 \cdot 6 = 1794. \square$$

Задачи для решения

1. Доказать тождества методом математической индукции
 - 1.1 $1^2+2^2+\dots+n^2=n(n+1)(2n+1)/6$
 - 1.2 $1^2+3^2+\dots+(2n-1)^2=n(2n-1)(2n+1)/3$
 - 1.3 $1^2-2^2+3^2-4^2+\dots+(-1)^{n+1}n^2=(-1)^{n+1}n(n+1)/2$
 - 1.4 $1 \cdot 1!+2 \cdot 2!+\dots+n \cdot n!=(n+1)!-1$
 - 1.5 $(1 \cdot 2)^{-1}+(2 \cdot 3)^{-1}+\dots+(n(n+1))^{-1}=n/(n+1)$
 - 1.6 $1-3+5-7+\dots+(-1)^{n+1}(2n-1)=(-1)^{n+1}n$
 - 1.7 $3^{-1}+3 \cdot 3^{(-2)}+5 \cdot 3^{(-3)}+\dots+(2n-1) \cdot 3^{(-n)}=1-(n+1) \cdot 3^{-n}$
 - 1.8 $5+5^2+5^3+\dots+5^n=(5^{n+1}-5)/4$
 - 1.9 $2+18+60+\dots+n(n+1)(2n-1)=n(n+1)(n+2)(3n-1)/6$
 - 1.10 $3 \cdot 1^{-2}2^{-2}+5 \cdot 2^{-2}3^{-2}+\dots+(2n+1) \cdot n^{-2}(n+1)^{-2}=(1+(n+1)^{-1})/(1+n^{-1})$
 - 1.11 $1+2+2^2+\dots+2^{n-1}=2^n-1$
 - 1.12 $15+42+\dots+(n+1)(n+2)(2n+3)/2=n(n+4)(n^2+4n+7)/4$
 - 1.13 $18+80+\dots+(n-1)(2n-1)(2n+2)=n(n-1)(3n^2+7n+1)/3$
 - 1.14 $1/2+3/4+5/8+\dots+(2n-1)/2^n=3-n/2^{n-1}-3/2^n$
 - 1.15 $1^3+2^3+\dots+n^3=n^2(n+1)^2/4$
 - 1.16 $3+20+168+\dots+(2n+1) \cdot 2^{n-1} \cdot n!=2^n(n+1)!-1$
 - 1.17 $(1 \cdot 3)^{-1}+7 \cdot (3 \cdot 5)^{-1}+\dots+(2n^2-1)/((2n-1)(2n+1))^{-1}=n^2/(2n+1)$
 - 1.18 $3/(1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5)+4/(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6)+\dots+(n+2)/(n(n+1)(n+3)(n+4))=n(n+5)/(8(n+1)(n+4))$
 - 1.19 $1 \cdot 2^2+2 \cdot 3^2+\dots+(n-1) \cdot n^2=n(n-1)^2(3n+2)/12$
 - 1.20 $8+4+\dots+(0.5)^n \cdot 16=16 \cdot (1-(0.5)^n)$
 - 1.21 $1-3/4+1/2-5/16+\dots+(-1)^{n+1}(n+1)/2^n=5/9+(-1)^{n+1}(3n+5)/(9 \cdot 2^n)$
 - 1.22 $2+24+\dots+(n-1)^2n!=(n-2)(n+1)!-2$
2. Доказать неравенства методом математической индукции
 - 2.1 $(n+1)^{-1}+(n+2)^{-1}+\dots+(2n)^{-1}>13/24, n \geq 2$
 - 2.2 $1+2^{-1/2}+\dots+n^{-1/2}>n^{1/2}, n \geq 2$
 - 2.3 $5+14+27+\dots+(n-1)(2n+1)<2/3n^2(n+1)$
 - 2.4 $1^3+2^3+\dots+n^3<n^4/4$
3. Найти НОД и НОК для двух указанных чисел n_1 и n_2 с помощью алгоритма Евклида

3.1 $n_1 = 21780, n_2 = 2750$	3.5 $n_1 = 78903, n_2 = 63657$
3.2 $n_1 = 82810, n_2 = 17836$	3.6 $n_1 = 6732, n_2 = 18018$
3.3 $n_1 = 680, n_2 = 2125$	3.7 $n_1 = 318, n_2 = 15002$
3.4 $n_1 = 13671, n_2 = 261$	3.8 $n_1 = 16236, n_2 = 4247$
4. Доказать делимости методом математической индукции при любом натуральном n
 - 4.1. $5 \cdot 2^{3n-2}+3^{3n-1}$ делится на 19
 - 4.2. $4^n+15n-1$ делится на 9
 - 4.3. $2^{2n-1}-9n^2+21n-14$ делится на 27
 - 4.4. $2^{(3^n)}+1$ делится на 3^{n+1}
 - 4.5. n^3+11n делится на 6
 - 4.6. $5 \cdot 3^n+2n$ делится на 4
 - 4.7. $3^{3n+2}+2^{4n+1}$ делится на 11
 - 4.8. $3^{2n+3}+40n-27$ делится на 64
 - 4.9. $(2n-1)^3-(2n-1)$ делится на 24
 - 4.10. n^3-12n^2+47n делится на 6

Системы счисления

Наряду с широко используемой десятичной позиционной системой счисления (ПСС), при работе на ЭВМ часто используют двоичные, восьмеричные, шестнадцатеричные, а также смешанные (с основаниями, не кратными 2) системы счисления. Друг от друга системы счисления отличаются не только *основаниями* (количеством цифр, используемых для записи чисел), но и результатами арифметических действий, в частности таблицами сложения и умножения. Рассмотрим решение задач, возникающих при использовании различных ПСС.

1. Перевод чисел из десятичной системы счисления в системы по основанию k .

В этом случае запись

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0, a_{-1} \dots a_{-m} \dots, \quad (1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_{-m}$ – цифры ПСС по основанию k , и хотя бы одна отлична от нуля, представляет собой сокращенную запись положительного числа a :

$$a = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + \dots + a_1 k^1 + a_0 k^0 + a_{-1} k^{-1} + \dots + a_{-m} k^{-m} + \dots \quad (2)$$

Различают две операции, связанные с переводом числа из десятичной в k -ичную ПСС.

а) перевод целой части числа.

Для этого целая часть десятичного числа *делится* на основание новой ПСС. Цифра, полученная в остатке, есть последняя цифра k -ичной записи данного числа. Полученное частное снова делится на k . Остаток будет предпоследней цифрой k -ичной записи числа, а частное опять делится на k и т.д. Процесс деления прекращается, когда в частном получается цифра, меньшая k , которая будет первой цифрой k -ичной записи данного числа.

Пример 1. Записать число 201 в восьмеричной системе счисления.

Решение. Выпишем последовательность делений на основание $k=8$ столбиком:

$$\begin{array}{r|l} 201 & 8 \\ -16 & 25 \\ \hline 41 & 24 \\ -40 & 1 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 8 \\ 3 \end{array}$$

Процесс деления частных закончен на числе 3, так как $3 < 8$. Десятичное число 201 таким образом записывается в восьмеричной ПСС как 311, то есть $201_{10} = 311_8$.

б) перевод дробной части числа.

Для решения этой задачи дробная часть десятичного числа *умножается* на основание новой ПСС. Целая часть полученного произведения является первой цифрой в k -ичной записи дробной части числа. Далее умножаем на k дробную часть этого произведения, целая часть результата будет второй цифрой дробной части и т.д. При этом может оказаться, что конечная десятичная дробь записывается в виде бесконечной периодической k -ичной дроби.

Пример 2. Записать десятичное число 0,1875 в четверичной системе счисления.

Решение. Процедура умножения изображается в виде двух столбцов чисел, где левый столбец – целая часть числа, которая при выполнении следующего умножения отбрасывается:

$$\begin{array}{r|l} 0 & 1875 \\ \times & 4 \\ \hline 0 & 7500 \\ \times & 4 \\ \hline 3 & 0000 \end{array}$$

Таким образом, $0,1875_{10} = 0,03_4$.

Пример 3. Записать десятичное число 0,3 в семеричной системе счисления.

0	3
×	7
2	1
×	7
0	7
×	7
4	9
×	7
6	3
×	7
2	1

Нетрудно заметить, что дальше будет повторяться комбинация цифр 2046, представляющая собой период семеричной дроби. Таким образом, $0,3_{10} = 0,(2046)_7$.

2. Перевод чисел, записанных в ПСС по основанию k, в десятичные числа.

Обычно эта операция осуществляется при помощи формулы (2).

Пример 4. Записать двоичное число 10110,11 в десятичной системе.

Решение. Используем формулу (2) при $k=2$. Тогда

$$10110,11_2 = (1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2})_{10} = (16 + 4 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4})_{10} = 22,75_{10}.$$

3. Арифметические операции в ПСС.

Часто возникает необходимость производить арифметические операции в ПСС – вычисление сумм, разностей, произведений и частных чисел, имеющих одно и то же основание. При большом количестве таких вычислений нет смысла каждый раз переводить операнды в десятичную систему, производить вычисления в ней и ответ переводить обратно в ПСС по исходному основанию. Для упрощения таких вычислений составляются таблицы сложения и умножения рассматриваемых ПСС, что позволяет производить арифметические операции без перехода в десятичную систему.

Пример 5. Вычислить сумму $3001212_4 + 2112133_4$ и произведение $1033_4 \times 321_4$.

Решение. Составим таблицы сложения и умножения для четверичной системы счисления.

Учитывая, что в ней используется только четыре цифры 0,1,2 и 3, получаем

Таблица сложения				
+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10
2	2	3	10	11
3	3	10	11	12

Таблица умножения				
×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10	12
3	0	3	12	21

Теперь будем вычислять значения требуемых выражений обычными столбиками, но с учетом того, что суммы и произведения цифр определяются вышеприведенными таблицами:

$$\begin{array}{r} 3001212_4 \\ + 2112133_4 \\ \hline 11120011_4 \end{array} \quad \text{Проверка:} \quad \begin{array}{l} 3001212_4 = 12390_{10} \\ 2112133_4 = 9631_{10} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 12390 \\ + 9631 \\ \hline 22021 \end{array} \Rightarrow 22021_{10} = 11120011_4.$$

Для проверки приводится результат этого же действия при переводе слагаемых в десятичные числа с последующим переводом в четверичную систему счисления результата сложения. Аналогично вычисляется и произведение:

$$\begin{array}{r} 1033_4 \\ \times 321_4 \\ \hline 1033 \\ 2132 \\ 3231 \\ \hline 1012113_4 \end{array} \quad \text{Проверка:} \quad \begin{array}{r} 1033_4 = 79_{10} \\ 321_4 = 57_{10} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 79 \\ \times 57 \\ \hline 553 \\ 395 \\ \hline 4503 \end{array} \Rightarrow 4503_{10} = 1012113_4.$$

Так же, как и в примере на сложение, проверка состоит в переводе множителей в десятичную систему счисления. Результат перемножения переводится обратно в ПСС по основанию 4.

4. Решение уравнений в системах счисления.

Уравнения в ПСС отличаются от обычных уравнений алгебры тем, что неизвестная переменная содержится в формулах, соответствующих основаниям чисел, входящих в уравнения. Тогда, приводя все числа к одному основанию (обычно к десятичным числам), можно получить обычное алгебраическое уравнение, разрешая которое приходят к решению исходного уравнения.

Пример 6. Решить уравнение $52_k = 43_{k+2}$.

Решение. Запишем правую и левую части уравнения по формуле (2) в виде 10-ичных чисел:

$$52_k = 5 \cdot k^1 + 2 \cdot k^0 = 5k + 2, \quad 43_{k+2} = 4 \cdot (k+2)^1 + 3 \cdot k^0 = 4k + 8 + 3 = 4k + 11.$$

Приравняем эти выражения и решим полученное уравнение:

$$5k + 2 = 4k + 11 \Rightarrow (5 - 4)k = 11 - 2 \Rightarrow k = 9.$$

Для полного решения нужно найти все входящие в это уравнение слагаемые:

$$52_k = 52_9 = 5 \cdot 9^1 + 2 \cdot 9^0 = 47, \quad 43_{k+2} = 43_{11} = 4 \cdot 11^1 + 3 \cdot 11^0 = 47.$$

Задачи для решения

- Какие значения в десятичной ПСС имеет число 12345_k , если $k=6,7,8,9$? число 54321_k ?
- Какие значения принимает число 110000110_2 в ПСС с основаниями $k=2,3,4,5,6,7,8,9,10$?
- Перевести в системы счисления по основаниям $k=3,4,7,8$ десятичные рациональные числа
1) 10,5; 2) $24 \frac{1}{3}$; 3) 72,625; 4) $33 \frac{2}{3}$; 5) 18,3125; 6) $55 \frac{2}{3}$; 7) 100,001; 8) 27,6875.
- Вычислить значения выражений
1) $55_6 - 1001001_2 + 24_{170} = (?)_8$; 4) $\frac{1101_5 - (1101_2 + 1101_3)}{1101_4 + 11_9} = (?)_{10}$;
2) $84_9 - 110110_2 + 16_{45} = (?)_3$;
3) $2113_3 - 225_6 + 97_{35} = (?)_2$; 5) $\frac{1011_5 - 1011_3}{1011_4 - 201_3} + 11_8 - 1001_2 = (?)_{10}$;
6) $\frac{1001_7 - 1101011_2 - 1001_5}{1001_4 - 1001_3} - \frac{1001_6 + 1001_8}{1001_9} = (?)_{10}$.
- Вычислить, не переходя к десятичной системе
1) $670631_8 + 344512_8$; 2) $332751_8 + 770637_8$; 3) $3131313_4 + 2123212_4$;
4) $10011111_2 + 10010011_2 + 11001101_2 + 11000110_2 + 10000111_2 + 10011000_2$;
5) $422_8 \times 517_8$; 6) $601_8 \times 276_8$; 7) $3210_4 \times 123_4$;
8) $1011011_2 \times 1011101_2$.
- Найти разность и произведение указанных пар чисел, не переходя к десятичной ПСС
1) 317_8 и 226_8 ; 4) 3313_4 и 2112_4 ;
2) 555_8 и 274_8 ; 5) 110111001_2 и 100110011_2 ;
3) 3102_4 и 2013_4 ; 6) 11101110_2 и 1010101_2 .
- Решить уравнения в системах счисления

- 1) $88_{4k} = 230_{3k-1} - 143_{3k-4};$
- 2) $68_{2k+1} = 213_{k-1} + 50_{3k-8};$
- 3) $104_{2k} = 157_{k+1} + 108_{2k-5};$
- 4) $120_{2k+1} = 222_{3k-5} - 120_{k-1};$
- 5) $540_{k/2+2} = 333_{k-1} + 201_{12-k};$
- 6) $230_{2k+3} = 444_{11-2k} + 101_{3k-1};$
- 7) $424_{1-2k} = 253_{k+10} - 321_{2-k};$
- 8) $331_{2k/3} = 185_{2k-3} - 342_{8-k/2};$
- 9) $244_{2-2k} = 242_{k+11} - 144_{2-3k};$
- 10) $201_{k+4} = 226_{5-3k} - 335_{2k+8}.$

Булева алгебра.

Переключательными (или *булевыми*) функциями называют функции, область значений которых есть подмножество двухэлементного множества $\{0,1\}$, а область определения – $\{0,1\}^n$, где n – число переменных.

Каждая комбинация значений переменных называется *набором*. Множество наборов переменных образует область определения функции. Наборы и соответствующие им значения функции составляют *таблицу истинности функции*.

Переключательные функции двух аргументов определяются следующим образом.

№	x: 0011 y: 0101	Обозначение функции	Название функции
0	0000	0, const 0	Константа 0
1	0001	$x \wedge y, xy$	Конъюнкция, функция “и”
2	0010	$x \leftarrow y, x\bar{y}$	Запрет “y”
3	0011	x	Повтор “x”
4	0100	$x \rightarrow y, \bar{x}y$	Запрет “x”
5	0101	y	Повтор “y”
6	0110	$x \oplus y$	Сумма по модулю 2, разделительное “или”
7	0111	$x \vee y$	Дизъюнкция, соединительное “или”
8	1000	$x \downarrow y$	Стрелка Пирса
9	1001	$x \sim y$	Эквивалентность
10	1010	$\bar{y}, \neg y$	Отрицание y, функция “не”
11	1011	$x \subset y, x \leftarrow y$	Обратная импликация
12	1100	$\bar{x}, \neg x$	Отрицание x, функция “не”
13	1101	$x \supset y, x \Rightarrow y$	Прямая импликация
14	1110	$x y$	Штрих Шеффера
15	1111	1, const 1	Константа 1

Отметим, что набор значений функции равен двоичному представлению номера этой функции в представленной таблице (т.е. например функция «повтор y» имеет номер 5, который в двоичном виде есть $5_{10}=101_2=0101_2$ и т.д.).

Две переключательные функции называются *равносильными*, если они на одних и тех же наборах имеют одни и те же значения. Количество различных переключательных функций n аргументов определяется как $S = 2^{2^n}$. В связи с этим наборы функции n переменных заполняются следующим образом. Самый последний элемент каждого из S наборов, составляющий столбец значений последней переменной, заполняется поочередно 0 и 1.

Предпоследний столбец – последовательностями из двух подряд 0 и двух подряд 1. Для каждого последующего столбца количество чередующихся 0 и 1 равно 2^{p-1} , где p – номер соответствующего столбца, начиная с последнего.

По старшинству все булевы функции подчинены следующему отношению включения (операции даны в порядке убывания приоритетов, т.е. $A \succ B$ означает, что A “сильнее” B):

$$\neg \succ |, \downarrow \succ \rightarrow, \leftarrow \succ \wedge \succ \vee \succ \oplus \succ \subset, \supset \succ \sim. \quad (1)$$

Задача 2.1. Построить таблицу истинности функции $f(x, y, z) = x \oplus \bar{x} \vee y \supset z \downarrow (\bar{x} \leftarrow y)$.

Решение. Сначала воспользуемся отношениями приоритета (1) и расставим порядок выполнения операций. Заметим, что наличие скобок влияет на порядок выполнения так же, как это имеет место и небулевой алгебре, то есть в первую очередь выполняются действия в скобках. Тогда таблица истинности имеет следующий вид.

			(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	y	z	$\bar{x}$	$(1) \vee y$	$x \oplus (2)$	$\neg(3)$	$(1) \leftarrow y$	$z \downarrow (5)$	$(4) \supset (6)$
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1	0	0	0

Последний столбец таблицы истинности и есть список значений функции на соответствующих наборах. $\square$

Основные теоремы булевой алгебры

- 1) $\bar{1} = 0, \bar{0} = 1, \bar{\bar{x}} = x, x \vee \bar{x} = 1, x \wedge \bar{x} = 0$
- 2) $f_i = \overline{f_{15-i}}$ для всех $i=0..15$ (например, $x \downarrow y = f_8 = \overline{f_7} = \overline{x \vee y}$)
- 3) Законы коммутативности: $xy = yx, x \vee y = y \vee x, x \oplus y = y \oplus x$
- 4) Законы ассоциативности: $(xy)z = x(yz), (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z), (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$
- 5) Законы дистрибутивности: $x(y \vee z) = xy \vee xz, x(y \oplus z) = xy \oplus xz$
- 6) Законы де Моргана: $\overline{x \vee y} = \bar{x} \bar{y}, \overline{x y} = \bar{x} \vee \bar{y}$
- 7) Законы Жегалкина: $x \oplus 1 = \bar{x}, x \oplus 0 = x, x \oplus x = 0, x \oplus \bar{x} = 1$
- 8) Законы обращения Жегалкина: $x \vee y = x \oplus y \oplus xy, xy = x \oplus x\bar{y}, x \oplus y = \overline{(\bar{x} \vee y)(x \vee \bar{y})}$
- 9) Законы поглощения: $xy \vee y = y, x\bar{y} \vee y = x \vee y$
- 10) $x | x = \bar{x}, x \downarrow x = \bar{x}, x \supset y = \bar{x} \vee y, x \subset y = x \vee \bar{y}$

Нормальные формы булевых функций

Обозначим $x^\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha = 1, \\ \bar{x}, & \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$ Очевидно, что $x^\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } x = \alpha, \\ 0, & \text{если } x \neq \alpha. \end{cases}$

Конституентой единицы (K^1) для данного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется конъюнкция всех переменных, образующих этот набор

$$K^1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \wedge x_2^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge x_n^{\alpha_n} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}.$$

На произвольном фиксированном наборе имеет место следующее выражение

$$K^1(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \beta_2^{\alpha_2} \dots \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n \\ 0, & \text{если } \beta_1 \neq \alpha_1, \dots, \text{или } \beta_n \neq \alpha_n \end{cases}$$

Конституентой нуля (K^0) для данного набора $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ называется дизъюнкция всех переменных, образующих этот набор

$$K^0(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{x_1^{\alpha_1}} \vee \overline{x_2^{\alpha_2}} \vee \dots \vee \overline{x_n^{\alpha_n}}.$$

На произвольном фиксированном наборе имеет место следующее выражение

$$K^0(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \beta_1^{\alpha_1} \vee \beta_2^{\alpha_2} \vee \dots \vee \beta_n^{\alpha_n} = \begin{cases} 0, & \text{если } \beta_1 = \alpha_1, \dots, \beta_n = \alpha_n \\ 1, & \text{если } \beta_1 \neq \alpha_1, \dots, \text{или } \beta_n \neq \alpha_n \end{cases}$$

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) для некоторой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция вида

$$f_{\text{СДНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 K_0^1 \vee f_1 K_1^1 \vee \dots \vee f_{2^n-1} K_{2^n-1}^1, \quad (2)$$

где $f_i, i = 0, 2^n - 1$ есть значения функции f на соответствующих наборах (0-ом, 1-ом, ..., 2^n-1 -ом), а K_i^1 - соответствующие этим же наборам конституенты единицы. Очевидно, что СДНФ образуют только те конституенты единицы, которые соответствуют единицам в записи функции.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) для некоторой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется функция вида

$$f_{\text{СКНФ}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_0 \vee K_0^0) \wedge (f_1 \vee K_1^0) \wedge \dots \wedge (f_{2^n-1} \vee K_{2^n-1}^0), \quad (3)$$

где $f_i, i = 0, 2^n - 1$ есть значения функции f на соответствующих наборах (0-ом, 1-ом, ..., 2^n-1 -ом), а K_i^0 - соответствующие этим же наборам конституенты нуля. СКНФ образуют только те конституенты нуля, которые соответствуют нулям в записи функции.

Всякая форма функции вида (2) (и (3)), возможно, не содержащая всех наборов переменных, называется ДНФ (соответственно, КНФ).

Задача 2.2. Построить СДНФ и СКНФ для функции $f(x, y, z) = \overline{x \oplus \overline{x} \vee y} \supset z \downarrow (\overline{x} \leftarrow y)$.

Решение. Воспользуемся таблицей истинности для заданной функции, построенной в задаче 2.1. Поскольку число единиц среди значений функции равно 7, то СДНФ будут образовывать 7 конституент единицы, а именно:

$$f_{\text{СДНФ}}(x, y, z) = \overline{x} \overline{y} \overline{z} \vee \overline{x} \overline{y} z \vee \overline{x} y \overline{z} \vee \overline{x} y z \vee x \overline{y} \overline{z} \vee x \overline{y} z \vee x y \overline{z}.$$

СКНФ для заданной функции будет содержать только одну компоненту, соответствующую единственному нулю среди значений функции:

$$f_{\text{СКНФ}}(x, y, z) = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}. \quad \square$$

Системы булевых функций. Классификация Поста

Пусть задана система функций $\mathfrak{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Будем говорить, что система булевых функций $\mathfrak{F}$ является *функционально полной системой* (ФПС) или *базисом*, если произвольную булеву функцию можно выразить через функции системы $\mathfrak{F}$. Наиболее часто используемыми базисами являются системы функций вида

$$\mathfrak{F}_1 = \{\neg, \wedge, \vee\} \text{ и } \mathfrak{F}_2 = \{\neg, \wedge, \oplus\}.$$

Задача 2.3. Выразить функцию $f(x, y, z) = \overline{x \oplus \overline{x} \vee y} \supset z \downarrow (\overline{x} \leftarrow y)$ в базисе $\mathfrak{F}_1 = \{\neg, \wedge, \vee\}$.

Решение. Базис $\mathfrak{F}_1$ часто используется в задачах булевой алгебры прежде всего потому, что функции отрицания, конъюнкции и дизъюнкции имеют сравнительно понятную смысловую интерпретацию (аналогичное можно сказать и для сложения по модулю 2, т.е. для базиса $\mathfrak{F}_2$). Процесс приведения произвольной функции к заданному базису состоит в поочередном преобразовании действий этой функции. При этом возникает целый ряд промежуточных вычислений, связанных с нахождением выражений в заданном базисе простейших функций, составляющих исходную, для чего используется следующее правило.

Правило подстановки: При подстановке формулы F вместо переменной x все вхождения переменной x в исходное соотношение должны быть одновременно заменены формулой F . В

нашем случае процесс приведения к базису можно записать следующим образом (отметим, что преобразование действий производится в порядке, обратном их приоритету):

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \overline{x \oplus \bar{x} \vee y} \supset z \downarrow (\bar{x} \leftarrow y) = \langle a \supset b = \bar{a} \vee b, \bar{a} = a, a = \overline{x \oplus \bar{x} \vee y}, b = z \downarrow (\bar{x} \leftarrow y) \rangle = \\ &= (x \oplus \bar{x} \vee y) \vee z \downarrow (\bar{x} \leftarrow y) = \langle a \downarrow b = \bar{a} \bar{b}, a = z, b = (\bar{x} \leftarrow y) \rangle = \\ &= (x \oplus \bar{x} \vee y) \vee (\bar{z} \overline{\bar{x} \leftarrow y}) = \langle a \leftarrow b = \bar{a} \bar{b}, a = \bar{x}, b = y \rangle = \\ &= (x \oplus \bar{x} \vee y) \vee (\bar{z} \bar{x} \bar{y}) = \langle \bar{a} \bar{b} = \bar{a} \vee \bar{b}, a = \bar{x}, b = \bar{y} \rangle = (x \oplus \bar{x} \vee y) \vee (\bar{z}(x \vee y)) = \\ &= \langle a \oplus b = \bar{a} \bar{b} \vee a b, a = x, b = \bar{x} \vee y \rangle = (x \overline{\bar{x} \vee y} \vee \bar{x}(\bar{x} \vee y)) \vee (\bar{z}(x \vee y)) = \\ &= (x(x \bar{y}) \vee \bar{x} \vee \bar{x} y) \vee (x \bar{z} \vee y \bar{z}) = x \bar{y} \vee \bar{x} \vee \bar{x} y \vee x \bar{z} \vee y \bar{z} = \bar{x} \vee x \bar{y} \vee x \bar{z} \vee y \bar{z} = \bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}. \end{aligned}$$

При приведении к базису в угловых скобках указаны теоремы, которые использованы при замене действий, а также значения переменных, используемых в этих теоремах для конкретных случаев.

Видим, что в результате преобразования получилась функция, построенная только на основе базисных функций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции. Таблица истинности преобразованной функции полностью совпадает с таблицей истинности исходной функции. В нашем случае это очевидно, поскольку преобразованная функция совпала с СКНФ. $\square$

Любая булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ может быть представлена в виде полинома Жегалкина следующего вида

$$\begin{aligned} f_{\oplus}(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \\ &= a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus \dots \oplus a_n x_n \oplus \dots \oplus a_{n+1} x_1 x_2 \oplus \dots \oplus a_{2n-1} x_1 x_n \oplus \dots \oplus a_{2n} x_2 x_3 \oplus \dots \oplus a_k x_1 x_2 \dots x_n. \end{aligned}$$

где $a_i \in \{0, 1\}$. Если все коэффициенты a_i при $i \geq n+1$ равны 0, то булева функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется линейной.

Построение полинома Жегалкина можно связать с СДНФ рассматриваемой функции. Из имеющейся ДНФ путем замены всех дизъюнкций на сложения по модулю 2 получается полином, после ряда преобразований по теоремам Жегалкина (см. раздел «Основные теоремы булевой алгебры») сводящийся к полиному Жегалкина.

Задача 2.4. Представить в виде полинома Жегалкина функцию $f(x, y) = x \vee y$.

Решение. Построим СДНФ для заданной функции

$$f_{\text{СДНФ}}(x, y) = \bar{x} y \vee x \bar{y} \vee x y.$$

Заменим в СДНФ дизъюнкции и преобразуем полученное выражение:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \bar{x} y \vee x \bar{y} \vee x y = \bar{x} y \oplus x \bar{y} \oplus x y = (x \oplus 1) y \oplus x (y \oplus 1) \oplus x y = \\ &= x y \oplus y \oplus x y \oplus x \oplus x y = x \oplus y \oplus x y. \end{aligned}$$

Полученный полином есть полином Жегалкина степени 2, поскольку наибольшее число переменных, связанных конъюнкцией, равно 2. Отсюда делаем вывод, что дизъюнкция – функция нелинейная. $\square$

Выделяют 5 классов булевых функций, введенных Постом.

I. P_0 – Класс функций, сохраняющих нуль.

Булева функция называется сохраняющей нуль, если $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

II. P_1 – Класс функций, сохраняющих единицу.

Булева функция называется сохраняющей единицу, если $f(1, 1, \dots, 1) = 1$.

III. L – Класс линейных функций.

Определяется по степени полинома Жегалкина (см. выше).

IV. S – Класс самодвойственных функций.

Булева функция называется самодвойственной, если для любого набора значений переменных выполняется равенство $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}$.

V. M – Класс монотонных функций.

Булева функция называется монотонной, если $f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ на всех сравнимых наборах, т.е. если при любом i верно $\alpha_i \leq \beta_i$.

Для определения того, является ли заданная система функций функционально полной системой, применяется следующая теорема.

Теорема Поста. Множество функций $\mathfrak{F}$ является ФПС, если оно содержит хотя бы одну не сохраняющую нуль, хотя бы одну не сохраняющую единицу, хотя бы одну нелинейную, хотя бы одну несамоудовлетворяющую и хотя бы одну немонотонную функцию.

Задача 2.5. Определить классы Поста для функции $f(x, y) = x \vee y$.

Решение. Из таблицы истинности дизъюнкции и задачи 2.4. делаем вывод, что дизъюнкция является функцией, сохраняющей нуль, сохраняющей единицу, нелинейной, несамоудовлетворяющей и монотонной. $\square$

Задачи для решения (типовой расчет)

1. Доказать теоремы 1-10.
2. Для заданной функции f_1 построить таблицу истинности. Выписать соответствующие ей совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы.
3. Привести заданную функцию f_2 к базису $\mathfrak{Z}$ (если номер варианта нечетный, то выбрать базис $\mathfrak{Z}_1$, а если четный – то $\mathfrak{Z}_2$). Построить таблицу истинности исходной и преобразованной функций.
4. Определить классы Поста для функций f_1 и f_2 . Дополнить ФПС $\mathfrak{Z} = \{f_1, f_2\}$ до базиса.

Функции для заданий 2-4

- | | |
|---|---|
| 1. $f(x, y, z) = x \subset x z \vee \bar{y} x \downarrow y \oplus z \sim x \rightarrow y \vee z$ | 21. $f(x, y, z) = x \vee \bar{y} \rightarrow x \oplus z \downarrow y \sim y z x \subset z$ |
| 2. $f(x, y, z) = x \rightarrow y \supset y x \sim z \vee y y x \downarrow \bar{z} \subset x$ | 22. $f(x, y, z) = x \supset z \vee \bar{y} \oplus x z \sim y x \leftarrow z \downarrow y x$ |
| 3. $f(x, y, z) = x z \vee x \downarrow y \oplus z \supset y \leftarrow y \vee \bar{x} y \sim z$ | 23. $f(x, y, z) = x \downarrow y \rightarrow z \oplus x \supset \bar{y} \vee z y \sim y x$ |
| 4. $f(x, y, z) = y \subset z \downarrow x \vee x \oplus z y \rightarrow y \bar{y} \sim z$ | 24. $f(x, y, z) = z x \downarrow x \vee y \oplus x \sim y \supset z \bar{x} \leftarrow y$ |
| 5. $f(x, y, z) = z \rightarrow y \vee x \sim x \bar{z} \subset y z \oplus y \downarrow x$ | 25. $f(x, y, z) = y \downarrow x \subset z \vee \bar{x} \sim y \rightarrow x y \oplus z x$ |
| 6. $f(x, y, z) = x \downarrow y \sim z \vee x \supset z x y \leftarrow \bar{z} \oplus x \vee z$ | 26. $f(x, y, z) = z \leftarrow y \oplus x y \sim z \downarrow x \vee y \supset \bar{z} x$ |
| 7. $f(x, y, z) = z \oplus y \vee x \downarrow z x \supset x \leftarrow z y \sim \bar{y}$ | 27. $f(x, y, z) = x \leftarrow \bar{y} \supset z \downarrow x \vee x \sim y z \oplus x y$ |
| 8. $f(x, y, z) = y \downarrow z \sim x \supset x \vee z y \leftarrow y \bar{z} \oplus z$ | 28. $f(x, y, z) = x \supset y \oplus z \sim z \downarrow x \vee y x \bar{z} \leftarrow y$ |
| 9. $f(x, y, z) = z \downarrow x \oplus z \sim \bar{y} \vee x z \rightarrow y z \subset x$ | 29. $f(x, y, z) = x \leftarrow x y z \oplus y \sim y \downarrow x \vee z \supset \bar{y} z$ |
| 10. $f(x, y, z) = x y \oplus z \vee x \sim x y \subset \bar{z} \downarrow y \rightarrow y \vee z$ | 30. $f(x, y, z) = x \sim \bar{z} \oplus x z \subset x \downarrow y \vee z y \rightarrow z \oplus y$ |
| 11. $f(x, y, z) = z \subset x \downarrow y \oplus z x \rightarrow y \vee y \sim z \bar{y}$ | 31. $f(x, y, z) = z \downarrow x \bar{x} \oplus y \rightarrow y \sim x z \vee y \subset z$ |
| 12. $f(x, y, z) = \bar{x} z \oplus x \sim y x \supset z \vee y \leftarrow z \downarrow x$ | 32. $f(x, y, z) = x \oplus y z \sim x y \subset z \vee x \rightarrow z \bar{x}$ |
| 13. $f(x, y, z) = x \oplus y \vee z \leftarrow \bar{x} \sim x y \downarrow z \supset x z$ | 33. $f(x, y, z) = x \oplus z \sim \bar{y} y \subset z \downarrow y \vee z x \rightarrow x$ |
| 14. $f(x, y, z) = x z \oplus y \downarrow x z \sim \bar{z} \rightarrow y \subset z \vee x$ | 34. $f(x, y, z) = z \sim \bar{x} \downarrow z y \oplus x z y \rightarrow y \subset x$ |
| 15. $f(x, y, z) = y \downarrow z \supset x \sim \bar{x} \vee y z \leftarrow y \downarrow x y$ | 35. $f(x, y, z) = x \subset y \downarrow z \vee y \oplus y \bar{x} \sim y z \rightarrow y$ |
| 16. $f(x, y, z) = z x \supset \bar{y} \vee x (x \oplus y \leftarrow z) \sim x \downarrow y$ | 36. $f(x, y, z) = x y \vee z \subset x \downarrow x \rightarrow z \sim y \vee x \oplus \bar{z} y$ |
| 17. $f(x, y, z) = x \vee y \oplus z \downarrow x z \sim y \vee x z \supset \bar{y} \leftarrow y$ | 37. $f(x, y, z) = z \downarrow \bar{x} x \leftarrow z \sim y z \vee y \supset x \oplus z$ |
| 18. $f(x, y, z) = x z \downarrow x \oplus x y \sim x \subset \bar{z} \vee z \rightarrow y$ | 38. $f(x, y, z) = y \rightarrow x z \subset \bar{x} \oplus x \downarrow y \sim z \vee x y$ |
| 19. $f(x, y, z) = x \downarrow z \supset y \oplus \bar{x} \sim x \vee y z \leftarrow y x \vee z$ | 39. $f(x, y, z) = x \oplus x \rightarrow z y \downarrow x \vee y \sim \bar{z} \subset z y$ |
| 20. $f(x, y, z) = y x \rightarrow x y \oplus \bar{y} \sim z \downarrow x \subset z \vee x$ | 40. $f(x, y, z) = x \downarrow z \vee x \oplus y \rightarrow \bar{y} z \sim z \subset x y$ |

Логика и исчисление предикатов

Предикатом называется функция $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, переменные которой принимают значения из некоторого множества M , а сама она принимает два значения T (true – истина), или F (false – ложь). Таким образом, предикат есть отображение $P(x_1, x_2, \dots, x_n) : M^n \rightarrow \{F, T\}$. Иногда, как и в булевой алгебре, значения $\{F, T\}$ заменяются на $\{0, 1\}$. Предикат от n переменных называется n -местным предикатом. В частности, высказывания являются нуль-местными предикатами. На практике чаще всего имеют дело с предикатами первого порядка.

Пример 1. Рассмотрим примеры предикатов разной местности.

$n=0 \Rightarrow P \in \{0, 1\} \Rightarrow$ нульместный предикат, например, «идет снег».

$n=1 \Rightarrow P(x) \in \{0, 1\} \Rightarrow$ одноместный предикат или *предикат свойства*, например, «трава зеленая»: $P = \text{“быть зеленым”}$, $x = \text{“трава”}$.

$n=2 \Rightarrow P(x, y) \in \{0, 1\} \Rightarrow$ двуместный предикат или *предикат отношения*, например, « x брат y », « x больше y » и т.д. $\square$

Смысл понятия «предикат» можно сопоставить с высказыванием относительно свойств объектов или их отношений.

Над предикатами можно производить обычные логические операции, в результате которых появляются новые предикаты. Кроме операций логики для построения новых предикатов используются операции *связывания кванторами*.

Квантор всеобщности. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат, принимающий значение T или F для каждого элемента множества M . Тогда под записью $\forall x P(x)$ будем подразумевать высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого элемента $x \in M$, и ложное – в противном случае. Читается эта запись так: “для всех x (выполняется, верно) $P(x)$ ”. Это новое высказывание уже от x не зависит. Символ $\forall$ называется квантором всеобщности.

$$\forall x P(x) \stackrel{\text{df}}{=} P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \quad (1)$$

Квантор существования. Пусть $P(x)$ – некоторый предикат. Под выражением $\exists x P(x)$ будем понимать высказывание, истинное, когда существует элемент (хотя бы один) множества M , для которого $P(x)$ истинно, и ложное – в противном случае. Читается эта запись так: “существует x такое, что (выполняется, верно) $P(x)$ ”. Это новое высказывание от x не зависит. Символ $\exists$ называется квантором существования.

$$\exists x P(x) \stackrel{\text{df}}{=} P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \quad (2)$$

Пример 2. Пусть $P(x) = \{x: \text{“}x \text{ делится на } 2\text{”}\}$, $Q(x) = \{x: \text{“}x \text{ делится на } 3\text{”}\}$. Рассмотрим два новых предиката $R_1(x) = P(x) \wedge Q(x)$ и $R_2(x) = P(x) \vee Q(x)$, из определения которых следует, что $R_1(x) = T \Leftrightarrow \text{“}x \text{ делится одновременно на } 2 \text{ и на } 3\text{”}$, а $R_2(x) = T \Leftrightarrow \text{“}x \text{ делится на } 2 \text{ или на } 3\text{”}$. Тогда высказывание $\exists x R_1(x)$ – истинное, а $\forall x R_1(x)$ – ложное, поскольку в первом случае очевидно, что существуют такие числа, которое одновременно делятся на 2 и на 3 (например, 6), а во втором – не все возможные числа одновременно делятся на 2 и на 3 (например, 4). Аналогично, высказывание $\exists x R_2(x)$ будет ложным, а $\forall x R_2(x)$ – истинным. $\square$

Свойства кванторов.

1. *Коммутативность.* Одноименные кванторы можно менять местами:

$$\forall x \forall y P(x, y) = \forall y \forall x P(x, y), \quad \exists x \exists y P(x, y) = \exists y \exists x P(x, y). \quad (3)$$

2. *Дистрибутивность.* Вынесение общего квантора при конъюнкции и дизъюнкции:

$$\begin{aligned} \forall x (P(x) \wedge Q(x)) &= \forall x (P(x) \wedge Q(x)), \quad \text{но: } \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \neq \exists x (P(x) \wedge Q(x)) \\ \exists x (P(x) \vee Q(x)) &= \exists x (P(x) \vee Q(x)), \quad \text{но: } \forall x P(x) \vee \forall x Q(x) \neq \forall x (P(x) \vee Q(x)) \end{aligned} \quad (4)$$

3. *Законы де Моргана.* Перенесение знака отрицания за знак квантора:

$$\neg \forall x P(x) = \exists x \neg P(x), \quad \neg \exists x P(x) = \forall x \neg P(x). \quad (5)$$

При использовании исчисления предикатов (ИП), существует необходимость адекватного перевода предложений естественного языка на язык логики предикатов. Для этого пользуются следующими соответствиями формул ИП.

$\forall x P(x)$	Для любого x (имеет место) $P(x)$ При произвольном x Для всех x (верно) $P(x)$ $P(x)$, каково бы ни было x Всегда имеет место $P(x)$ Каждый обладает свойством P Свойство P присуще всем Всё удовлетворяет P Любой объект является P	$\exists x P(x)$	Для некоторых x (имеет место) $P(x)$ Для подходящего x (верно) $P(x)$ Существует x , такой, что $P(x)$ Имеется x , для которого $P(x)$ Найдется x , для которого $P(x)$ Хотя бы для одного x (верно) $P(x)$ У некоторых вещей есть признак P Кто-нибудь есть (относится к) P По крайней мере, один объект есть P
$\neg \forall x P(x)$	Не для каждого x (верно) $P(x)$ Не при всяких x (верно) $P(x)$ $P(x)$ истинно не для всех x Не всё обладает свойством P P не всегда верно Не все суть P	$\neg \exists x P(x)$	Не существует x такого, что $P(x)$ Нет (никакого) x такого, что $P(x)$ $P(x)$ не выполняется ни для какого x Ничто не обладает свойством P Никто не есть P Неверно, что для некоторых x $P(x)$
$\forall x \neg P(x)$	Для всякого x неверно $P(x)$ $P(x)$ всегда ложно Ничто не обладает свойством P Все суть не P	$\exists x \neg P(x)$	Для некоторого x не (верно) $P(x)$ $P(x)$ иногда ложно Что-то не обладает свойством P Кто-то суть не P

Пример 3. Построить и записать следующие утверждения и их отрицания в логической символике, определить их истинность.

- 1) «Все люди смертны»;
- 2) «Некоторые треугольники не прямоугольные».

Решение.

- 1) Введем в рассмотрение предикатные символы $P(x) = T \Leftrightarrow x$ – человек, $Q(x) = T \Leftrightarrow x$ – смертен. Тогда первое утверждение может быть записано как $A = \forall x (P(x) \supset Q(x))$, т.е. «для любого x верно, что если x -человек, то он смертен». Построим отрицание этого утверждения и преобразуем его согласно формулам (4)-(5) и законам логики:

$$\neg A = \overline{A} = \neg(\forall x (P(x) \supset Q(x))) = \exists x \neg(P(x) \supset Q(x)) = \exists x \neg(\overline{P(x)} \vee Q(x)) = \exists x (P(x) \wedge \overline{Q(x)}).$$

Последнее утверждение читается как «есть такие x , которые одновременно являются людьми и не являются смертными», или иначе «существуют бессмертные люди». Очевидно, что истинным является первое высказывание A .

- 2) Во втором случае рассмотрим предикаты $P(x) = T \Leftrightarrow x$ – треугольник, $Q(x) = T \Leftrightarrow x$ – прямоугольный. Тогда соответствующее утверждение может быть записано в следующем виде: $B = \exists x (P(x) \wedge \overline{Q(x)})$, т.е. «существуют такие треугольники x , которые не являются прямоугольными». Построим отрицание этого утверждения и преобразуем его:

$$\neg B = \overline{B} = \neg(\exists x (P(x) \wedge \overline{Q(x)})) = \forall x \neg(P(x) \wedge \overline{Q(x)}) = \forall x (\overline{P(x)} \vee Q(x)),$$

что читается как «произвольный объект x не является треугольником или является прямоугольным». Очевидно, что высказывание B является истинным. $\square$

Исчисление одноместных предикатов как исчисление классов. Силлогистика Аристотеля.

Совокупность предметов, на которой одноместный предикат принимает значение T , называется *классом*. Такой подход позволяет установить соответствие между теорией множеств и исчислением одноместных предикатов.

Категорическим суждением в логике Аристотеля называется высказывание о двух классах. Всего выделяется четыре вида категорических суждений.

Тип А. Высказывание вида “Все предметы класса Р суть предметы класса Q” называется *общеутвердительным*.

Тип Е. Высказывание вида “Все предметы класса Р не суть предметы класса Q” называется *общеотрицательным*.

Тип I. Высказывание вида “Некоторые предметы класса Р суть предметы класса Q” называется *частноутвердительным*.

Тип О. Высказывание вида “Некоторые предметы класса Р не суть предметы класса Q” называется *частноотрицательным*.

Категорическим силлогизмом называется конструкция из трех категорических суждений о трех классах, в которой третье суждение логически следует из двух первых. При этом первое суждение называется большой посылкой, второе – малой посылкой, а третье – заключением.

Класс, присутствующий в большой и малой посылках, называется средним и обозначается буквой Р. Класс, присутствующий в большой посылке и заключении, называется большим и обозначается буквой Q. Наконец класс, присутствующий в малой посылке и заключении, называется малым и обозначается буквой S.

Силлогизм называется *правильным*, если истинность посылок всегда вызывает истинность заключения, независимо от содержания высказываний. Аристотель классифицировал все виды силлогизмов по типам (*модусам*) и выделил из всех модусов правильные. Все модусы Аристотель подразделил на четыре группы по расположению классов. Поскольку категорические суждения бывают четырех типов, каждая группа силлогизмов содержит 64 различных модуса. Для запоминания того, какие из них правильные, используют мнемонические имена. Следующая таблица содержит определения типов (шаблонов) модусов по расположению посылок и мнемонические имена правильных модусов.

Тип 1	Тип 2	Тип 3	Тип 4
$\begin{array}{c} P Q \\ S P \end{array}$	$\begin{array}{c} Q P \\ S P \end{array}$	$\begin{array}{c} P Q \\ P S \end{array}$	$\begin{array}{c} Q P \\ P S \end{array}$
s Q	s Q	s Q	s Q
Barbara, Celarent, Darii, Ferio	Cesare, Camestres, Festino, Baroco	Datisi, Ferison, Disamis, Bocardo	Fresison, Dimatis, Calemes

Пользуются этими именами следующим образом. Гласные буквы подставляются в заданном соответствующим именем порядке в шаблон группы модусов. Эти буквы означают тип категорического суждения.

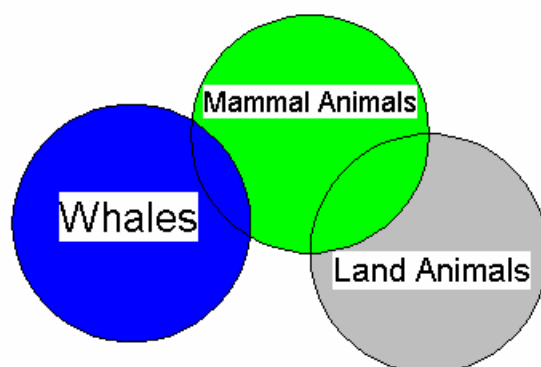
Пример 4. Построить силлогизм по модусу Festino.

Решение. Возьмем шаблон второй группы, к которой принадлежит модус Festino, и проставим типы категорических суждений в порядке следования гласных букв в имени модуса.

$Q_e P$ “Все киты – не сухопутные” – высказывание общеотрицательное

$S_i P$ “Некоторые млекопитающие - сухопутные” – высказывание частноутвердительное

S_0Q “Некоторые млекопитающие – не киты” – высказывание частноотрицательное



На рисунке представлена графическая интерпретация модуса Festino. Whales (W, киты), Mammal Animals (M, млекопитающие) и Land Animals (L, сухопутные) – множества, соответствующие классам Q, S и P соответственно. Множества W и L не пересекаются, поскольку первое суждение, связывающее соответствующие им классы Q и P, общеотрицательное. Пересечение множеств M и L соответствует интерпретации второго суждения. Часть множества M, без элементов множества W, соответствует интерпретации заключения. Полная запись модуса Festino в языке логики предикатов следующая:

$$\{\forall x (S(x) \supset \bar{P}(x))\} \wedge \{\exists x (Q(x) \supset P(x))\} \supset \{\exists x (Q(x) \wedge \bar{S}(x))\}.$$

□

Задания для решения

1. Построить и записать следующие утверждения и их отрицания в логической символике, определить их истинность:

1.1 Некоторые люди – студенты;	1.6 Не существует зеленых зайцев;
1.2 Большинство студентов получает стипендию;	1.7 Все простые числа нечетны;
1.3 Все люди не бессмертны;	1.8 Некоторые целые числа четны и делятся на 5;
1.4 Все мужчины выше 5 футов (1 фут = 0.3048 м);	1.9 Ничто сложное не просто;
1.5 Все люди завтракают в 8 часов утра;	1.10 Есть такие яблоки, которые ел Вася.
2. Перевести цепочку рассуждений в логическую символику и определить общезначимость полученной формулы или доказать обратное. Привести графическую интерпретацию.
 - 2.1. Ни одно животное не бессмертно. Кошки – животные. Значит, некоторые кошки не бессмертны.
 - 2.2. Перья есть только у птиц. Ни одно млекопитающее не является птицей. Значит, все млекопитающие лишены перьев.
 - 2.3. Вася может сдать экзамен. Петя - не Вася. Значит, Петя может не сдать экзамен.
 - 2.4. Всякий, кто может решить эту задачу, сдаст экзамен. Вася не может ее решить. Значит, Вася не сдаст экзамен.
 - 2.5. Этому никто не поверит. Значит, судья этому не поверит.
 - 2.6. Вася умеет плавать. Значит, все что-то умеют.
 - 2.7. Мухи умеют летать. Пауки едят мух. Значит, пауки умеют летать.
 - 2.8. Некоторые, живущие в нашем городе - друзья Васи. Петя – не друг Васи. Значит, Петя не живет в нашем городе.
 - 2.9. Петя - друг Васи. Все друзья Васи - студенты. Значит, Петя - студент.

- 2.10. Все люди - братья. У некоторых братьев есть сестры. Все сестры - люди.
3. Пусть $A = \langle L, f \rangle$, где L – множество людей, f – соответствие, определяющее предикаты
 $E(x, y) = T \Leftrightarrow x$ и y – один и тот же человек; $P(x, y) = T \Leftrightarrow x$ родитель y ;
 $C(x, y) = T \Leftrightarrow x$ и y – супруги; $M(x) = T \Leftrightarrow x$ – мужчина; $W(x) = T \Leftrightarrow x$ – женщина.
 Записать в модели A формулы, выражающие следующие утверждения:
- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1) У каждого есть отец и мать. | 10) X – зять |
| 2) У каждого есть бабушка. | 11) X – сноха |
| 3) У каждого есть дедушка. | 12) X – правнук |
| 4) X – прабабушка | 13) X – правнучка |
| 5) X – прадедушка | 14) X – невестка (жена сына) |
| 6) X – тесть | 15) X – дядя |
| 7) X – теща | 16) X – тетя |
| 8) X – свекровь | 17) X – племянник |
| 9) X – свекор | 18) X – племянница |
4. Привести примеры силлогизмов каждого типа. Определить правильность или неправильность полученных модусов.
5. Доказать свойства кванторов (формулы (3)-(5)).