Типовой расчет по теме «Дифференциальные уравнения» разработан преподавателями кафедры «Высшая математика»

Руководство к решению типового расчета выполнила преподаватель Тимофеева Е.Г.

Основные определения и теоремы

I. Дифференциальные уравнения первого порядка

Определение: Уравнение вида

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y' – ее производная, *называется дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если уравнение (1) можно разрешить относительно y', то оно принимает вид

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

и *называется уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Определение: *Решением дифференциального уравнения первого порядка* называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Условия

$$y = y_0 \text{ или } x = x_0, \tag{3}$$

в силу которых функция $y = \varphi(x)$ принимает заданное значение y_0 в заданной точке x_0 *называют начальными условиями решения*, а задача отыскания решения по заданным начальным условиям – *задачей Коши*.

Определение: *Общим решением уравнения* (2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной постоянной C, если она является решением уравнения (2) при любом значении постоянной C и если при любых начальных условиях (3) существует единственное значение постоянной $C = C_0$ такое, что функция $y = \varphi(x, C_0)$ удовлетворяет данным начальным условиям $\varphi(x_0, C) = y_0$.

Определение: *Частным решением уравнения* (2) называется функция $y = \varphi(x, C_0)$, которая получается из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении постоянной $C = C_0$.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Определение: Уравнение вида

$$y' = f(x) \cdot g(y),$$

где f(x) и g(x) – непрерывные функции, *называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными*.

2. *Однородные дифференциальные уравнения*

Определение: Уравнение вида

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где $\varphi(y/x)$ – непрерывная функция, *называется однородным дифференциальным уравнением*.

3. *Линейные уравнения*

Определение: Уравнение вида

$$y' = F(x) \cdot y + P(x),$$

где *F(x)* и *P(x)* – непрерывные функции, *называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

4. *Уравнение Бернулли*

Определение: Уравнение вида

$$y' = F(x) \cdot y + P(x) \cdot y^n,$$

где *F(x)* и *P(x)* – непрерывные функции, *называется уравнением Бернулли.*

Алгоритмы решений дифференциальных уравнений первого порядка

1. Уравнения с разделяющимися переменными:

$\boxed{y' = f(x)\cdot g(y)}$, *где* $\boxed{y' = \dfrac{dy}{dx}}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

2. Однородные дифференциальные уравнения:

$\boxed{y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)}$

Необходимая замена: $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = ux,\ y' = u'x + u.$

$u'x + u = \varphi(u),\ u' = \dfrac{du}{dx}$, таким образом, получаем уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx}x + u = \varphi(u) \Rightarrow \frac{du}{dx}x = \varphi(u) - u \Rightarrow \frac{du}{\varphi(u)-u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{du}{\varphi(u)-u} = \int \frac{dx}{x}$$

3. Линейные уравнения:

1 способ (Метод Бернулли или метод замены переменной):

$\boxed{y' = F(x)\cdot y + P(x)}$ – линейное уравнение относительно y.

Метод замены:

$y = u(x)v(x) \Rightarrow y' = u'v + v'u$

1. $u'v + v'u - F(x)uv - P(x) = 0$;

2. $\begin{cases} v'u - F(x)uv = 0 \\ u'v - P(x) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v' = F(x)v \\ u'v = P(x) \end{cases}$ $v' = \dfrac{dv}{dx},\ u' = \dfrac{du}{dx}$

3. $\displaystyle\int \frac{dv}{v} = \int F(x)dx \Rightarrow$ находим v (при интегрировании произвольную постоянную C принять равной нулю);

4. $\displaystyle\int du = \int \frac{P(x)}{v}dx \Rightarrow$ находим u;

5. Записываем ответ в виде: $y = uv$.

$\boxed{x' = F(y)\cdot x + P(y)}$ – линейное уравнение относительно x ($x' = \dfrac{dx}{dy}$)

Решается аналогично: $x = u(y)v(y),\ u' = \dfrac{du}{dy},\ v' = \dfrac{dv}{dy}$

2 способ (Метод Лагранжа или метод вариации произвольной постоянной):

1. Решаем уравнение $y' - F(x)y = 0$ (1);
2. Находим общее решение уравнения (1);
3. Принимаем произвольную постоянную C, как $C=C(x)$;

4. Записываем в уравнение $y'=F(x)y+P(x)$ общее решение (1) с учетом $C=C(x)$;
5. Решаем полученное уравнение методом разделения переменных.

4. Уравнения Бернулли:

$$\boxed{y' = F(x)\cdot y + P(x)\cdot y^n}$$

1 способ:

Для решения данного типу уравнений необходимо:

1. Обе части уравнения разделить на $y^n \Rightarrow \dfrac{y'}{y^n} = \dfrac{F(x)}{y^{n-1}} + P(x)$ (4);
2. Сделать замену: $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$;
3. Найти z': $z' = -(n-1)\cdot \dfrac{y'}{y^n}$;
4. Подставить z и z' в уравнение (4): $\dfrac{z'}{1-n} = F(x)\cdot z + P(x)$ (5);
5. Полученное уравнение (5) решить как линейное.

2 способ:

Данное уравнение можно решить также методом Бернулли или методом Лагранжа не приводя к линейному уравнению.

II. Дифференциальные уравнения второго порядка

Определение: Уравнение вида

$$F(x, y', y'')=0,$$

где x – независимая переменная, y – искомая функция, y', y'' – ее производные, *называется дифференциальным уравнением второго порядка.*

Обычно изучают уравнения, которые могут быть записаны в виде, разрешенном относительно второй производной:

$$y''=f(x, y, y'). \tag{6}$$

Определение: *Решением уравнения* (6) называется функция $y = \varphi(x)$, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Условия

$$y = y_0,\; y' = y'_0 \text{ при } x = x_0, \tag{7}$$

называют начальными условиями, а задача отыскания решения по заданным начальным условиям – *задачей Коши*.

Определение: Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ *называется общим решением* уравнения (6), если она является решением уравнения (6) при любых значениях C_1 и C_2 и если при любых начальных условиях (7) существуют единственные значения постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ такие, что функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$ удовлетворяет данным начальным условиям.

Определение: Любая функция $y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0)$, получающаяся из общего решения $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ уравнения (6) при определенных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0$ называется *частным решением*.

1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

Определение: Уравнения вида

$$y^{(n)}=f(x),\ F(x, y', y'')=0,\ F(y, y', y'')=0$$

называют дифференциальными *уравнениями* высших порядков, *допускающими понижение порядка.*

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнение вида

$$y''+py'+qy=0,$$

где y – искомая функция, а p и q – вещественные числа, называется *линейным однородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение: Уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x),$$

где y – искомая функция, p и q – вещественные числа, $f(x)$ – непрерывная функция, называется *линейным неоднородным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами*.

Алгоритмы решений дифференциальных уравнений второго порядка

1. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка:

1. $\boxed{y^{(n)}=f(x)}$ – решается n-кратным интегрированием правой части, в связи с этим появится n произвольных постоянных $C_1, C_2, C_3,\ldots, C_n$.

2. $\boxed{F(x, y', y'')=0}$ – решается заменой: $y'=p,\ y''=\dfrac{dp}{dx}$.

3. $\boxed{F(y, y', y'')=0}$ – решается заменой: $y'=p,\ y''=p\dfrac{dp}{dy}$.

2. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\boxed{y''+py'+qy=0}$$

Решается заменой: $y''=k^2,\ y'=k,\ y=1 \Rightarrow\ k^2+pk+q=0$ – характеристическое уравнение.

Возможны три варианта:

1. Корни – действительные числа, т.е. $k_1=a,\ k_2=b,$ тогда общее уравнение будет иметь вид:

$$y = C_1e^{ax} + C_2e^{bx}\ .$$

2. Корни – кратные действительные числа, т.е. $k_1=a,\ k_2=a,$ тогда общее уравнение будет иметь вид:

$$y = e^{ax}\left(C_1 + C_2x\right).$$

3. Корни – мнимые числа, т.е. $k_{1,\,2}=a\ \pm ib,$ тогда общее уравнение будет иметь вид:

$$y = e^{ax}\left(C_1\cos bx + C_2\sin bx\right).$$

3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\boxed{y''+py'+qy=f(x)}$$

Решение ищется в виде: $y = \tilde{y} + y^*$, где

$\tilde{y}$ – общее решение уравнения $y''+py'+qy=0,$

y^* – частное решение уравнения $y''+py'+qy=f(x),$ которое принимает вид в зависимости от правой части $f(x)$.

1. Правая часть имеет вид: $\boxed{f(x)=P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, тогда

$$y^* = Q_n(x)x^r\ ,$$

где r – число корней характеристического уравнения, равных нулю, $Q_n(x)$ – многочлен n-ой степени.

2. Правая часть имеет вид: $\boxed{f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)}$, где $P_n(x)$ – многочлен n-ой степени, тогда

$$y^* = Q_n(x)e^{\alpha x}x^r ,$$

где r – число корней характеристического уравнения, равных α, $Q_n\ (x)$ – многочлен n-ой степени.

3. Правая часть имеет вид: $\boxed{f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x}$, тогда

$$y^* = \left(A\cos\beta x + B\sin\beta x\right)x^r ,$$

где r – число корней характеристического уравнения, равных $i\beta$.

4. Правая часть имеет вид: $\boxed{f(x)=e^{\alpha x}[P_n\,(x)\cos\beta x+ P_m\,(x)\ \sin\beta x]}$, тогда

$$y^* = e^{\alpha x}x^r\left[Q_{S_1}(x)\cos\beta x + Q_{S_2}(x)\sin\beta x\right],$$

где r – число корней характеристического уравнения, равных $\alpha+i\beta$, $Q_{S_1}(x)$, $Q_{S_2}(x)$ – многочлены степени $S=max\{n, m\}$.

5. Правая часть имеет вид: $\boxed{f(x)=f_1(x)+f_2(x)}$, тогда

$$y^* = y_1^* + y_2^* .$$

Примерный вариант типового расчета

I. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $xyy' = 1 - x^2$;

2. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$;

3. $yy'' = (y')^2$;

4. $y'' + 9y = 4\sin 3x + x$.

II. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

1. $xy' - \frac{y}{x+1} = x;\quad x = 1,\ y = 0$;

2. $y'' = e^{2x};\quad x = y = 0,\ y' = 1$;

3. $2y'' + y' - y = 2e^x;\quad x = y = 0,\ y' = 1$.

III. Найти общее решение уравнения без правой части и вид частного решения линейного уравнения с правой частью, по заданным корням его характеристического уравнения и заданной правой частью *Q(x)*:

а). $Q(x) = e^{-5x} - 1;\ k_1 = -5,\ k_{2,3} = 0$;

б). $Q(x) = \sin x + \sin 2x;\ k_{1,2} = \pm i,\ k_{3,4} = \pm 2$;

в). $Q(x) = e^x \sin 8x;\ k_{1,2} = 1,\ k_{3,4} = 1 \pm 8i$.

IV. Данное дифференциальное уравнение, удовлетворяющее начальным условиям решить методом Эйлера и сравнить с теоретическим решением. Шаг принять равным 0,1. Построить график.

$(1 + y^2)dx = xydy;\quad y\big|_{x=1} = 1,\ [1;2]$.

I. Найти общие решения дифференциальных уравнений:

1. $xyy' = 1 - x^2$.

Решение:

$y' = \frac{1-x^2}{x} \cdot \frac{1}{y}$, получили уравнение вида $y' = f(x) \cdot g(y)$, где $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$, а $g(y) = \frac{1}{y}$, т.е. уравнение с разделяющимися переменными.

Решим его. Для этого разделим переменные:

$$ydy = \frac{1-x^2}{x} dx \Rightarrow \int ydy = \int \frac{1-x^2}{x} dx.$$

Проинтегрировав, получим:

$$\frac{y^2}{2} = \ln x - \frac{x^2}{2} + \ln C \Rightarrow y^2 + x^2 \ln(C \cdot x^2).$$

Ответ: $y^2 + x^2 \ln(C \cdot x^2)$.

2. $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$.

Решение:

$y' = \frac{1}{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$, получили уравнение вида $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, т.е. однородное уравнение.

Воспользуемся необходимой заменой: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux,\ y' = u'x + u$:

$$u'x + u = \frac{1}{u} + u \Rightarrow u'x = \frac{1}{u};$$

$$udu = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int udu = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{u^2}{2} = \ln x + \ln C;$$

$$\frac{u^2}{2} = \ln C \cdot x \Rightarrow y^2 = 2x^2 \ln C \cdot x.$$

Ответ: $y^2 = 2x^2 \ln C \cdot x.$

3. $yy'' = (y')^2$

Решение:

Это дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка, не содержащее x в явном виде.

Воспользуемся соответствующей заменой: $y'=p,\ y''=p\frac{dp}{dy}$:

$$yp\frac{dp}{dy}=p^2;$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \text{ или } p=0;$$

$$\frac{dp}{p}=\frac{dy}{y} \Rightarrow \int\frac{dp}{p}=\int\frac{dy}{y} \Rightarrow \ln p=\ln y+\ln C_1 \Rightarrow p=C_1y;$$

$$y'=C_1y \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=C_1\int dx \Rightarrow \ln y=C_1x+\ln C_2 \Rightarrow y=C_2e^{C_1x};$$

$$p=0 \Rightarrow y'=0 \Rightarrow y=C_3.$$

Ответ: $y=C_2e^{C_1x}$ или $y=C_3$.

4. $y''+9y=4\sin 3x+x$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение ищется в виде: $y=\tilde{y}+y^*$, где $\tilde{y}$ – общее решение уравнения $y''+9y=0$, y^* – частное решение уравнения $y''+9y=4\sin3x+x$.

Решим однородное уравнение $y''+9y=0$.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: $k^2+9=0$. Корни уравнения $k_{1,2}=\pm 3i$ комплексно-сопряженные.

Общее решение уравнения имеет вид: $\tilde{y}=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$.

Так как правая часть уравнения $y''+9y=4\sin 3x+x$ состоит из суммы двух функций $4\sin3x$ и x, то частное решение ищем в виде: $y^*=y_1^*+y_2^*$, где y_1^* – частное решение уравнения $y''+9y=4\sin 3x$, а y_2^* – частное решение уравнения $y''+9y=x$.

Сначала найдем частное решение y_1^*, т.е. решим уравнение $y''+9y=4\sin 3x$.

Правая часть имеет вид: $f(x)=a\cos\beta x+b\sin\beta x$, где $a=0$, $b=4$, $\beta=3$, тогда $i\beta=3i$. Так как число $i\beta=3i$ является единственным корнем характеристического уравнения, то $r=1$ и частное решение будем искать в виде: $y_1^*=(A\cos 3x+B\sin 3x)\cdot x^1$.

Подставим $y_1^*, (y_1^*)', (y_1^*)''$ в уравнение $y''+9y=4\sin 3x$:

$-6A\sin 3x+6B\cos 3x=4\sin 3x$. Сравним коэффициенты при $\sin x$ и $\cos x$:

$$\begin{cases}-6A=4\\ 6B=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=-\dfrac{2}{3}\\ B=0\end{cases}$$ Следовательно, $y_1^*=-\dfrac{2}{3}x\cdot\cos 3x$.

Теперь найдем частное решение y_2^*, т.е. решим уравнение $y''+9y=x$.

Правая часть имеет вид: $f(x)=x$, характеристических корней, равных нулю нет, тогда

$$y_2^* = (Ax+B)x^0 .$$

Подставим $y_1^*, (y_1^*)', (y_1^*)''$ в уравнение $y''+9y=x$:

$9Ax+9B=x;$ $\begin{cases} 9A=1 \\ 9B=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=\dfrac{1}{9} \\ B=0 \end{cases}$. Следовательно, $y_2^* = \dfrac{1}{9}x$.

Таким образом, частное решение данного уравнения имеет вид:

$$y^* = y_1^* + y_2^* = -\frac{2}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{9}x ,$$

а общее решение этого уравнения:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x - \frac{2}{3}x\cdot\cos 3x + \frac{1}{9}x .$$

Ответ: $y = (C_1 - \frac{2}{3}x)\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{9}x$.

II. Найти частные решения дифференциальных уравнений, удовлетворяющие данным начальным условиям:

1. $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x;\quad x=1,\ y=0$.

Решение:

$y' = \dfrac{1}{x(x+1)}\cdot y + 1$, получили уравнение вида $y' = F(x)\cdot y + P(x)$, где $F(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$, а $P(x)=1$, т.е. линейное уравнение.

Необходимая замена: $y = uv;\ y' = u'v + v'u$.

$$u'v + v'u - \frac{uv}{x(x+1)} - 1 = 0;$$

$$\begin{cases} v'u = \dfrac{uv}{x(x+1)} \\ u'v = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} v' = \dfrac{v}{x(x+1)} \\ u'v = 1 \end{cases}$$

$$v' = \frac{v}{x(x+1)} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x(x+1)} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x(x+1)} \Rightarrow \ln v = \ln\frac{x}{x+1} \Rightarrow v = \frac{x}{x+1};$$

$$u'v = 1 \Rightarrow u'\frac{x}{x+1} = 1 \Rightarrow du = \frac{x+1}{x}dx \Rightarrow \int du = \int\frac{x+1}{x}dx \Rightarrow u = x + \ln x + C.$$

Таким образом, $y = uv = (x + \ln x + C)\cdot\dfrac{x}{x+1}$ – общее решение линейного уравнения.

Найдем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям x=1, y=0:

$0 = (1+C)\cdot\dfrac{1}{2} \Rightarrow C = -1$. Таким образом, частное решение имеет вид: $y = (x + \ln x - 1)\cdot\dfrac{x}{x+1}$.

Ответ: $y=(x+\ln x-1)\cdot\dfrac{x}{x+1}$.

2. $y''=e^{2x}$; $x=y=0,\ y'=1$.

Решение:

$y''=e^{2x}$ – дифференциальное уравнение, допускающее понижение порядка, решается двукратным интегрированием правой части.

$y''=e^{2x}$;

$y'=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1$;

$y=\int\left(\frac{1}{2}e^{2x}+C_1\right)dx=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$.

Итак, $y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2$ – общее решение данного дифференциального уравнения.

Найдем частное решение:

$y'=\frac{1}{2}e^{2x}+C_1 \Rightarrow 1=\frac{1}{2}+C_1 \Rightarrow C_1=\frac{1}{2}$;

$y=\frac{1}{4}e^{2x}+C_1x+C_2 \Rightarrow 0=\frac{1}{4}+C_2 \Rightarrow C_2=-\frac{1}{4}$.

Таким образом, $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ – частное решение.

Ответ: $y=\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

3. $2y''+y'-y=2e^x$; $x=y=0,\ y'=1$.

Решение:

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Решение ищется в виде: $y=\tilde{y}+y^*$, где $\tilde{y}$ – общее решение уравнения $2y''+y'-y=0$, y^* – частное решение уравнения $2y''+y'-y=2e^x$.

Решим однородное уравнение $2y''+y'-y=0$.

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид: $2k^2+k-1=0$. Корни уравнения $k_1=-1,\ k_2=\frac{1}{2}$ вещественные и различные. Общее решение уравнения имеет вид: $\tilde{y}=C_1e^{-x}+C_2e^{\frac{1}{2}x}$.

Найдем частное решение y^*:

Правая часть имеет вид: $f(x)=e^{\alpha x}P_n\ (x)$, где $P_n(x)=2$, $\alpha=1$. Так как корней характеристического уравнения, равных α нет, то $y^* = Ae^x x^0$.

Подставим $y_1^*, (y_1^*)', (y_1^*)''$ в уравнение $2y'' + y' - y = 2e^x$:

$2Ae^x = 2e^x \Rightarrow A = 1$. Таким образом, $y^* = e^x$.

Общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$y = \tilde{y} + y^* = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x} + e^x .$$

Найдем частное решение данного дифференциального уравнения с начальными условиями x=y=0, $y' = 1$:

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{\frac{1}{2}x} + e^x ;$$

$$y' = -C_1e^{-x} + \frac{1}{2}C_2e^{\frac{1}{2}x} + e^x ;$$

$$\begin{cases} 0 = C_1 + C_2 + 1 \\ 1 = -C_1 + \frac{1}{2}C_2 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -\frac{1}{3} \\ C_2 = -\frac{2}{3} \end{cases} .$$

Таким образом, частное решение имеет вид: $y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x} + e^x$.

Ответ: $y = -\frac{1}{3}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{\frac{1}{2}x} + e^x$.

III. Найти общее решение уравнения без правой части и вид частного решения линейного уравнения с правой частью, по заданным корням его характеристического уравнения и заданной правой частью $Q(x)$:

а). $Q(x) = e^{-5x} - 1;\ k_1 = -5,\ k_{2,3} = 0$.

Решение:

Найдем общее решение уравнения без правой части:

$\tilde{y} = C_1e^{-5x} + e^{0x}(C_2 + C_3x) = C_1e^{-5x} + C_2 + C_3x$.

Составим вид частного решения y^* линейного уравнения с правой частью:

$Q(x)$ состоит из двух функций e^{-5x} и –1, значит $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* – частное решение уравнения с правой частью $Q_1(x) = e^{-5x}$, а y_2^* – частное решение уравнения с правой частью $Q_2(x) = -1$.

Найдем y_1^*: так как $k_1 = -5$, то $y_1^* = Ae^{-5x}x^1$; y_2^*: так как $k_{2,3} = 0$, то $y_2^* = Bx^2$. Значит, $y^* = y_1^* + y_2^* = Ae^{-5x}x + Bx^2$.

Ответ: $\tilde{y} = C_1e^{-5x} + C_2 + C_3x$, $y^* = Ae^{-5x}x + Bx^2$.

б). $Q(x) = \sin x + \sin 2x;\ k_{1,2} = \pm i,\ k_{3,4} = \pm 2$.

Решение:

Найдем общее решение уравнения без правой части:

$\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$.

Составим вид частного решения y^* линейного уравнения с правой частью:

$Q(x)$ состоит из двух функций $\sin x$ и $\sin 2x$, значит $y^* = y_1^* + y_2^*$, где y_1^* – частное решение уравнения с правой частью $Q_1(x) = \sin x$, а y_2^* – частное решение уравнения с правой частью $Q_2(x) = \sin 2x$.

Найдем y_1^*: так как $k_1 = i$, то $y_1^* = (A\cos x + B\sin x)x^1$; y_2^*: так как характеристических корней равных $2i$ нет, то $y_2^* = (C\cos 2x + D\sin 2x)x^0$.

Значит, $y^* = y_1^* + y_2^* = Ax\cos x + Bx\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

Ответ: $\tilde{y} = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$, $y^* = Ax\cos x + Bx\sin x + C\cos 2x + D\sin 2x$.

в). $Q(x) = e^x \sin 8x;\ k_{1,2} = 1,\ k_{3,4} = 1 \pm 8i$.

Решение:

Найдем общее решение уравнения без правой части:

$\tilde{y} = e^x(C_1 + C_2x) + e^x(C_3 \cos 8x + C_4 \sin 8x)$.

Составим вид частного решения y^* линейного уравнения с правой частью:

$Q(x) = e^x \sin 8x = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x]$, где $\alpha=1$, $\beta=8$, $P_n(x)=0$, $P_m(x)=1$. Таким образом, $\alpha+i\beta=1+8i=k_3$. Значит, $y^* = e^x x^1(A\cos 8x + B\sin 8x)$.

Ответ: $\tilde{y} = e^x(C_1 + C_2x) + e^x(C_3 \cos 8x + C_4 \sin 8x)$, $y^* = e^x x(A\cos 8x + B\sin 8x)$.

IV. Данное дифференциальное уравнение, удовлетворяющее начальным условиям решить методом Эйлера и сравнить с теоретическим решением. Шаг принять равным 0,1. Построить график.

$(1 + y^2)dx = xydy;\ \ y\big|_{x=1} = 1,\ \ [1;2]$.

Решение:

$(1+y^2)dx = xydy \Rightarrow y' = \frac{1+y^2}{y}\cdot\frac{1}{x}$ – это уравнение с разделяющимися переменными.

Найдем общее решение:

$$\frac{dx}{x} = \frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{x} = \int\frac{ydy}{1+y^2} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \ln C;$$

$$\ln(1+y^2) = \ln x^2 - \ln C^2 \Rightarrow 1+y^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{x^2}{C^2}-1}.$$

Найдем частное решение:

$1+y^2 = \frac{x^2}{C^2} \Rightarrow 2 = \frac{1}{C^2} \Rightarrow C = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, значит, $y = \pm\sqrt{2x^2-1}$.

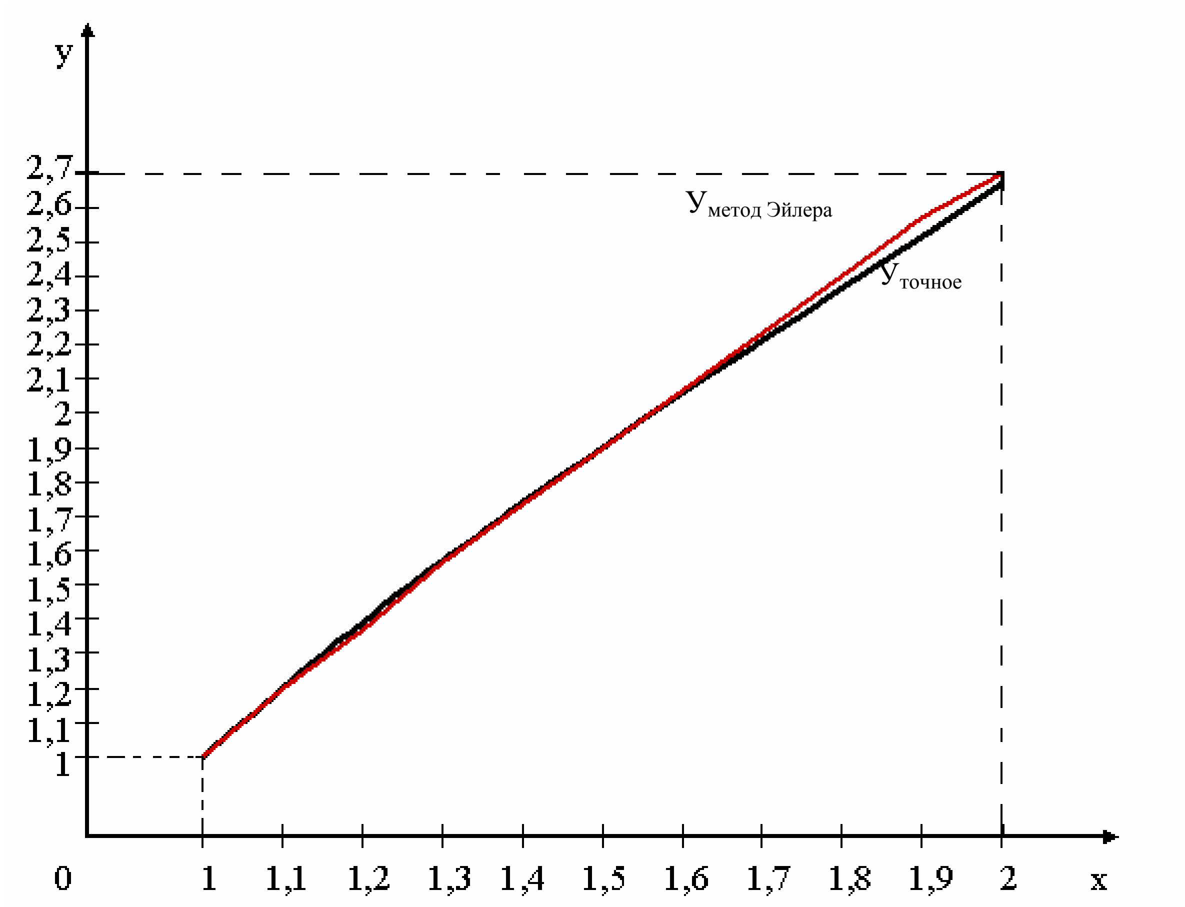
Итак, имеем уравнение вида $y' = \frac{1+y^2}{yx}$, начальные данные $y\big|_{x=1} = 1$, интервал [1;2] и точное решение данного дифференциального уравнения $y = \pm\sqrt{2x^2-1}$.

Метод Эйлера: $y_{k+1} = y_k + y'_k \cdot h$, h – шаг, h=0,1.

Составим таблицу:

k	x_k	y_k	$y'_k = \frac{1+y_k^2}{y_k x_k}$	$y'_k \cdot h$	$y_{точное}$
0	**1**	**1**	2	0,2	**1**
1	**1,1**	**1,2**	1,85	0,185	**1,19**
2	**1,2**	**1,385**	1,76	0,176	**1,37**
3	**1,3**	**1,561**	1,69	0,169	**1,54**
4	**1,4**	**1,73**	1,65	0,165	**1,71**
5	**1,5**	**1,895**	1,62	0,162	**1,87**
6	**1,6**	**2,062**	1,59	0,159	**2,03**
7	**1,7**	**2,221**	1,57	0,157	**2,19**
8	**1,8**	**2,378**	1,55	0,155	**2,34**
9	**1,9**	**2,533**	1,54	0,154	**2,49**
10	**2**	**2,68**	1,53	0,153	**2,65**

Построим график:



Таким образом, видим, что решение дифференциального уравнения, построенного с помощью метода Эйлера, практически совпало с его точным решением, полученным аналитически.

Теоретические вопросы для защиты типового расчета

1. Уравнение какого типа называют дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что называется решением дифференциального уравнения первого порядка?
3. Что называют начальными условиями решения дифференциального уравнения первого порядка?
4. Что называют задачей Коши?
5. Что такое общее решение дифференциального уравнения первого порядка?
6. Что такое частное решение дифференциального уравнения первого порядка?
7. Какие виды дифференциальных уравнений первого порядка Вам известны?
8. Уравнение какого типа называют дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
9. Уравнение какого типа называют однородным дифференциальным уравнением?
10. Уравнение какого типа называют линейным уравнением?
11. Уравнение какого типа называют уравнением Бернулли?
12. Что называют дифференциальным уравнением второго порядка?
13. Что называется решением дифференциального уравнения второго порядка?
14. Что называют начальными условиями решения дифференциального уравнения второго порядка?
15. Что такое общее решение дифференциального уравнения второго порядка?
16. Какие виды дифференциальных уравнений второго порядка Вам известны?
17. Что такое частное решение дифференциального уравнения второго порядка?
18. Уравнения какого типа называют уравнениями, допускающими понижение порядка?
19. Уравнения какого типа называют линейными однородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?
20. Уравнения какого типа называют линейными неоднородными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами?

Учебники и методические указания

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление.
2. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике.
3. Бронштейн И.И., Семендяев К.Н. Справочник по математику.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа.
5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.