Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

СГУПС

Теория вероятностей

Учебное пособие
для студентов
факультета бизнес-информатики

Составил *доцент С.А.Аракчеев*

Новосибирск – 2010

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Часть I. Случайные события

Введение

Теория вероятностей изучает *закономерности массовых однородных случайных явлений*.

Пример 1. Рождение мальчика или девочки является случайным (и в силу этого непредсказуемым) случайным явлением. Однако статистикой с большой точностью установлено, что на 1000 новорожденных приходится 518 мальчиков.

Пример 2. Предсказать результат однократного бросания монеты невозможно. Однако предположение о том, что из 1000 подбрасываний хотя бы 900 раз монета выпадет «орлом», является интуитивно совершенно неправдоподобным.

Пример 3. Статистическая физика изучает закономерности движения мельчайших частиц, например, молекул воздуха. Она доказывает, что однородность состава окружающего нас воздуха — явление случайное, однако складывающееся из огромного количества отдельных случайностей и поэтому практически являющееся закономерным.

Эти и многие другие примеры демонстрируют общее правило.

Пусть проведено N независимых *испытаний* в одинаковых условиях, причем некоторое *случайное событие* A произошло в M испытаниях. Величина $W = \dfrac{M}{N}$ называется *относительной частотой* события A в данной серии испытаний.

Закон больших чисел утверждает, что относительные частоты *устойчивы*, т.е. при неограниченном продолжении серии испытаний колебания величины W становятся все меньше, и пределом этой величины является константа, называемая *вероятностью* события A *в одном испытании* и обозначаемая $P(A)$.

Примечание. Данная формулировка закона больших чисел неточна. Некоторые из возможных математически корректных его формулировок мы дадим в главах 8,9 II части пособия.

Основные *свойства* вероятности события:

1) $0 \le P(A) \le 1$, причем значение 0 соответствует *невозможному* событию, а значение 1 — *достоверному*.

2) если из наступления события A *следует* наступление события B, то $P(A) \le P(B)$.

Пример 4. Свойство 2 действует, например, в следующей ситуации. Назовем испытанием экзамен, который сдает студент Н., и рассмотрим следующие события: A — он сдаст на оценку «5», B — он сдаст на положительную оценку.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

1. Комбинаторика

Комбинаторика (теория соединений) изучает строение подмножеств, выбранных по определенным правилам из данного конечного множества, состоящего из однородных элементов. Обычно ставится задача о *количестве* таких подмножеств.

В случае выбора элементов из *различных* множеств действует **правило произведения**.

Пример 1. Для выполнения лабораторной работы группу студентов разбили на 3 подгруппы, состоящие из 10, 8 и 7 человек. В каждой подгруппе по жребию выбирают старшего. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. $N = 10 \cdot 8 \cdot 7 = 560$ различных способов.

Пример 2. Сколько можно составить различных шестизначных телефонных номеров, если первая цифра не может быть нулем или единицей?

Решение. $N = 8 \cdot 10^5 = 800000$ номеров.

При одновременном выборе нескольких элементов *из одного и того же* множества рассматривают следующие виды соединений.

Размещением называется выбор k элементов из n данных *в определенном порядке* (порядок может устанавливаться как в процессе отбора, так и после него). Число всех возможных размещений обозначают A_n^k (читается: А из n по k) и вычисляют по формуле

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 3. Сколько различных 4-значных чисел, состоящих каждое из различных цифр, можно составить из цифр 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

Решение. $N = A_9^4 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 3024$ чисел.

Размещение *всех* n данных элементов называется **перестановкой**. Число перестановок P_n вычисляется по формуле

$$P_n = A_n^n = n!$$

Пример 4. Игрок в «дурака» получает на руки 6 карт. Сколькими способами он может расположить их в руке?

Решение. $N = P_6 = 6! = 720$ способов.

Сочетанием называется выбор k элементов из n данных *без учета порядка* (например, при выборе всех одновременно или даже последовательно, если в результате выбора этот порядок считается несущественным). Число сочетаний C_n^k вычисляется по формуле

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Числа C_n^k называются также *биномиальными коэффициентами* и обладают следующими свойствами:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ (симметрия)},$$

$$C_n^0 = C_n^n = 1 \text{ (считаем } 0! = 1), \; C_n^1 = C_n^{n-1} = n.$$

Пример 5. В группе из 12 учащихся учитель выбирает четверых для углубленного тестирования. Сколько у него вариантов выбора?

Решение. $N = C_{12}^4 = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$ способов.

Пример 6. В урне имеется 5 пронумерованных белых шаров и 7 пронумерованных красных. Сколько существует способов выбрать 3 белых и 2 красных шара?

Решение. Так как выбор происходит из двух различных подмножеств, то применяем правило произведения: $N = C_5^3 \cdot C_7^2 = 10 \cdot 21 = 210$ способов.

Примечание. Стандартная ситуация выбора одного или нескольких неразличимых на ощупь *шаров* из *урны* называется *урновой схемой*. К ней можно сводить любые задачи комбинаторики.

Случаи более сложных правил выбора обычно сводятся к комбинированию вышеперечисленных формул.

Пример 7. На каждой грани кубика Рубика может оказаться от одного до шести цветов. Сколько можно насчитать различных комбинаций цветов?

Решение. $N = C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$ комбинации.

В последней задаче можно применить формулу для вычисления числа всех подмножеств конечного множества , состоящего из n элементов (оно равно 2^n). В нашем случае $N = 2^6 - 1$ (исключаем по условию задачи пустое подмножество).

Задачи

1.1. Сколькими способами могут выпасть при одновременном бросании три игральные кости, различающиеся по цвету?

1.2. В чемпионате участвует 10 команд. Сколько существует возможных исходов чемпионата (исходом считаем любое расположение команд в тройке призеров)?

1.3. В собрании участвуют 40 человек. Для ведения собрания необходимо избрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?

1.4. Сколькими способами можно расставить 8 учебников на полке?

1.5. Сколькими способами можно разложить три письма по трем конвертам? Найдите число тех способов, при которых ни одно письмо не попадет в свой конверт.

1.6. Перечислите все перестановки из букв А, Б, В, Г.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

1.7. Рассмотрим совокупность всех 4-значных чисел от 0000 до 9999. Каких чисел среди них больше: тех, которые состоят из различных цифр, или тех, которые содержат одинаковые цифры? (Указание: число, состоящее из различных цифр, рассмотрим как размещение 4 цифр из 10 данных). Тот же вопрос, если числа, начинающиеся с 0, исключены.

1.8. Имеются 6 карточек с буквами Р, Е, М, О, Н, Т. Сколько различных «слов», включающих 3 и 4 буквы, можно из них составить? (Под «словом» понимаем любую комбинацию букв). Укажите среди этих «слов» осмысленные слова.

1.9. Сколько различных пар дежурных можно составить в группе детского сада, состоящей из 10 девочек и 7 мальчиков? Сколько можно составить пар, состоящих из мальчика и девочки?

1.10. Игрок в «дурака» получает на руки 6 карт. Сколько различных сочетаний карт он может получить? Тот же вопрос, если известно, что у него нет козырей; есть 2 козыря; 3 бубны, 2 пики и одна черва.

2. Классическая вероятность

Формула **классической вероятности**:

$$P(A) = \frac{M}{N},$$

где N — число *равновозможных исходов* того *испытания*, в котором ожидается появление *случайного события* A; M — число исходов, *благоприятных* для события A.

Пример 1. Вероятность выпадения «орла» при бросании монеты равна $\frac{1}{2}$ (1 благоприятный исход «орел» из двух равновозможных — «орел» и «решка»).

Пример 2. Вероятность того, что карта, случайно извлеченная из колоды в 36 карт, окажется тузом, равна $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Пример 3. Из 15 бильярдных шаров, пронумерованных от 1 до 15, выбили три. Найти вероятность того, что выбито не менее 40 очков.

Решение. Общее число исходов $N = C_{15}^3 = 455$. Благоприятные для события A — «сумма очков не менее 40» — исходы (их число $M = 4$) нетрудно перечислить: 15,14,13; 15,14,12; 15,14,11; 15,13,12. Ответ: $P(A) = \frac{4}{455}$.

Рассмотрим типичные задачи на *одноцветные* и *разноцветные* шары.

Пример 4. В урне содержатся 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность извлечь 3 белых шара одновременно.

Решение. Общее число исходов $N = C_{10}^3$ (равновозможны любые соче-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

тания по 3 из всех 10 шаров). Число благоприятных исходов $M = C_6^3$. Искомая вероятность равна $\frac{M}{N} = \frac{C_6^3}{C_{10}^3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{6}$.

Пример 5. В урне содержатся 6 белых и 4 черных шара. Извлекаем 5 шаров. Найти вероятность того, что среди извлеченных ровно 2 белых шара.

Решение. Искомую вероятность обозначим $P(2,3) = \frac{C_6^2 \cdot C_4^3}{C_{10}^5} = \frac{15 \cdot 4}{252} = \frac{5}{21}$.

Пример 6. Найти вероятность того, что у игрока в преферанс (на руках 10 карт из колоды в 32 карты) ровно 2 пики и 3 бубны.

Решение аналогично предыдущему. Так как распределение остальных двух мастей нас не интересует, то рассматриваем их как 16 карт одного «цвета»: $P(2,3,5) = \frac{C_8^2 \cdot C_8^3 \cdot C_{16}^5}{C_{32}^{10}}$ (вычислите сами!).

Задачи

2.1. Год с равной вероятностью может начинаться с любого дня недели. Найти вероятность того, что в январе будет 5 воскресений.

2.2. Какова вероятность получить хотя бы один «орел» при одновременном подбрасывании двух монет? трех монет?

2.3. Из отрезков длиной 1, 3, 5, 7, 9 см случайным образом выбрали три. Найти вероятность того, что из них можно составить треугольник.

2.4. На шахматной доске стоит белая ладья. Черную ладью ставят на любое свободное поле. Какова вероятность того, что белая ладья может ее побить?

2.5. Одновременно брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:

а) в сумме выпало 3, 5, 10, 12 очков (какая сумма наиболее вероятна?);

б) сумма выпавших очков не менее 9;

в) выпала хотя бы одна пятерка;

г) на красной кости больше очков, чем на синей;

д) на красной кости на 2 очка больше, чем на синей;

е) на одной кости на 2 очка больше, чем на другой.

2.6. 10 человек расставили по кругу случайным образом. Какова вероятность того, что Иванов и Петров оказались рядом?

2.7. 10 человек расставили в ряд случайным образом. Какова вероятность того, что Иванов и Петров оказались рядом?

2.8. 30 человек случайным образом разбили на три равные группы. Какова вероятность того, что Иванов и Петров оказались в одной группе?

2.9. Из карточек с буквами Р, Е, М, О, Н, Т случайным образом выбрали 4 карточки и выложили их в ряд. Какова вероятность того, что получилось сло-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

во «МОРЕ»?

2.10. Из карточек с буквами Р, Е, М, О, Н, Т случайным образом выбрали 4 карточки. Какова вероятность того, что из них можно составить слово «МОРЕ»?

2.11. Какова вероятность угадать ровно три номера в спортлото «5 из 36»?

2.12. В бригаде, состоящей из 7 мужчин и 5 женщин, выбирают по жребию троих. Найти вероятности того, что среди выбранных:

а) нет женщин;

б) есть женщины;

в) одна женщина.

3. Сложение вероятностей

Операции над событиями. Пусть A и B — два события, которые могут произойти *в одном и том же* испытании. Дадим определения сложных событий.

Противоположное событие $\overline{A}$ состоит в том, что в результате испытания событие A не произошло.

Пример 1. Если A: «студент N сдал экзамен на «5»», то $\overline{A}$ включает как любую другую оценку, так и неявку на экзамен по любой причине.

Вероятности исходного и противоположного событий связаны равенством

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1 .$$

Сумма событий $A + B$ (обозначается также $A \cup B$, A или B) состоит в том, что в результате испытания произошло по меньшей мере одно из событий A или B.

Произведение событий AB (обозначается также $A \cap B$, A и B) состоит в том, что в результате испытания произошли оба события A и B.

Пример 2. Пусть испытание состоит в том, что на политической карте мира выбрано любое государство, событие A: «название страны начинается с буквы Б», событие B: «название столицы страны начинается с буквы Б». Тогда событие $A + B$ произойдет, например, при выборе Белоруссии или Ирака, а событие AB — при выборе Бельгии.

Формула **сложения вероятностей** (общий случай):

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Следствие 1. События A и B называются *несовместными*, если $P(AB) = 0$ (иначе говоря, AB — событие невозможное, т.е. эти два события *не могут* произойти одновременно в одном испытании). Очевидно, что для несовместных событий

$$P(A + B) = P(A) + P(B),$$

причем эта формула распространяется на любое число *попарно* несовместных событий.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Пример 2. Событие A: «игрок А получил при сдаче туза пик» и событие B: «игрок Б получил при сдаче туза пик» несовместны, если под испытанием понимаем одну и ту же сдачу карт, и совместимы при разных сдачах.

Пример 4. Из урны, содержащей 3 красных, 4 синих и 2 белых шара, извлекли одновременно два шара. Какова вероятность того, что они — одного цвета?

Решение. Искомое событие D является суммой трех несовместных в данном испытании (извлечено всего два шара!) событий: A — «оба шара красные», B — «оба шара синие», C — «оба шара белые». Отсюда

$$P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{C_3^2}{C_9^2} + \frac{C_4^2}{C_9^2} + \frac{C_2^2}{C_9^2} = \frac{3+6+1}{36} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}.$$

Пример 5. В тех же условиях найти вероятность того, что два извлеченных шара имеют различный цвет.

Решение. $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - \frac{5}{18} = \frac{13}{18}$.

Прием перехода к противоположному событию используют в задачах с формулировкой, включающей слова «хотя бы один из…»

Пример 6. В урне содержатся 6 белых и 4 черных шара. Извлечены одновременно 3 шара. Найти вероятность того, что среди извлеченных есть черные шары.

Решение. Вероятность противоположного события (среди извлеченных нет черных шаров) вычислена в примере 4 главы 2 и равна $\frac{1}{6}$. Ответ: $\frac{5}{6}$.

Задачи

3.1. Из 15 пронумерованных бильярдных шаров случайным образом выбирают один. Рассмотрим следующие события:
A — номер шара четный;
B — номер делится на 3;
C — номер делится на 5.
Найти вероятности следующих событий и описать каждое из них словами: A, B, C, $\overline{A}$, AB, AC, BC, ABC, A+B (проверить выполнение теоремы о сумме событий), AB+C.

3.2. Из урны, содержащей 6 красных, 1 синих и 3 белых шара, извлекли одновременно два шара. Какова вероятность того, что они — разного цвета?

3.3. Игрок получает на руки 7 костей домино (из набора 28 костей). Найти вероятность того, что у него:
а) нет дублей;
б) есть дубли;
в) один дубль;

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

г) не менее двух дублей.

3.4. Из урны, содержащей 3 белых и 5 красных шаров, извлекли одновременно 2 шара. Найти вероятности того, что они:

а) оба белые;

б) оба красные;

в) одного цвета;

г) разных цветов;

д) первый – белый, второй – красный (при последовательном извлечении).

3.5. Из урны, содержащей 15 красных, 9 синих и 6 зеленых шаров, извлекают одновременно 6 шаров. Найти следующие вероятности: среди извлеченных

а) нет зеленых шаров;

б) ровно один зеленый шар;

в) не менее двух зеленых шаров;

г) 1 зеленый, 2 синих и три красных шара;

д)* представлены все три цвета.

4. Умножение вероятностей (общий случай)

Условная вероятность. Вероятность события B, если известно, что событие A произошло, вычисляется по формуле

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

и называется условной вероятностью.

Формула **умножения вероятностей** зависимых событий имеет вид

$$P(AB) = P(A)P_A(B)$$

и распространяется на любое число влияющих друг на друга событий:

$P(ABC) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)$ и т.д. (*Правило цепочки событий*: каждое следующее рассматривается при условии, что все предыдущие произошли).

Пример 1. В урне содержатся 6 белых и 4 черных шара. Найти вероятность извлечь 3 белых шара одновременно.

Решение. Рассмотрим следующие события:

A — первый шар белый. Очевидно, что $P(A) = \frac{6}{10}$;

B — второй шар белый. *После того, как* событие A произошло, в урне осталось 9 шаров, из них 5 белых. Поэтому $P_A(B) = \frac{5}{9}$;

C — третий шар белый. Рассуждая аналогично, получим: $P_{AB}(C) = \frac{4}{8}$.

Остается перемножить три дроби и сравнить результат с примером 4 главы 2.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Задачи

4.1. Каждый четвертый мужчина — блондин, у каждого десятого голубые глаза, четверо из ста обладают обоими признаками. Являются ли эти признаки зависимыми? Найти вероятность для голубоглазого быть блондином; не быть блондином.

4.2. Карточки с буквами А, В, С перетасованы и выложены в ряд. Зависимы ли события «А левее В» и «А левее С»?

4.3. При бросании двух костей что вероятнее: событие A (набрать не менее 9 очков) или событие B (выпала хотя бы одна пятерка)? Найти $P(A)$, $P(B)$, $P_A(B)$, $P_B(A)$, проверить равенства $P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$.

4.4. На двух костях выпал разный результат. Какова вероятность того, что ни на одной не выпала тройка?

4.5. Одновременно брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на двух первых выпали одинаковые грани, а на третьей – другая. (Указание: рассмотрите произведение двух событий: A – на второй кости тот же результат, что и на первой, B – на третьей кости любой другой результат).

4.6. Из колоды в 36 карт извлечены наугад четыре. Найти вероятность того, что они — разных мастей.

4.7. 10 человек расставили в ряд случайным образом. Какова вероятность того, что Иванов и Петров оказались крайними?

4.8. Карточки с буквами М,О,Л,О,К,О перетасованы и выложены в ряд. Найти вероятности того, что:

а) буквы М и К – крайние;

б) обе крайние буквы – О.

4.9. Из бильярдных шаров, пронумерованных от 1 до 15, выбраны наугад два. Найти вероятность того, что хотя бы один номер — четный.

4.10. Какова вероятность, расставляя в случайном порядке карточки с буквами А,А,О,К,К, получить слово КАКАО?

4.11. Слово МОЛОКО разрезали на 6 букв, их перемешали и выложили в ряд три буквы. Найти вероятность того, что получили слово КОЛ.

4.12. Слово МОЛОКО разрезали на 6 букв, их перемешали и выложили в ряд три буквы. Найти вероятность того, что получили слово ОКО.

4.13. Слово КУКУРУЗА разрезали на 8 букв, их перемешали и выложили в ряд четыре буквы. Какое слово в результате вероятнее: РУКА или УКАЗ?

4.14. Слово МАТЕМАТИКА разрезали на 10 букв, их перемешали и выложили в ряд четыре буквы. Какое слово в результате вероятнее: МАМА или ТЕМА?

4.15. Требуется собрать все 20 различных вкладышей в жвачки «Love is…». Какова вероятность того, что для этого достаточно купить 20 жвачек (все вкладыши встречаются с равной вероятностью)?

4.16. (Задача о днях рождения) В автобусе собрались n случайных людей.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Найти вероятность того, что хотя бы у двух из них день рождения совпадает (считать, что день рождения каждого человека с равной вероятностью выпадает на любой из 365 дней в году; рожденными 29 февраля для простоты пренебрегаем). Вычислить эту вероятность при $n = 10; 30; 50$. При каком значении n эта вероятность впервые превысит 0,5?

5. Умножение вероятностей (независимые события)

Если наступление события A не влияет на вероятность наступления события B, т.е. $P_A(B) = P(B)$, то эти события называются *независимыми* и, очевидно,

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

(формула умножения вероятностей независимых событий). Эта формула распространяется на любое число независимых событий.

Примечание. Независимость событий (или отсутствие их взаимного влияния) легко понимать интуитивно. В урновой схеме, например, шары не влияют друг на друга при извлечении из разных урн или при извлечении *с возвратом*.

Пример 1. Вероятность успешной сдачи экзамена для студентов А и Б равна 0,8, для студента В — 0,6. Найти вероятность того, что успешно сдадут экзамен двое из них.

Решение. Пусть событие A: «студент А сдал экзамен». Тогда $P(A) = p_1 = 0{,}8;\ \ P(\overline{A}) = q_1 = 1 - p_1 = 0{,}2$. Аналогично: событие B: «студент Б сдал экзамен». $P(B) = p_2 = 0{,}8.\ \ P(\overline{B}) = q_2 = 1 - p_2 = 0{,}2$. Событие C: «студент В сдал экзамен». $P(C) = p_3 = 0{,}6;\ P(\overline{C}) = q_3 = 1 - p_3 = 0{,}4$.

Если событие D_2: «успешно сдали экзамен двое», то

$$P(D_2) = P(AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC) = p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 = 0{,}448.$$

Аналогично вычисляются вероятности событий D_0, D_1, D_3. Если требуется вычислить вероятность события E: «успешно сдаст экзамен хотя бы один из трех студентов», то можно вычислить сумму $P(D_1) + P(D_2) + P(D_3)$, но удобнее перейти к противоположному событию $\overline{E} = D_0$: «ни один из студентов не сдаст экзамен»:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - q_1q_2q_3 = 0{,}984.$$

Этот способ применяется для вычисления вероятности наступления хотя бы одного из нескольких независимых событий.

Пример 2. Найти вероятность хотя бы одного выигрыша, если куплено 10 билетов, а по условиям лотереи выигрывает каждый пятый билет.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Решение. Дано: $p = \frac{1}{5} = 0{,}2$. Искомая вероятность равна $1 - q^{10}$, где $q = 1 - p = 0{,}8$, т.е. около 0,893.

Задачи

5.1. Найти вероятность того, что не выпадет ни орла, ни пятерки при одновременном бросании монеты и игральной кости.

5.2. Стрелок попадает при каждом выстреле в «десятку» с вероятностью 0,3, в «девятку» с вероятностью 0,6. Какова для него вероятность выбить двумя выстрелами не менее 19 очков?

5.3. Два стрелка одновременно стреляют по мишени. Вероятности попадания равны 0,7 и 0,4. Найти вероятности:

а) отсутствия попаданий;

б) одного попадания;

в) двух попаданий;

г) хотя бы одного попадания.

5.4. База обслуживает три магазина. Вероятность того, что за день поступит заявка, равна для каждого из магазинов 0,7; 0,4; 0,8. Найти вероятность того, что поступит ровно 1 заявка; хотя бы одна заявка.

5.5. Стрелок попадает в цель с вероятностью 0,3. Стрельба ведется до первого попадания. Найти вероятность того, что он сделает:

а) три выстрела;

б) не менее трех выстрелов.

5.6. Первая урна содержит 3 белых и 5 красных шаров, вторая — 6 белых и 4 красных. Из каждой урны извлекли по одному шару. Найти вероятности того, что они одного цвета; того, что хотя бы один белый.

5.7. Найти вероятность хотя бы одного попадания при четырех выстрелах, если известно, что удачным бывает в среднем один выстрел из трех.

5.8. Электрическая цепь состоит из двух приборов, соединенных последовательно. Приборы являются исправными с вероятностями 0,8 и 0,9. Найти вероятность того, что в цепи есть ток.

5.9. Электрическая цепь состоит из трех приборов, соединенных параллельно. Приборы являются исправными с вероятностями 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятность того, что в цепи есть ток.

5.10. Желая выехать в Барнаул, Сидоров звонит сначала в железнодорожную кассу, а затем в кассу автовокзала. По опыту он знает, что билеты есть соответственно с вероятностью 0,4 и 0,7. Какова вероятность, что

а) он уедет;

б) он уедет на автобусе?

5.11. В «Тетрисе» 7 фигур. Считая их появление равновероятным и независимым, найти вероятность того, что из 100 последовательных фигур ни одна не появится дважды подряд; трижды подряд.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

5.12. Для студента А вероятности «5», «4», «3» на экзамене составляют 0,3; 0,5; 0,2. Для студента Б — то же, но на балл ниже. Вычислить вероятности того, что:

а) они получат одинаковые оценки;

б) Б сдаст не хуже, чем А;

в) оба сдадут не хуже, чем на «4».

6. Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть вероятность события A зависит от неизвестных факторов, формулируемых в виде *гипотез* $H_1, H_2,...,H_k$. Гипотезы должны составлять *полную группу* событий, т.е. они:

1) попарно несовместны;

2) исчерпывают все возможности.

Иными словами, в результате испытания должно произойти одно и только одно из событий, составляющих полную группу. *Сумма вероятностей событий, составляющих полную группу, равна* 1, так как эта сумма является *достоверным* событием D.

Для любого события A выполняется формула **разложения по полной группе**:

$$P(A) = P(AD) = P\big(A(H_1 + H_2 + ... + H_k)\big) = P(AH_1) + P(AH_2) + ... + P(AH_k)$$

(события AH_i несовместны, т.к. несовместны события H_i). Применив еще формулу умножения вероятностей, получим **формулу полной вероятности** (ФПВ):

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + ... + P(H_k)P_{H_k}(A) = \sum_{i=1}^{k} P(H_i)P_{H_i}(A).$$

Если известно, что событие A произошло, то вероятность любой из гипотез вычисляется по **формуле Бейеса**:

$$P_A(H_j) = \frac{P(H_j A)}{P(A)} = \frac{P(H_j)P_{H_j}(A)}{\sum_{i=1}^{k} P(H_i)P_{H_i}(A)}$$

(то есть отношение соответствующего слагаемого ФПВ ко всей сумме). Эти вероятности называют *апостериорными* в отличие от *априорных* вероятностей $P(H_j)$.

Пример 1. Первый автомат дает 50% всей продукции, второй — 30%, третий — остальное. Брак составляет соответственно 10%, 2% и 5%.

1) Найти процент брака во всей продукции.

2) Изделие, случайно выбранное для проверки, оказалось бракованным. Найти вероятность того, что оно изготовлено вторым автоматом.

Решение. 1) Требуется найти вероятность события A: «случайно выбранное готовое изделие является бракованным». Формулируем гипотезы:

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

H_1 — изделие изготовлено 1-м автоматом. По условию, $P(H_1) = 0{,}5$;

H_2 — изделие изготовлено 2-м автоматом. По условию, $P(H_2) = 0{,}3$;

H_3 — изделие изготовлено 3-м автоматом. По условию, $P(H_3) = 0{,}2$.

Данные проценты брака являются *условными* вероятностями:

$P_{H_1}(A) = 0{,}1$; $P_{H_2}(A) = 0{,}02$; $P_{H_3}(A) = 0{,}05$.

Применим формулу полной вероятности:

$P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}1 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}05 = 0{,}066$ (т.е. 6,6% брака во всей продукции).

2) Согласно формуле Бейеса, делим *второе* слагаемое составленной нами суммы на всю сумму: $P_A(H_2) = \dfrac{0{,}006}{0{,}066} \approx 0{,}091$.

Задачи

6.1. 10 человек расставили в ряд случайным образом. Какова вероятность, что Иванов и Петров оказались рядом? (У к а з а н и е. Рассмотрите 2 гипотезы: H_1 : «Иванов на конце ряда», H_2 : «Иванов не на конце ряда».)

6.2. В турнире участвуют четыре теннисиста. Вероятности для участника А выиграть у Б, В, и Г равны соответственно 0,9; 0,6; 0,2. Какова вероятность для него выиграть в первом туре, если его соперник определяется случайно с помощью жеребьевки?

6.3. Из всех новорожденных доживают до 40 лет 75% мальчиков и 85% девочек. Какая часть всех новорожденных доживет до 40 лет, если вероятность рождения мальчика равна 0,52?

6.4. Через станцию проходит вдвое больше товарных поездов, чем пассажирских, при этом останавливается каждый второй пассажирский и каждый пятый товарный. Какой процент всех поездов следует без остановки? Найти процент пассажирских поездов среди остановившихся.

6.5. В каждой из 8 коробок — по 100 лотерейных билетов. В трех коробках имеется по 20, в четырех — по 10, в одной нет выигрышных билетов. Найти вероятность того, что билет, вынутый из случайно выбранной коробки — выигрышный.

6.6. Из урны, содержащей 3 белых и 7 черных шаров, извлекли последовательно (без возврата) 2 шара. Какова вероятность, что второй из них — белый? Сделайте вывод.

6.7. В трех урнах содержатся: 4 белых и 1 черный шар; 3 белых и 2 черных; 2 белых и 3 черных. Какова вероятность извлечь два белых шара одновременно из урны, выбранной наугад? То же для двух шаров разного цвета.

6.8. В первой урне было 2 белых шара и один черный, во второй — 1 белый и три черных шара. Из первой урны извлекли один шар и, не глядя на него, переложили во вторую. Какова после этого вероятность извлечь из второй урны

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

белый шар? Если это произошло, то какова вероятность того, что переложили черный шар?

6.9. Первый контролер проверяет 60% всех изделий, но бракует ошибочно годную деталь с вероятностью 6%; для второго эта вероятность равна 2%. При повторной проверке в браке обнаружена годная деталь. Какова вероятность того, что ее проверял второй контролер?

6.10. Студент А знает все 20 вопросов, Б — только 15, В — 10 вопросов. Случайно выбранный студент ответил на три случайно выбранных вопроса. Найти вероятность того, что был выбран В.

7. Формула Бернулли

Повторные независимые испытания. Пусть произведено n одинаковых испытаний в одинаковых условиях, причем результат каждого испытания не влияет на остальные. Некоторое событие A («*успех*») происходит в каждом испытании с постоянной вероятностью p и не происходит (т.е. происходит «*неуспех*» $\overline{A}$) с вероятностью $q = 1 - p$. Тогда вероятность получить *ровно* k успехов в n испытаниях вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,..n.$$

Пример 1. Вычислить значения $P(k)$ для всех возможных значений k, если проведено 5 испытаний при вероятности успеха в каждом из них $\frac{1}{3}$.

Решение. Исходные данные: $n = 5$, $p = \frac{1}{3}$. Вычисляем по формуле Бернулли: $P_5(0) = C_5^0\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$;

$$P_5(1) = C_5^1\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{80}{243};$$

$$P_5(2) = C_5^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{80}{243};$$

$$P_5(3) = C_5^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243};$$

$$P_5(4) = C_5^4\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{10}{243};$$

$$P_5(5) = C_5^5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{243}.$$

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Обратите внимание на то, что сумма всех вероятностей равна 1. Действительно, события «число успехов равно k» при всех возможных k составляют полную группу.

Пример 2. Теннисист А выигрывает в каждой партии с Б с вероятностью $\frac{1}{3}$. Найти вероятность его победы в матче из 5 партий.

Решение. Исходные данные те же, что в примере 1. Необходимо, чтобы число успехов (партий, выигранных теннисистом А) было не менее, чем 3. Достаточно сложить соответствующие вероятности:

$P(k \ge 3) = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{17}{81}$. Заметим, что эта вероятность существенно меньше исходного значения $\frac{1}{3}$, т.е. увеличение числа партий уменьшает шансы слабейшего игрока.

Пример 3. За два попадания при шести выстрелах на игральном автомате выдается приз. Найти вероятность выиграть приз, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,1.

Решение. Искомую вероятность $P(k \ge 2)$ можно вычислить, сложив, как в предыдущей задаче, 5 значений. Однако проще перейти к противоположному событию:

$$P(k \ge 2) = 1 - P(k \le 1) = 1 - P_6(0) - P_6(1) = 1 - 0{,}9^6 - 6 \cdot 0{,}9^5 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}114.$$

Наиболее вероятное число успехов есть целое число, попадающее в отрезок $[np - q;\ np + p]$. В примере 3 этот отрезок есть $[-0{,}3;\ 0{,}7]$, так что вероятнее всего не иметь ни одного попадания. В примере 1 получаем отрезок $[2;\ 3]$; действительно, наибольшие вероятности $P_5(2)$ и $P_5(3)$ равны.

Задачи

7.1. Что вероятнее: хотя бы 4 орла при шести бросаниях монеты или ровно 1 орел при трех?

7.2. Вероятность выигрыша для шахматиста А в партии с Б равна 1/3. Что вероятнее для А: выиграть 1 партию из 4-х или 2 из 5?

7.3. Из урны, содержащей 1 белый и 2 черных шара, извлекли (с возвратом) 4 раза по одному шару. Найти вероятность того, что белый шар попался 1 раз; 2 раза.

7.4. На отрезок, разделенный на три равные части, бросили 5 точек. Найти вероятность того, что ровно две точки попали на среднюю треть.

7.5. При пяти бросаниях игральной кости найти вероятности: ровно двух шестерок; хотя бы двух шестерок.

7.6. Вероятность рождения мальчика равна 0,52. В семье четверо детей. Найти вероятности того, что в ней:

а) двое мальчиков;

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

б) хотя бы двое мальчиков.

7.7. Для зачета на автоматическом тренажере надо правильно ответить на 3 вопроса из 5 при трех вариантах ответа на каждый вопрос. Какова вероятность получить зачет, выбирая ответы наугад?

7.8. Сборщику надо отобрать 2 годные детали из 5 имеющихся. Какова вероятность того, что это ему удастся, если каждая деталь независимо от остальных является годной с вероятностью 0,4?

7.9. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Какова вероятность не менее чем трех попаданий при четырех выстрелах?

7.10. Биатлонисту необходимо разбить 5 мишеней. Какова вероятность того, что для этого хватит 6 патронов, если вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,2? Что потребуется ровно 7 патронов?

8. Задачи для повторения

8.1. Какова вероятность ровно двух попаданий, если сделано по одному выстрелу из трех орудий с вероятностями попаданий 0,8; 0,7; 0,5?

8.2. В турнире участвуют 8 команд равной силы. Найти вероятность не менее чем 5 побед для любой из команд.

8.3. Из урны, содержащей 5 шаров с цифрами 1,2,3,4,5, извлекли одновременно два шара. Найти вероятность того, что сумма цифр на них: а) не менее 4; б) делится на 3.

8.4. Вероятность поломки автобуса равна 0,1. Найти вероятность того, что исправны по меньшей мере 5 автобусов из 6 имеющихся.

8.5. Поезд состоит из 7 купейных, 5 плацкартных и 3 общих вагонов, составленных в случайном порядке. Найти вероятность того, что первый и последний вагоны — разного типа.

8.6. В экзаменационном билете два вопроса (по одному на каждый из двух разделов курса). Студент выучил 15 вопросов из 20 по первому разделу и 12 из 20 по второму. Найти вероятности того, что он: а) ответит на оба вопроса; б) ответит только на один вопрос.

8.7. Какова вероятность, что на случайно извлеченной фишке лото имеется цифра 9 (набор фишек от 1 до 90)?

8.8. В книжной лотерее выигрывает каждый четвертый билет, в лотерее «Спринт» — каждый десятый. Какова вероятность хотя бы одного выигрыша, если куплено по два билета каждой из этих лотерей?

8.9. По окончании сессии в группе из 25 человек был 1 отличник и 6 задолжников. По жребию выбрали троих. Найти вероятность того, что среди них нет ни отличников, ни задолжников.

8.10. Найти вероятность того, что среди 5 карт, извлеченных из колоды в 36 карт, есть ровно три карты пиковой масти.

8.11. В баскетболе вероятность попадания в кольцо при броске с игры равна 0,4, при штрафном броске — 0,8. Какой процент всех бросков достигает це-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

ли, если треть всех бросков производится со штрафного?

8.12. Автоматическое устройство оборудовано на случай аварии звуковым и световым сигнализаторами, срабатывающими независимо друг от друга с вероятностями соответственно 0,8 и 0,9. Какова вероятность, что при аварии: а) сработают оба сигнализатора; б) сработает только один из них.

8.13. Какова вероятность трех дождливых дней в неделю, если каждый день независимо от остальных является дождливым с вероятностью 0,4?

8.14. Игрок получает 5 карт из колоды в 36 карт. Найти вероятность того, что у него нет тузов.

8.15. Шахматную доску разрезали на 64 квадратика, их перемешали и выбрали три квадратика. Найти вероятность того, что среди них нет белых квадратиков.

8.16. Нужная формула имеется в каждом из трех справочников с вероятностями 0,2; 0,4; 0,7. Какова вероятность найти формулу в первом попавшемся справочнике?

Часть II. Случайные величины

Введение

Случайной называется величина, значение которой определяется в результате испытания, а до испытания неизвестно.

Примеры. 1. Если под испытанием понимать бросание игральной кости, то случайной величиной является число очков, выпавших на ней. При бросании двух костей одновременно можно рассмотреть различные случайные величины: сумму или разность очков, большую из этих двух величин и т.п.

2. Монета брошена 5 раз. Случайной величиной является число выпавших «орлов».

3. Возраст случайно выбранного человека (в целых годах).

4. Количество дорожно-транспортных происшествий, зарегистрированных ГИБДД города за сутки.

5. Результат, показанный спортсменом на стометровке (измеряется обычно с точностью до 0,01 сек.).

6. Глубина океана в заданной точке, измеренная эхолотом.

Легко заметить, что случайные величины делятся на два класса.

Дискретной (примеры 1-4) называется случайная величина, которая может принимать только отдельные изолированные (как правило, целочисленные) значения, список которых известен заранее. Например, число очков на выброшенной кости может быть только из списка: 1,2,3,4,5,6.

Непрерывной (примеры 5,6) называется величина, которая может при-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

нять любое действительное значение из некоторого интервала. К этому классу относятся любые результаты измерений (результат спортсмена можно в принципе измерить с любой точностью).

1. Дискретные случайные величины

Дискретная случайная величина (ДСВ) полностью характеризуется списком своих возможных значений и соответствующих им вероятностей. Эти данные удобно записывать в виде таблицы, называемой **рядом распределения**:

X	x_1	x_2	…	x_i	…
P	p_1	p_2	…	p_i	…

Здесь X — обозначение случайной величины, x_i — все ее возможные значения (обычно в порядке возрастания), p_i — вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, равное x_i (как всегда, вероятность вычисляется до испытания!):

$$p_i = P(X = x_i).$$

Так как события $(X = x_i)$ составляют полную группу (в результате испытания случайная величина обязательно примет какое-то значение, причем только одно), то

$$\sum_i p_i = 1.$$

Примечание. Ряд распределения может быть и бесконечным; в этом случае последнюю сумму надо понимать как сумму числового ряда.

Многоугольником распределения называется ломаная, соединяющая последовательно точки $(x_i; p_i)$, построенные в прямоугольной системе координат.

Примеры. 1. Для случайной величины X — числа очков, выпавших на кости, ряд распределения имеет вид:

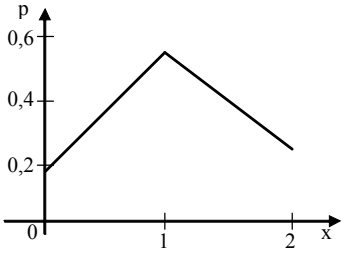
X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Рассмотрим случайную величину X, равную числу попаданий в мишень в условиях задачи 5.3 ч.I. Из решения задачи вытекает, что эта величина имеет следующий ряд распределения:

X	0	1	2
P	0,18	0,54	0,28

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Построим многоугольник распределения:



Задачи

В задачах 1.1—1.9 требуется составить ряд распределения и построить многоугольник распределения данной случайной величины.

1.1. Монету бросают до появления первого «орла», но не более четырех раз. Случайная величина X есть число бросаний.

1.2. Из урны, содержащей m белых и n черных шаров, извлекают одновременно k шаров. Случайная величина X есть число белых шаров среди извлеченных.

а) $m = 5, n = 3, k = 2$;

б) $m = 5, n = 2, k = 3$;

в) $m = 4, n = 6, k = 3$.

1.3. Два орудия поочередно стреляют по цели. Вероятность поражения цели одним выстрелом для первого орудия равна 0,4, для второго — 0,7. Стрельба ведется до поражения цели, но не более чем по два выстрела на каждое орудие. Случайная величина X есть число выстрелов.

1.4. База обслуживает три магазина. Вероятность того, что за день поступит заявка, равна для каждого из магазинов 0,7; 0,4; 0,6. Случайная величина X есть число поступивших заявок.

1.5. Случайная величина X есть число успехов в пяти испытаниях при вероятности успеха в каждом $p = \frac{1}{3}$ (см. пример 1 гл.7 части I).

1.6. Случайная величина X есть число «орлов» при десяти бросаниях монеты.

1.7. Случайная величина X есть сумма очков на двух одновременно брошенных костях.

1.8. Случайная величина X есть абсолютная величина разности чисел очков на двух одновременно брошенных костях.

1.9. Случайная величина X есть большее из двух чисел, выпавших на двух одновременно брошенных костях.

2. Числовые характеристики дискретной

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

случайной величины

Математическое ожидание (также называемое средним значением) дискретной случайной величины, заданной рядом распределения, вычисляется по формуле

$$M(X) = \sum_i x_i p_i \ .$$

Эту величину, согласно закону больших чисел, можно трактовать как предел, к которому стремится среднее значение случайной величины за большое количество независимых испытаний в неизменных условиях.

Пример 1. Для случайной величины, рассмотренной в примере 1 предыдущей главы, математическое ожидание равно 3,5. К этой величине приближается среднее число очков за большое число бросаний симметричной игральной кости.

Перечислим основные *свойства* математического ожидания.

1. $M(C) = C$ (математическое ожидание постоянной величины равно ей самой).

2. Если случайная величина X не является константой, т.е. наименьшее и наибольшее ее возможные значения $x_{\min}$ и $x_{\max}$ не совпадают, то $x_{\min} < M(X) < x_{\max}$.

3. $M(CX) = CM(X)$ (постоянный множитель выносится за знак математического ожидания).

4. $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$.

5. $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$ *только для независимых* величин X, Y.

Дисперсией случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения от среднего значения:

$$D(X) = M\big(X - M(X)\big)^2 = \sum_i \big(x_i - M(X)\big)^2 p_i$$

(так вычисляется дисперсия по *первому* способу).

Основные *свойства* дисперсии:

1. $D(C) = 0$.

2. Если случайная величина X не является константой, то $D(X) > 0$.

На основании свойств 1,2 можно определить величину

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)},$$

называемую *средним квадратическим отклонением* величины X .

3. $D(CX) = C^2 D(X)$ (отсюда $D(-X) = D(X)$, $\sigma(CX) = |C|\sigma(X)$).

4. $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$ *только для независимых* величин X, Y.

5. $D(X) = M\big(X^2\big) - \big(M(X)\big)^2$ (дисперсия равна разности среднего от квадрата и квадрата среднего). Отсюда вытекает формула для *второго* способа

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

вычисления дисперсии:

$$D(X) = \sum_i x_i^2 p_i - \left(M(X)\right)^2 .$$

Пример 2. Вычислим числовые характеристики для величины, ряд распределения которой приведен в примере 2 предыдущей главы.

X	0	1	2
P	0,18	0,54	0,28
$X-M(X)$	-1,1	-0,1	0,9
$(X-M(X))^2$	1,21	0,01	0,81
X^2	0	1	4

$M(X) = 0 \cdot 0{,}18 + 1 \cdot 0{,}54 + 2 \cdot 0{,}28 = 1{,}1;$

Дисперсию вычислим двумя способами:

$D(X) = 1{,}21 \cdot 0{,}18 + 0{,}01 \cdot 0{,}54 + 0{,}81 \cdot 0{,}28 = 0{,}45;$

$D(X) = 0 \cdot 0{,}18 + 1 \cdot 0{,}54 + 4 \cdot 0{,}28 - 1{,}1^2 = 0{,}45;$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}45} \approx 0{,}671.$

Задачи

2.1. Вычислить числовые характеристики случайных величин, заданных в задачах 1.1—1.9 предыдущей главы.

2.2. Найти математическое ожидание и дисперсию (двумя способами) дискретной случайной величины, заданной следующим рядом распределения:

X	-3	-1	1
P	0,4	0,5	0,1

Для случайных величин, заданных следующими рядами распределения (2.3 – 2.6):

а) найти неизвестные величины a, A;

б) вычислить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

2.3.

X	1	2	3	4
P	a	$3a$	0,05	0,15

2.4.

X	0	2	5	10
P	$2a$	0,3	$3a$	$0{,}1+a$

2.5.

X	1	4	7	A
P	0,5	a	0,1	a

(дополнительно дано, что $M(X) = 4$).

2.6.

X	1	2	3	4
P	0,2	$0{,}1-a$	0,4	$0{,}1+2a$

(почему такой ряд распределения не может существовать?).

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

3. Некоторые виды дискретных случайных величин

1. Биномиальным распределением (или распределением Бернулли) называется распределение случайной величины X, равной числу успехов в n независимых испытаниях при вероятности успеха в каждом из них, равной p. Эта величина принимает значения от 0 до n, причем соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли (см. гл. 7 части I). Примеры приведены в задачах 1.5, 1.6.

Числовые характеристики биномиальной случайной величины равны:

$$M(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}\ .$$

2. Гипергеометрическим называется распределение случайной величины X, равной числу белых шаров среди k одновременно извлеченных из урны шаров, если в ней содержались m белых и n черных шаров (величины m, n, k заданы). Примеры приведены в задаче 1.2. Очевидно, что возможные значения этой величины (обозначим их буквой i) ограничены условиями $0 \le i \le m$, $0 \le k - i \le n$. Например, в задаче 1.2б) $i = 1,2,3$ (по условиям задачи хотя бы один белый шар среди извлеченных будет обязательно). Соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$p_i = P(X = i) = \frac{C_m^i C_n^{k-i}}{C_{m+n}^k}.$$

Математическое ожидание величины, распределенной по этому закону, равно $\dfrac{mk}{m+n}$.

Рассмотрим также два примера величин, имеющих теоретически бесконечный ряд распределения.

3. Геометрическим называется распределение случайной величины X, равной числу независимых испытаний до достижения первого успеха при заданной вероятности p успеха в каждом испытании. Возможные значения этой величины $k = 1,2,3,\ldots$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$p_k = P(X = k) = pq^{k-1}$$

(как всегда, $q = 1 - p$). Числовые характеристики: $M(X) = \dfrac{1}{p}$ (т.е. **среднее** число попыток до первой удачной обратно пропорционально вероятности успеха в каждой из них), $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$, $\sigma(X) = \dfrac{\sqrt{q}}{p}$.

4. Распределению **Пуассона** подчиняется случайная величина X, равная числу однотипных независимых случайных событий, произошедших за единицу

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

времени (последовательность таких событий обычно называют *простейшим* или *пуассоновским* потоком событий). Примеры: количество новых комет, зарегистрированных астрономами за год; количество покупателей в булочной за 10 минут; количество входящих звонков на станции сотовой связи за секунду. Поток событий характеризуется его *плотностью* λ, которую можно понимать как *среднее* количество событий в единицу времени. Возможные значения случайной величины X $k = 0,1,2,3,\ldots$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле

$$p_k = P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

(в частности, $p_0 = e^{-\lambda}$ — вероятность *отсутствия* событий за любую единицу времени).

Числовые характеристики: $M(X) = D(X) = \lambda$, $\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$.

Распределение Пуассона применяют также как **закон редких событий**. Если в испытаниях Бернулли n велико, а p мало, так что $\lambda = np \le 5$, то применима приближенная формула $P_n(k) \approx p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

Пример. Вероятность крупного выигрыша на каждый лотерейный билет равна 0,005. Найти вероятность хотя бы двух крупных выигрышей на 100 билетов.

Решение. Очевидно, требуемая вероятность $P(k \ge 2)$ равна $1 - P_{100}(0) - P_{100}(1)$. Вычисление облегчается, если применить распределение Пуассона при $\lambda = np = 100 \cdot 0{,}005 = 0{,}5$. Тогда $P_{100}(0) \approx e^{-\lambda} = 0{,}6065$, $P_{100}(1) \approx e^{-\lambda}\frac{\lambda}{1!} = 0{,}3033$.

Ответ. $P(k \ge 2) \approx 0{,}0102$.

Задачи

3.1. Составить ряд распределения, построить многоугольник распределения для случайной величины X, распределенной геометрически:
а) при $p = 0{,}8$;
б) при $p = \frac{1}{3}$.
При вычислениях ограничиться вероятностями, превосходящими 0,001. Вычислить математическое ожидание и дисперсию по ряду распределения и сравнить с теоретическими значениями.

3.2. При повторной проверке бракованных изделий 5% из них оказываются годными. Сколько в среднем надо проверить изделий, чтобы найти одно годное? Найти дисперсию случайной величины – числа проверенных изделий.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

3.3. Требуется собрать все 20 различных вкладышей в жвачки «Love is…». Сколько (в среднем) жвачек придется для этого купить (все вкладыши встречаются с равной вероятностью)?

3.4. Составить ряд распределения, построить многоугольник распределения для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона:

а) при $\lambda = 2$;

б) при $\lambda = 0{,}2$.

При вычислениях ограничиться вероятностями, превосходящими 0,001. Вычислить математическое ожидание и дисперсию по ряду распределения и сравнить с теоретическими значениями.

3.5. Булочная обслуживает в среднем 90 покупателей в час. Найти вероятности того, что за 1 минуту:

а) не будет ни одного покупателя;

б) будет не менее трех покупателей.

3.6. Вероятность того, что на странице учебника есть опечатка, равна 0,01. Найти вероятности того, что в учебнике, содержащем 300 страниц:

а) нет опечаток;

б) одна опечатка;

в) не менее трех опечаток.

4. Интегральная функция распределения

Для данной случайной величины X и любого действительного числа x определим **интегральную функцию распределения** (ИФР) этой случайной величины как вероятность того, что она примет значение меньшее, чем x:

$$F_X(x) = P(X < x)$$

(индекс X опускаем, если очевидно, о какой случайной величине идет речь).

Перечислим основные *свойства* ИФР.

1. ИФР определена на всей оси и принимает значения в пределах отрезка $[0;1]$: $0 \le F(x) \le 1$.

2. ИФР на всей оси не убывает,

причем

3. Для любого промежутка $[x_1; x_2]$ приращение на нем ИФР есть вероятность попадания случайной величины X в этот промежуток:

$$P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = F(x)\Big|_{x_1}^{x_2}.$$

4. Значения 0 и 1 являются предельными значениями ИФР:

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1,$$

причем

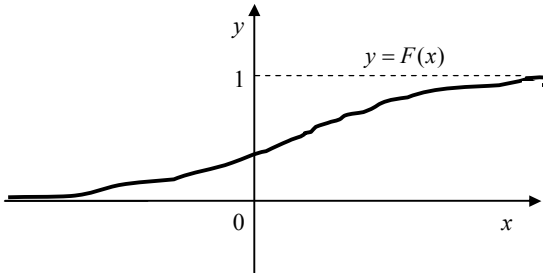
Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

$4'$. Если случайная величина X ограничена снизу: $X \ge a$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$; если случайная величина X ограничена сверху: $X \le b$, то $F(x) = 1$ при $x > b$.

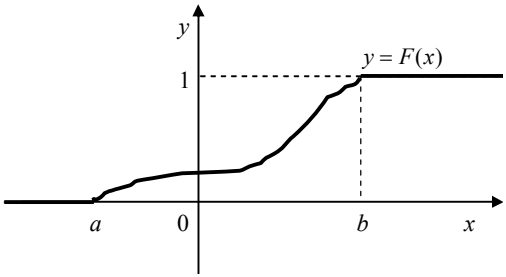
Из свойства 4 следует, что свойство 3 распространяется и на бесконечные интервалы. Например,

$$P(X \ge x_1) = P(x_1 \le X < +\infty) = 1 - P(X < x_1) = F(+\infty) - F(x_1).$$

Таким образом, в общем случае график ИФР имеет примерный вид:



а для величины, ограниченной сверху и снизу ($a \le X \le b$) — вид:



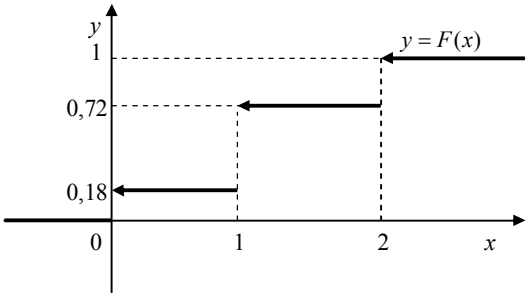
5. Если X — дискретная случайная величина, заданная рядом распределения, то ее ИФР возрастает скачками на величину p_i в каждой точке x_i, причем в точках разрыва функция непрерывна слева.

Пример 1. Для величины X, ряд распределения которой дан в примере 2 гл.1, ИФР аналитически задается как

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0{,}18, & 0 < x \le 1, \\ 0{,}72, & 1 < x \le 2, \\ 1, & 2 < x \end{cases}$$

и имеет ступенчатый график:

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or



Если же X — непрерывная случайная величина, то ее ИФР возрастает от 0 до 1 без скачков.

Пример 2. Пусть M — случайная точка в круге радиуса R, а случайная величина X есть $|OM|$, т.е. ее расстояние от центра. Учитывая ограниченность случайной величины: $0 \le X \le R$ и предполагая, что вероятность попадания точки M в любую часть круга пропорциональна площади этой части (закон равномерного распределения случайной точки), получим:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \left(\dfrac{x}{R}\right)^2, & 0 < x \le R, \\ 1, & R < x. \end{cases}$$

Постройте график этой функции и убедитесь, что функция непрерывна.

Задачи

4.1. Построить графики и задать аналитически интегральные функции распределения дискретных случайных величин, рассматриваемых в задачах к главам 1 и 2.

4.2. Для случайной величины X, рассмотренной в примере 2, вычислить $P\left(\dfrac{R}{3} < X < \dfrac{2R}{3}\right)$, $P\left(X > \dfrac{R}{2}\right)$ и указать эти вероятности на графике.

4.3. Пусть M — случайная точка в квадрате, ограниченном линиями $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, а случайная величина X — сумма координат этой точки. Составить для этой величины интегральную функцию, построить ее график. Найти $P(0{,}5 < X < 1{,}5)$ и указать эту вероятность на графике.

4.4. Доказать следующие свойства интегральной функции:

а) $F_{aX}(x) = F_X\left(\dfrac{x}{a}\right)$ при $a > 0$;

б) $F_{X+b}(x) = F_X(x - b)$.

в) Вывести аналогичную формулу для $F_{aX+b}(x)$. Рассмотреть также случай $a < 0$.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

5. Дифференциальная функция распределения. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Дифференциальной функцией распределения (ДФР) случайной величины X называется производная от ее интегральной функции:

$$f_X(x) = F_X'(x).$$

Эта функция определяется *только* для непрерывных случайных величин, т.к. разрывная функция не имеет производной.

Пример. Если X — величина из примера 2 предыдущей главы, то ее ДФР есть

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \dfrac{2x}{R^2}, & 0 < x < R, \\ 0, & R < x. \end{cases}$$

Заметим, что в точке $x = R$ эта функция не определена и терпит разрыв (полный график постройте самостоятельно). Как будет ясно из дальнейшего, значение ДФР в таких точках не имеет значения.

Перечислим основные *свойства* ДФР.

1. ДФР неотрицательна на всей оси: $f(x) \geq 0$.

2. Для любого промежутка $[x_1; x_2]$ вероятность попадания случайной величины X в этот промежуток равна площади под графиком ДФР на этом промежутке:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

(сравните со свойством 3 из предыдущей главы, учитывая известную из курса математического анализа формулу Ньютона-Лейбница). Таким образом, ДФР выражает вероятность, приходящуюся на единицу длины оси OX, т.е. *плотность* вероятности.

Свойство 2 также распространяется на бесконечные интервалы, например,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(-\infty) = 1.$$

Сформулируем это как свойство

3. Полная площадь под графиком ДФР равна 1.

Зная ДФР, можно найти ИФР по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt,$$

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

а также вычислить числовые характеристики непрерывной случайной величины:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx,$$

$$D(X)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx-\left(M(X)\right)^2.$$

Примечание. В случае ограниченных случайных величин (см. предыдущую главу) во всех случаях можно заменить $\int_{-\infty}^{+\infty}$ на $\int_{a}^{b}$.

Задачи

5.1. Для случайной величины X, рассмотренной в примере 2 главы 4, вычислить $P\left(\frac{R}{3}<X<\frac{2R}{3}\right)$, $P\left(X>\frac{R}{2}\right)$ и указать эти вероятности на графике дифференциальной функции.

5.2. В условиях задачи 4.3 записать ДФР аналитически, построить ее график и указать на нем ту же вероятность.

5.3. Случайная точка C равномерно распределена на отрезке AB длины l, а случайная величина S равна площади прямоугольника со сторонами AC и CB. Найти функции распределения величины S, ее математическое ожидание и дисперсию.

В задачах 5.4 – 5.9 дана ИФР (аналитически или графически). Требуется:

а) найти значения констант (если необходимо);

б) задать ИФР соответственно графически или аналитически;

в) найти ДФР (аналитически и графически);

г) вычислить $M(X), D(X)$;

д) найти указанные вероятности и указать их на графиках.

5.4. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ cx^3, & 0<x\le 1,\\ 1, & 1<x.\end{cases}$ Найти $P\left(X>\frac{2}{3}\right)$.

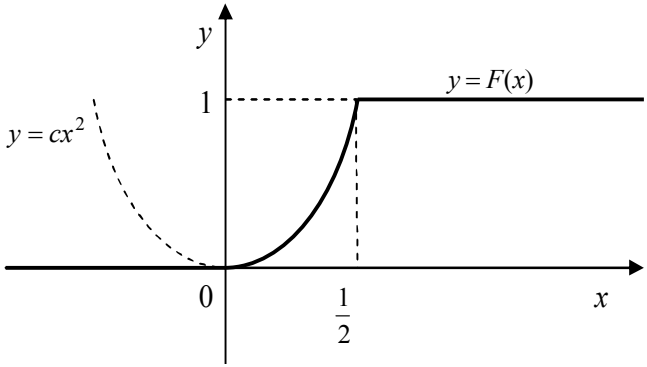
5.5. $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \sqrt{x}-1, & 1<x\le 4,\\ 1, & 4<x.\end{cases}$ Найти $P(2\le X<3)$.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

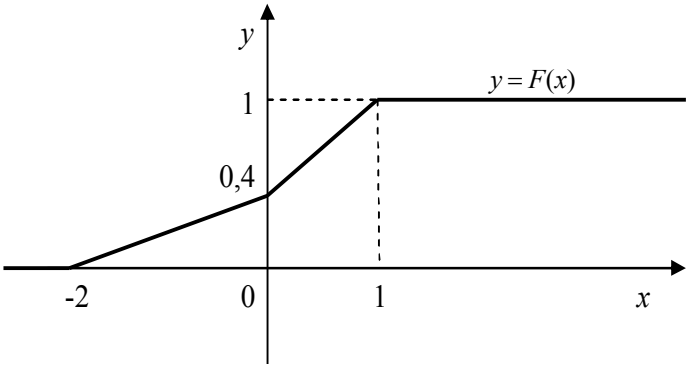
5.6. $F(x)=\begin{cases} 0, & x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x, & -\dfrac{\pi}{2}<x\le 0, \\ 1, & 0<x. \end{cases}$ Найти $P\left(X<-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

5.7. $F(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x\le 0, \\ 1, & 0<x. \end{cases}$ Найти $P\left(X>-\dfrac{1}{3}\right)$.

5.8.



5.9.



В задачах 5.10 – 5.12 дана ДФР (аналитически или графически). Требуется:
а) найти значения констант (если необходимо);
б) задать ДФР соответственно графически или аналитически;
в) найти ИФР (аналитически и графически);

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

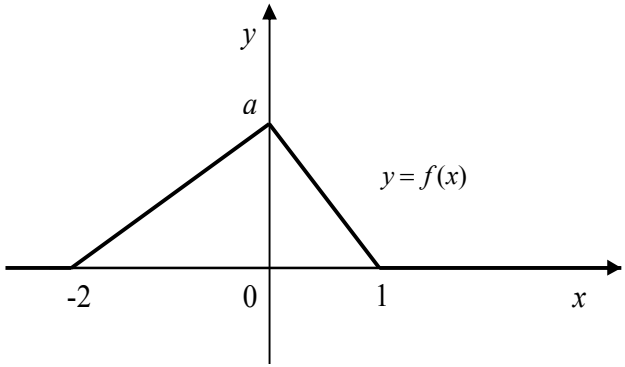
г) вычислить $M(X), D(X)$;

д) найти указанные вероятности и указать их на графиках.

5.10. $f(x)=\begin{cases} c(2+x), & |x|<1, \\ 0, & |x|>1. \end{cases}$ Найти $P(X>0)$.

5.11. $f(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ c(4-x^2), & 0<x<2, \\ 0, & 2<x. \end{cases}$ Найти $P(X<1)$.

5.12.



Найти $P(-1<X<0)$.

5.13. В условиях задачи 4.4 (а,б,в) вывести формулы для дифференциальной функции. Во всех случаях описать соответствующее преобразование графиков обеих функций.

6. Равномерное и показательное распределения

1. Случайная величина X имеет **равномерное** распределение на отрезке $[a;b]$ (обозначается $X \in R[a;b]$), если все ее значения принадлежат этому отрезку, а вероятность попадания в любой меньший интервал, целиком лежащий внутри $[a;b]$, пропорциональна длине этого интервала.

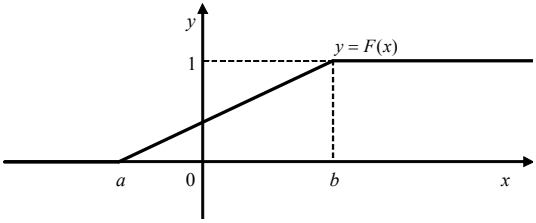
Примеры. 1. При случайном взгляде на секундную стрелку результат равномерно распределен на отрезке $[0;60]$.

2. При измерении длины с точностью до 1 см *абсолютная погрешность* равномерно распределена на отрезке $[-0{,}5\text{ см}; 0{,}5\text{ см}]$.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

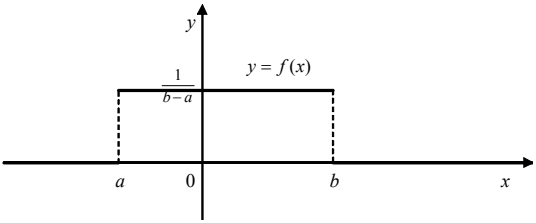
Интегральная функция равномерного распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & b<x,\end{cases}$$



а дифференциальная функция:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & b<x.\end{cases}$$



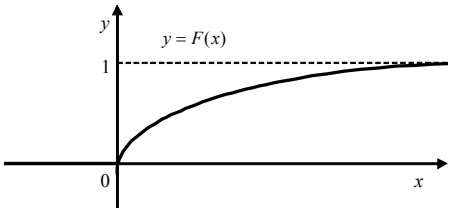
Числовые характеристики:

$$M(X)=\frac{a+b}{2},\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12},\quad \sigma(X)=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

2. Показательным распределением характеризуется случайная величина X, равная времени ожидания события из простейшего их потока (см. гл. 3).

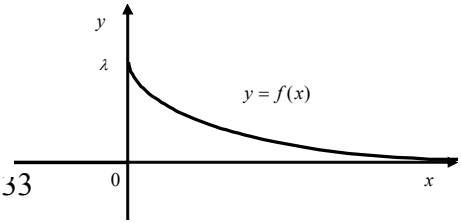
Интегральная функция показательного распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 1-e^{-\lambda x}, & 0<x,\end{cases}$$



а дифференциальная функция:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \lambda e^{-\lambda x}, & 0<x.\end{cases}$$



Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Числовые характеристики: $M(X)=\frac{1}{\lambda}$, $D(X)=\frac{1}{\lambda^2}$, $\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}$.

С показательным распределением связана так называемая **показательная функция надежности**. Пусть T – *среднее* время безотказной службы некоторого устройства. Тогда для любого значения времени $t>0$ вероятность $P(t)$ того, что устройство не откажет за время t, равна $1-F(t)=e^{-\lambda t}$, где величина $\lambda=1/T$ называется средней плотностью отказов. Согласно закону больших чисел, для большого количества устройств эту вероятность можно рассматривать как *приближенное* значение *доли* устройств, не вышедших из строя за время t.

Пример. Средний срок службы электролампочки – 800 часов. В световое табло ввинчено 1000 лампочек. Оценить количество лампочек, перегоревших за первые 100 часов работы.

Решение. Для каждой отдельной лампочки вероятность того, что она прослужит не менее 100 часов, равна $P(100)=e^{-100/800}=e^{-0,125}=0,882$. Таким образом, за 100 часов останутся неперегоревшими примерно 882 лампочки.

Ответ: примерно 118 лампочек.

Задачи

6.1. Пусть функция $F(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1 на отрезке $[a,b]$ (он может также быть бесконечным в одну или две стороны), а случайная величина $Y\in R[0;1]$. Доказать, что для случайной величины $X=F^{-1}(Y)$ функция $F(x)$ является интегральной функцией распределения.

Замечания. 1. Это правило с некоторыми поправками выполняется и для функций, возрастающих не монотонно или скачками.

2. Эта теорема дает способ моделирования любых случайных величин на основе датчика, дающего значения величины $Y\in R[0;1]$ (такой датчик присутствует, например, в программе Excel). Запишите, например, функцию $F^{-1}(y)$ для случая, если величина X должна иметь показательное распределение.

6.2. Какой процент однотипных устройств выдерживает:

а) средний срок службы;

б) удвоенный средний срок службы?

6.3. Устройство содержит 2 элемента, средние сроки службы которых равны 5 лет и 3 года. Найти вероятности того, что оно проработает без отказа 1 год; 2 года.

6.4. Согласно статистическим данным, средний срок жизни мужчин после достижения возраста в 70 лет составляет 7 лет. Какой процент 70-летних мужчин достигнет возраста 90 лет?

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

6.5. Средний вес метеорита, упавшего на Землю – 6 кг. Считая, что этот вес распределен по показательному закону, оценить максимально возможный процент метеоритов, имеющих вес не менее 20 кг.

7. Нормальное распределение

Нормальное распределение с параметрами a, σ $(a \in (-\infty; +\infty), \sigma > 0)$ задается дифференциальной функцией распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для случайной величины, имеющей такое распределение, будем использовать сокращенное обозначение $X \in N(a, \sigma)$.

В простейшем случае $(a = 0, \sigma = 1)$ эта функция имеет вид

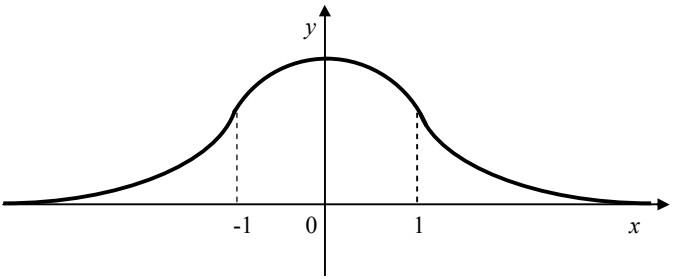
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и называется **дифференциальной функцией Лапласа**. Значения функции $\varphi(x)$ указаны, например, в таблице 1 учебника Гмурмана.

Перечислим основные *свойства* функции $\varphi(x)$.

1. Функция $\varphi(x)$ определена на всей оси: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Она четна: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.
3. Наибольшее значение достигается в точке $x = 0$ и равно $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}4$.
4. При $x = \pm 1$ график функции имеет точки перегиба.
5. $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$, т.е. ось OX является горизонтальной асимптотой графика.

Таким образом, общий вид графика функции $y = \varphi(x)$ (кривая Гаусса) таков:



В общем случае для построения графика и получения значений функции используем равенство

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi(t),\quad t=\frac{x-a}{\sigma}.$$

Числовые характеристики нормального распределения: $M(X)=a$, $D(X)=\sigma^2$.

Вероятность для нормально распределенной случайной величины принять значение в пределах заданного интервала вычисляется по формуле

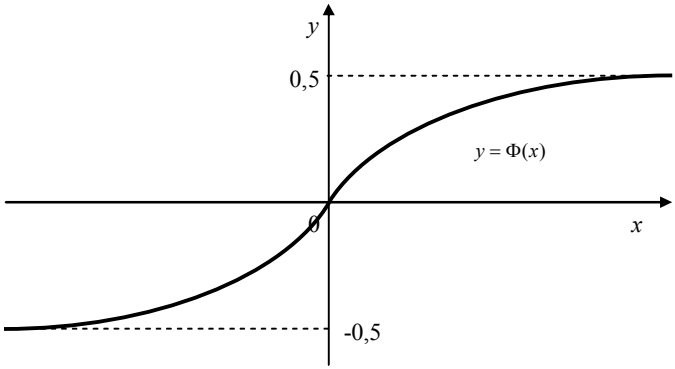
$$P(x_1<X<x_2)=\Phi(t_2)-\Phi(t_1),$$

где **интегральная функция Лапласа** — та из первообразных функции $\varphi(x)$, которая удовлетворяет условию $\Phi(0)=0$. Значения функции $\Phi(x)$ указаны, например, в таблице 2 учебника Гмурмана.

Перечислим основные *свойства* функции $\Phi(x)$.

1. Функция на всей оси определена и возрастает.
2. Функция нечетна: $\Phi(-x)=-\Phi(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\Phi(x)=0{,}5$. Как видно из таблицы, реально считается $\Phi(x)=0{,}5$ при $x\ge 5$.

Общий вид графика функции $y=\Phi(x)$ таков:



В случае симметричного (относительно центра a) интервала, задаваемого условием $a-\delta<X<a+\delta$ или $|X-a|<\delta$, получим формулу:

$$P(|X-a|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Например, для интервала $a-2\sigma<X<a+2\sigma$ $P(|X-a|<2\sigma)=2\Phi(2)=0{,}9544$ (95%-ный доверительный интервал), а для интервала $a-3\sigma<X<a+3\sigma$ $P(|X-a|<3\sigma)=2\Phi(3)=0{,}9973$ (интервал практической достоверности, или правило «трех сигм»).

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

Задачи

7.1. Даны параметры нормального распределения:
а) $a = \sigma = 0{,}5$;
б) $a = -1; \sigma = 2$.
Составить дифференциальную функцию, построить эскиз ее графика, вычислить следующие вероятности: $P(X \ge 0)$, $P(|X| < 2)$, указать их на графике.

7.2. Дана дифференциальная функция нормального распределения: $f(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} e^{-cx^2}$. Найти величину c, $P(|X| < 0{,}3)$ и указать эту величину на графике.

7.3. Дана дифференциальная функция нормального распределения: $f(x) = ce^{-\frac{(x+2)^2}{10}}$. Найти величину c, $P(X > 0)$ и указать эту величину на графике. Построить график ИФР, используя формулу $F(x) = 0{,}5 + \Phi(t)$.

7.4. Известно, что $X \in N(0, \sigma)$ и что $P(|X| < 1) = 0{,}5$. Найти $P(|X| < 2)$.

7.5. Диаметр стального шарика — нормально распределенная величина с математическим ожиданием 7 мм и дисперсией 0,01. Шарик считается стандартным при диаметре от 6,8 до 7,14 мм. Какой процент шариков отбраковывается?

7.6. Случайная величина X распределена нормально при $a = 1$. Найти параметр σ и построить график ДФР, если известно, что $P(0 < X < 2) = 0{,}38$.

8. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел

Если X — любая случайная величина, принимающая только неотрицательные значения, $A > M(X)$, то выполняется **неравенство Маркова**:

$$P(X \ge A) \le \frac{M(X)}{A}.$$

Пример 1. Для величины X, распределенной по закону Пуассона при данном значении параметра λ, получим, например, $P(X \ge 3\lambda) \le \frac{1}{3}$ (вероятность того, что число событий в единицу времени превысит среднее их число втрое, не более $\frac{1}{3}$). На самом деле эта вероятность значительно меньше, т.к. неравенство Маркова в силу своей универсальности дает наиболее слабую оценку веро-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

ятности.

Следствием неравенства Маркова является следующее утверждение.

Для любой случайной величины X, имеющей конечную дисперсию $D(X)$, и любого числа $\delta > \sigma(X)$ выполняется **неравенство Чебышева**:

$$P\left(\left|X - M(X)\right| \geq \delta\right) \leq \frac{D(X)}{\delta^2}.$$

Пример 2. Если X — нормально распределенная величина с параметрами a, σ, то получаем $P\left(\left|X - a\right| \geq 3\sigma\right) \leq \frac{1}{9}$ (на самом деле, как указано в предыдущей главе, эта вероятность примерно равна 0,0026).

Перейдя к противоположным событиям, неравенства Маркова и Чебышева можно записать в форме

$$P\left(X < A\right) \geq 1 - \frac{M(X)}{A},$$

$$P\left(\left|X - M(X)\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{D(X)}{\delta^2},$$

то есть с ростом чисел A, δ эти вероятности приближаются к 1.

Из последнего неравенства вытекает **закон больших чисел** в форме Чебышева. Приведем его простейшую форму.

Пусть $X_1, X_2, X_3, \ldots X_n, \ldots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных величин с одинаковыми математическими ожиданиями $M(X_i) = m$ и дисперсиями $D(X_i) = \sigma^2$. Рассмотрим для каждого значения n *среднюю* величину $\widetilde{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + X_3 + \ldots + X_n)$. Используя свойства математического ожидания и дисперсии (см. гл. 2), получим: $M(\widetilde{X}) = m$, $D(\widetilde{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$ и из неравенства Чебышева для любого, сколь угодно малого значения $\varepsilon > 0$ будет $P\left(\left|\widetilde{X} - m\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$. С ростом n эта вероятность приближается к 1, что можно понимать как закон *стабилизации* значения средней величины около числа m.

Рассмотрим простейший случай применения этой теоремы. Пусть p – вероятность успеха в каждом из независимых испытаний, X_i – результат i-го испытания (т.е. $X_i = 1$ в случае успеха и $X_i = 0$ в случае неуспеха). Тогда $m = p, \sigma^2 = p(1-p)$. В этом случае величина $\widetilde{X}$ совпадает с относительной частотой успехов w, и для любого $\varepsilon > 0$ будет $P\left(\left|w - p\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$ (закон стабилизации относительной частоты к вероятности). Для числа успехов k

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

это же неравенство можно записать в форме $P\left(\left|k-np\right|<\delta\right)\geq 1-\frac{np(1-p)}{\delta^2}$.

Задачи

8.1. Среднее время решения контрольной задачи учениками первого класса – 2,5 минуты. Результат не более 12 минут считается удовлетворительным. Каким может быть максимальный процент учеников, получивших неудовлетворительную оценку?

8.2. Средний вес метеорита, упавшего на Землю – 6 кг. Оценить максимально возможный процент метеоритов, имеющих вес не менее 20 кг. Сравнить с результатом решения задачи 6.5.

8.3. Дискретная случайная величина X задана рядом распределения

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

а) Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что $\left|X-M(X)\right|<0{,}2$. Сравнить с истинным значением этой вероятности.

б) Пусть $\widetilde{X}$ – среднее значение 50 независимых случайных величин, каждая из которых имеет тот же ряд распределения. Оценить вероятность того, что $\left|\widetilde{X}-M(\widetilde{X})\right|<0{,}05$.

8.4. Вероятность того, что изделие пройдет контроль, равна 0,8. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что при проверке 500 изделий успешно пройдут контроль от 370 до 430 из них.

8.5. Вероятность того, что покупатель сделает покупку, равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение доли покупателей, совершивших покупку, от вероятности $p=0{,}3$ не превзойдет 0,05, если число покупателей равно 500 чел.

9. Центральная предельная теорема. Теоремы Лапласа

Приложения нормального распределения основаны на следующем утверждении, которое мы сформулируем математически не вполне строго.

Центральная предельная теорема теории вероятностей.

Если значение случайной величины формируется под воздействием большого количества независимых случайных факторов, действие каждого из которых мало по сравнению с совокупностью остальных, то распределение этой величины близко к нормальному.

Очевидно, что это утверждение относится к суммам независимых, одинаково распределенных случайных величин и к их средним значениям (см. преды-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

дущую главу), а также (как частный случай), к числу k и к относительной частоте успехов $w=\frac{k}{n}$ в схеме Бернулли. Применяя формулы из гл. 7 и учитывая, что $M(k)=np$, $\sigma(k)=\sqrt{npq}$, $M(w)=p$, $\sigma(w)=\sqrt{\frac{pq}{n}}$, получим, что при больших значениях n (реально при $n\ge 20$, если только $np\ge 5, nq\ge 5$) верны приближенные равенства (в них $t=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}$):

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(t)$$

(локальная теорема Лапласа),

$$P(k_1\le k\le k_2)\approx\Phi(t_2)-\Phi(t_1)$$

(интегральная теорема Лапласа),

$$P\left(|k-np|<\delta\right)=\gamma\approx 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{npq}}\right),$$

$$P\left(|w-p|<\varepsilon\right)=\gamma\approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

(закон больших чисел в форме Лапласа, из которого вытекает, что при сколь угодно малом фиксированном ε эта вероятность с ростом n приближается к 1).

Примечание. Во всех приведенных неравенствах употребление знаков $<$ или $\le$ считается безразличным (при больших значениях n, как видно из локальной теоремы Лапласа, каждое отдельное значение k маловероятно).

Полученные из двух последних равенств интервалы для величин k, w называются *доверительными интервалами*, а соответствующие значения γ — *доверительными вероятностями*. Полезно знать, что из равенства $2\Phi(t)=\gamma$ получаем: при $\gamma=0{,}95$ $t=1{,}96$; при $\gamma=0{,}99$ $t=2{,}58$; при $\gamma=0{,}999$ $t=3{,}3$.

Задачи

9.1. Дано: $n=20$, $p=0{,}4$. Составить соответствующую дифференциальную функцию нормального распределения, построить ее график. Найти вероятности 6, 8, 10 успехов:
а) по формуле Бернулли;
б) по локальной теореме Лапласа.

9.2. При $n=200$, $p=0{,}4$ найти по локальной теореме Лапласа вероятности 60, 80, 100 успехов. Сравнить с результатами предыдущей задачи. Найти 95%-ный и 99%-ный доверительные интервалы для числа успехов.

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

9.3. Найти вероятности получить ровно 100 и ровно 90 «шестерок» при 600 бросаниях игральной кости.

9.4. Стрелок разбивает тарелочку с вероятностью 0,7. Найти вероятность того, что он разобьет от 65 до 80 тарелочек из 100.

9.5. Найти вероятность выпадения орла не менее чем 55 раз при 100 бросаниях монеты.

9.6. Вероятность выхода бракованной детали равна 0,1. Найти вероятность того, что в партии из 400 деталей окажется более 50 бракованных.

9.7. В «Тетрисе» 7 фигур. Считая их появление равновероятным и независимым, найти:

а) вероятность того, что данная фигура появится не менее чем 20 раз из 100;

б) 95%-ный доверительный интервал для числа появления «палки» среди первых 1000 фигур.

9.8. При 2000 бросаний игральной кости найти вероятности того, что число выпавших «шестерок»:

а) окажется в пределах от 300 до 350;

б) не превысит 310;

в) превысит 320.

Указать для этого числа 90%-ный, 95%-ный доверительные интервалы, а также интервал практической достоверности по правилу «трех сигм» (интервалы округлять до целых чисел).

9.9. При пересадке дерева вероятность приживаемости равна 0,6. Пересажено 800 деревьев. Найти вероятность отклонения по абсолютной величине доли прижившихся деревьев от вероятности $p = 0{,}6$ не более, чем на 0,05.

9.10. Найти вероятность того, что при 400 бросаниях монеты относительная частота выпадения орла отклонится от 0,5 менее, чем на 0,01. Найти 99%-ный интервал для этой относительной частоты. Те же вопросы – при 40000 бросаний монеты. Сделать вывод.

9.11. Сколько раз надо бросить кость, чтобы с надежностью 0,999 гарантировать, что относительная частота выпадения «шестерки» отклонится от вероятности $p = \frac{1}{6}$ не более, чем на 0,001?

9.12. Известно, что на 1000 новорожденных приходится 518 мальчиков. В России за год регистрируется 1500000 рождений. Найти практически достоверный интервал для числа новорожденных мальчиков за год.

Задачи с односторонней критической областью (9.13 – 9.16)

9.13. Информацию передают в двоичном коде. Вероятность искажения символа при его передаче равна $p < 0{,}5$. Поэтому каждый символ передают нечетное число раз $n = 2k + 1$ и выбирают значение по «правилу большинства». Найти число повторений $n = n(p)$, гарантирующее правильное распознава-

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

ние каждого символа с надежностью 0,9999.

9.14. В театр при аншлаге приходят 1000 зрителей. Каждый случайно выбирает гардероб слева или справа от входа. Сколько мест должно быть в каждом гардеробе, чтобы на 90% можно было гарантировать, что ни одному зрителю не придется переходить в другой гардероб? То же – при условии, что все зрители приходят парами.

9.15. Страховая компания при взносе 100 долларов выплачивает 1000 долларов при наступлении страхового случая, вероятность которого известна и равна 0,09. Найти вероятность того, что компания не получит прибыли, если число ее клиентов равно: а) 100; б) 1000.

9.16. В пансионате 1000 отдыхающих. На экскурсию обычно приходит каждый третий. Заказано 6 автобусов по 60 мест. Найти вероятность того, что: а) мест в автобусах не хватит; б) останется лишний автобус.

Оглавление

Часть I. Случайные события

Введение 3
1.Комбинаторика 4
2.Классическая вероятность 6
3.Сложение вероятностей 8
4.Умножение вероятностей (общий случай) 10
5.Умножение вероятностей (независимые события) 12
6.Формула полной вероятности. Формула Бейеса 14
7.Формула Бернулли 16
8.Задачи для повторения 18

Часть II. Случайные величины

Введение 19
1.Дискретные случайные величины 20
2.Числовые характеристики дискретной случайной величины 21
3.Некоторые виды дискретных случайных величин 23
4.Интегральная функция распределения 26

Generated by Foxit PDF Creator © Foxit Softwa
http://www.foxitsoftware.com For evaluation or

5.Дифференциальная функция распределения. Числовые характеристики непрерывной случайной величины **28**
6.Равномерное и показательное распределения **32**
7.Нормальное распределение **34**
8.Неравенство Чебышева. Закон больших чисел **37**
9.Центральная предельная теорема. Теоремы Лапласа **39**