Аракчеев
Сергей Александрович

Избранные задачи
математических олимпиад
для **втуз**ов

Новосибирск 2011

УДК 51 (0761)

А79

Аракчеев С.А. Избранные задачи математических олимпиад для втузов. Учебное пособие.
– Новосибирск: Изд-во СГУПСа, 2011. – 128 с.
ISBN 978-5-93461-527-8

Пособие содержит более 1000 задач по всем разделам основного курса высшей математики, а также предисловие, «советы студентам», раздел ответов и приложения. Предназначено для использования преподавателями в процессе практических занятий, а также для самостоятельной работы студентов.

Утверждено редакционно-издательским советом университета в качестве учебного пособия.

Ответственный редактор: проф. *П.И.Остроменский*.

Рецензенты:
кафедра алгебры НГПУ (зав. кафедрой доц. *М.П.Тропин*);
доцент механико-математического факультета НГУ *А.Д.Больбот*.

ISBN 978-5-93461-527-8

Предисловие

Студенческие математические олимпиады — дело уже не новое. Тем более странно для автора, что до сих пор нет серьезных изданий, обобщающих опыт их проведения именно в высших *технических* учебных заведениях. Известные книги В.А.Садовничего с соавторами [1,2] при всем их значении полезны прежде всего для студентов, изучающих математику как специалисты. По достаточно очевидным причинам (подробнее, впрочем, см. Приложение II) большая часть их содержания бесполезна для тех, кто хочет организовать олимпиаду во втузе. Существует, правда, великое множество изданий малого объема, выпущенных в различных вузах на основе внутренних олимпиад и имеющих преимущественно внутреннее же распространение. Некоторые из этих изданий (см. список литературы в конце Предисловия) известны автору и использовались им. Он и сам издавал для использования в своем вузе книги [3,4].

Впрочем, не в традиции сборников задач прослеживать и снабжать ссылками происхождение всех задач. Во многих случаях это невозможно как за давностью лет, так и потому, что задачи постоянно видоизменяются, так и потому, наконец, что многие задачи (а в особенности идеи их составления), кочуя из олимпиады в олимпиаду, из сборника в сборник, утратили авторство и стали «народными». Однако мы старались по возможности не менять оригинальные формулировки задач, предлагавшихся на различных олимпиадах.

Автор, разумеется, не представил все задачи, попавшие в поле его зрения за те 20 с лишним лет, что он занимается олимпиадами. Слово «избранные» в названии книги выражает суть дела: далеко не все задачи, по мнению автора, достойны увековечения. Впрочем, он включил практически все задачи, предлагавшиеся участникам олимпиад НИИЖТа — СГУПСа в 1977 — 1999 годах. Подробнее о принципах, руководивших автором при отборе задач — в Приложении II. В Приложениях также сделана попытка обобщения опыта и методики проведения математических олимпиад, ответа на вопрос: «что такое олимпиадная задача?».

После Предисловия даются «Советы студентам», которые захотят работать с книгой самостоятельно.

Основу книги составляют более 1000 задач, разбитых на 17 глав в соответствии с более или менее стандартной программой курса математики втуза. Это позволяет использовать материал книги не только во время олимпиад, но и в учебном процессе — прежде всего для более способных и «продвинутых» студентов, которым могут быть скучны стандартные задачи. Внутри каждой главы автор попытался сгруппировать задачи как по сходным приемам решения (в порядке повышения сложности), так и по математическому содержанию. Так, главу «Векторная алгебра» можно было бы разбить на подглавки: «Геометрическая теория векторов», «Координаты вектора», «Скалярное, векторное и смешанное произведения». Автор не счел нужным произвести такое деление во всех главах, да и не всегда это так просто.

Книга содержит также раздел «Ответы» (более или менее краткие указания к решению в среднем каждой второй задачи).

Разумеется, такую работу нельзя было совершить в одиночку. Автор благодарен прежде всего профессору Ю.И.Соловьеву — заведующему кафедрой высшей математики НИИЖТа – СГУПСа, и сотрудникам кафедры Н.И.Антонову, И.Ф.Пинелису, А.Г.Пьяных, Ю.А.Чиркунову.

Литература

1. В.А.Садовничий, А.С.Подколзин. Задачи студенческих олимпиад по математике. М.: Наука, 1978.
2. В.А.Садовничий, А.А.Григорьян, С.В.Конягин. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: МГУ, 1987.
3. Нестандартные задачи по курсу высшей математики (отв. ред. С.А.Аракчеев). Новосибирск: НИИЖТ, 1986.
4. С.А.Аракчеев, И.Ф.Пинелис, А.Г.Пьяных. Задачи математических олимпиад НИИЖТа 1982—1988 гг. Новосибирск: НИИЖТ, 1990.
5. В.И.Рожков, Г.А.Курдеванидзе, Н.Г.Панфилов. Сборник задач математических олимпиад. М.: УДН, 1987.
6. В.Н.Сергеев. Сборник олимпиадных задач по высшей математике. Омск: ОмПИ, 1975.
7. Избранные задачи олимпиад по математике для студентов МИИТа (отв. ред. В.Н.Тростников). М.: МИИТ, 1981.
8. А.И.Корнилов, Ю.К.Оленникова, Д.В.Аминов. Сборник задач студенческих математических олимпиад. Ярославль: ЯГТУ, 1997.
9. О.Н.Чащин, В.Г.Чередниченко. Задачи математических олимпиад. Новосибирск: СибУПК, 1998.
10. Математические олимпиады в Свердловском институте народного хозяйства. Свердловск: СИНХ, 1984 (вып.1), 1990 (вып.2).

Советы студентам

Сборник можно использовать для самостоятельных занятий или с помощью преподавателя как при подготовке к олимпиаде (внутривузовской или более высокого уровня), так и при изучении соответствующих тем курса высшей математики.

Внутри каждой главы порядок расположения задач в основном соответствует последовательности изучения раздела курса математики. Однородные по тематике, формулировке и приемам решения задачи объединены в группы с возрастанием сложности. Все это вовсе не значит, что задачи надо решать подряд — выбирайте те, которые Вас заинтересовали.

Примерно к половине задач в разделе «Ответы» даны решения или указания. Все знают, что в этот раздел не стоит заглядывать, не поразмыслив над задачей — пользы для Вашего математического развития будет несравненно меньше. Впрочем, каждый решает сам. Замечу лишь, что в абсолютном большинстве случаев Вы найдете лишь краткие пояснения по ключевому моменту решения задачи.

Очень часто непривычная формулировка задачи лишь маскирует вполне доступное Вам математическое содержание. Это, между прочим, бывает характерно для задач, поставленных жизнью. Значит, опыт, полученный при решении нестандартных задач, может научить Вас в будущем находить подходы и к успешному математическому моделированию технических, экономических и др. процессов. Некоторые из задач на такое моделирование (см. в особенности конец глав 8 и 12) могут стать основой для Вашей учебно-исследовательской работы.

Вы заметите, что формулировки многих задач сохраняют номер года, когда они предлагались. Мы не сочли нужным это изменять, хотя в абсолютном большинстве случаев этот номер можно было заменить почти любым другим числом.

В заключение приведем некоторые из обозначений, которые встречаются уже в первой главе и могут оказаться незнакомыми для выпускников средней школы.

Для любого натурального n $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (n-*факториал*) — произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n.

Для любого действительного x $[x]$ — *целая часть* числа x, т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1] = 1,\ [\pi] = 3,\ [-0{,}01] = -1$. *Дробная часть* числа $\{x\} = x - [x]$.

1. Задачи по элементарной математике

1.1. а) Если $2\times 2=11$, то чему равно 2^{11}?

b) Если 1/4 от 20 равна 6, то чему равна 1/5 от 10?

1.2. Пастух, которому вчера исполнилось m лет, пасет n коров. Он сосчитал в уме, что $3n(2n+5)-m(n+4)=1$. Сколько лет пастуху?

1.3. В пещере живут сороконожки и трехголовые драконы — всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?

1.4. Дан фрагмент из японской таблицы умножения (японцы, как и мы, пользуются десятичной системой счисления):

ФУТАЦУ × ЁЦУ = ЯЦУ
ИЦУЦУ × ИЦУЦУ = НИДЗЮГО
ЯЦУ × КОКОНОЦУ = СИТИДЗЮНИ
ИЦУЦУ × ЯЦУ = ЁНДЗЮ
КОКОНОЦУ × МИЦУ = НИДЗЮСИТИ
МИЦУ × МУЦУ = ДЗЮХАТИ
КОКОНОЦУ × МУЦУ =
КОКОНОЦУ × = ХАТИДЗЮИТИ
ЁЦУ × = САНДЗЮНИ.

Восстановите пропуски.

1.5. КПД паровоза 7%, тепловоза — 28%. Сколько процентов горючего экономится при переходе с паровозной на тепловозную тягу?

1.6. Найти наименьшее число N такое, что как сумма его цифр, так и сумма цифр числа N+1 кратны 11.

1.7. В какой степени входит число 11 в разложение числа $63!-61!$ на простые множители?

1.8. Сколькими одинаковыми цифрами оканчиваются числа 5^{64} и 5^{128}?

1.9. Доказать, что при любом n уравнения $x^2+y^2=n$ и $x^2+y^2=2n$ имеют равное число решений в целых числах.

1.10. Решить в натуральных числах уравнение $\dfrac{1}{x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}}=0{,}7$.

1.11. Доказать, что последовательность последних цифр чисел $1^1, 2^2, 3^3, 4^4, \ldots$ — периодическая.

1.12. Сколько различных дробей можно получить из выражения *a/b/c/d/e* изменением порядка деления?

1.13. Существуют ли такие числа *A*,*B*, что $\dfrac{1}{A+B}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}$?

1.14. Дана последовательность x_0, x_1, x_2,..., в которой $x_0 \neq 0$, $x_1 \neq 0$, а при $n \geq 2$ $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{x_{n-2}}$. Найти произведение x_0 и x_{1985}.

1.15. Дроби $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{6}$ образуют арифметическую прогрессию. Можно ли из дробей вида $\dfrac{1}{n}$ составить арифметическую прогрессию, включающую 4 члена? 10 членов? 1000 членов?

1.16. Найти иррациональное число, записанное только цифрами 0 и 1.

1.17. Могут ли $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ быть одновременно ненулевыми рациональными числами?

1.18. Даны две бочки бесконечно большой емкости. Можно ли, пользуясь двумя ковшами емкостью $(2-\sqrt{2})$ и $\sqrt{2}$ литра, перелить из одной бочки в другую ровно 1 литр?

1.19. Доказать, что $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ — иррациональное число.

1.20. Найти такие иррациональные числа *x* и *y*, что число x^y рационально.

1.21. Известно, что $x+\dfrac{1}{x}$ — целое число. Доказать, что число $x^8+\dfrac{1}{x^8}$ — также целое.

1.22. Известно, что $x^2+5x+1=0$. Найти $x^{64}+x^{-64}$.

1.23. Упростить выражения:

a) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$;

b) $(3+1)(3^2+1)(3^4+1)\ldots(3^{2^n}+1)$.

1.24. Что больше:

a) 2^{100} или 999^9?

b) $\sqrt[8]{8!}$ или $\sqrt[9]{9!}$?

c) $(\sin\alpha)^{\operatorname{tg}\alpha}$ или $(\operatorname{tg}\alpha)^{\sin\alpha}$ при $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$?

d) $\sin(\cos\alpha)$ или $\cos(\sin\alpha)$ при $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$?

1.25. Отрезки a,b,c образуют треугольник. Доказать, что отрезки $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ — также стороны некоторого треугольника.

1.26. Решить уравнения:

a) $x^4-3x^3+2x^2+\left|x^4-3x^3+2x^2\right|=0$;

b) $x^2-[x]=2$;

c) $x^{[x]}=3$;

d) $2^{-|x|}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(|x+1|+|x-1|\right)$;

e) $(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)(2+\sin y)=2$.

1.27. Найти $\min\limits_{c\in R}\max\limits_{t\in[0,1]}|t-c|$.

1.28. Пусть $(x^2-3x+1)^{1993}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots$ Вычислить $S=a_0+a_1+a_2+\ldots$

1.29. Сколько отрицательных корней имеет уравнение $x^4-5x^3-4x^2-7x+4=0$?

1.30. Найти все корни уравнения $x^3+px+q=0$, если известно, что один из них — двукратный. Укажите связь между p и q.

1.31. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $p(7)=5$, $p(15)=9$?

1.32. Некоторый многочлен дает при делении на $(x-1)$ остаток 2, а при делении на $(x-2)$ остаток 1. Какой остаток он дает при делении на $(x-1)(x-2)$?

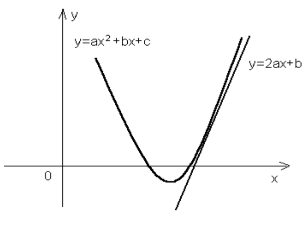
1.33. Составить уравнение, корни которого равны квадратам корней уравнения $x^3+ax^2+bx+c=0$.

1.34. Известно, что $a+b+c<0$ и что уравнение $ax^2+bx+c=0$ не имеет действительных корней. Какой знак имеет число c?

1.35. Про квадратный трехчлен $f(x)=ax^2-ax+1$ известно, что $|f(x)|\le 1$ при всех $x\in[0,1]$. Найти наибольшее возможное значение a.

1.36. Квадратный трехчлен $P(x)$ в точках $-1, 0, 1$ принимает значения на отрезке $[0,1]$. Доказать, что всюду на отрезке $[-1,1]$ $P(x)\le\frac{9}{8}$.

1.37. Дано: $f(x)=ax^2+bx+c,\ f(0)=1,\ f(1)=5,\ f(-2)=0.$ Найти $f(-1).$



1.38. Объяснить, почему ситуация, изображенная на рисунке, невозможна.

1.39. По какой линии движется точка окружности, которая катится без скольжения внутри окружности вдвое большего радиуса?

1.40. Про точки A, B, C известно следующее: для любой точки M на плоскости отрезок AM меньше хотя бы одного из отрезков BM и CM. Доказать, что точка A лежит на отрезке BC.

1.41. На лобовом стекле автомобиля укреплены два «дворника» длиной L каждый, вращающиеся вокруг двух точек, расстояние между которыми также равно L. Каждый «подметает» полукруг. Какую площадь «подметают» оба?

1.42. Вершина одного квадрата со стороной 1 находится в центре другого такого же квадрата. Найти площадь части плоскости, накрытой двумя квадратами.

1.43. Окружность вписана в квадрат со стороной 1. Доказать, что для всех точек окружности сумма квадратов расстояний до вершин квадрата постоянна, и найти эту величину.

1.44. Провести через центр квадрата такую прямую, чтобы сумма квадратов расстояний от вершин квадрата до этой прямой была наименьшей.

1.45. Площадь трапеции равна 2, а сумма диагоналей равна 4. Найти высоту трапеции.

1.46. Точки M и N лежат на линии $xy = k\ (x > 0)$, точки M' и N' — их проекции на ось абсцисс. Доказать, что площади треугольника OMN и трапеции $MNN'M'$ равны.

1.47. Показать, что существуют многогранники с любым числом ребер, большим пяти, за исключением многогранника с семью ребрами.

1.48. Найти наименьшую возможную сторону квадрата, внутри которого можно разместить без наложения 5 квадратов со стороной 1.

1.49. Можно ли кубик с ребром 1 завернуть в квадратный лист бумаги со стороной 3 (не разрывая бумагу)?

1.50. Чему равна наибольшая площадь проекции единичного куба на плоскость?

1.51. По краю квадратного листа бумаги с обеих сторон проведена узкая красная полоска. Сколько раз (по меньшей мере) надо перегнуть лист, чтобы красный цвет не был виден?

1.52. Плоскость выкрашена в два цвета. Доказать, что для любого положительного числа d найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно d; найдутся две точки разного цвета, расстояние между которыми равно d.

1.53. Плоскость выкрашена в три цвета. Доказать, что для любого положительного числа d найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно d.

1.54. Пространство выкрашено в два цвета. Доказать, что найдется отрезок с концами и серединой одного цвета.

1.55. Какое наименьшее число «выстрелов» необходимо для гарантированного потопления «линкора» 1×4 при игре в «морской бой» на поле размером 8×8 (правила игры — обычные; других «кораблей» на поле нет)?

1.56. У калькулятора с памятью работают только кнопки «1», «+», «=», зато можно запоминать и использовать в любой момент любые результаты вычислений. Каково наименьшее число сложений, достаточное для получения числа 1976?

1.57. Доказать, что в любой группе, содержащей не менее 6 человек, найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Показать, что для группы из 5 человек это утверждение неверно.

2. Определители

2.1. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \alpha^2+1 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2+1 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2+1 \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix}$ $(i^2=-1)$.

2.2. Доказать, что все шесть элементов разложения определителя третьего порядка не могут иметь один знак (нулей среди элементов определителя нет).

2.3. Найти наибольшее возможное значение определителя 3-го порядка, два элемента которого равны ± 10, а остальные равны ± 1.

2.4. Вычислить $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & \beta \\ \beta & 1 & \alpha \end{vmatrix}$, если α, β — корни уравнения $x^2+px+q=0$.

2.5. Вычислить $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$, если α, β, γ — корни уравнения $x^3+px+q=0$.

2.6. Вычислить $\begin{vmatrix} x_1^2 & 1 & 1 \\ 1 & x_2^2 & 1 \\ 1 & 1 & x_3^2 \end{vmatrix}$, если x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $8x^3-4x+1=0$.

2.7. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю (Квадратная матрица называется кососимметрической, если ее элементы, лежащие симметрично относительно главной диагонали, равны по величине и противоположны по знаку: $a_{ij} = -a_{ji}$.).

2.8. Пусть $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 21C & 7Z & 133c \\ 15A & 5X & 95a \\ 3B & Y & 19b \end{vmatrix}$. Вычислить $\dfrac{\Delta_2}{\Delta_1}$.

2.9. В определителе порядка *n* каждый элемент a_{ij} заменили на $\alpha^{i-j} a_{ij}$, где α — некоторое число. Показать, что значение определителя при этом не изменилось.

2.10. Не раскрывая определителей, доказать равенство:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & z^2 & y^2 \\ 1 & z^2 & 0 & x^2 \\ 1 & y^2 & x^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

2.11. Девять различных чисел можно расположить в виде определителя 9! различными способами. Найти сумму всех таких определителей.

2.12. Что произойдет с определителем 1991-го порядка, если его повернуть на 90° ?

2.13. Сформулировать необходимое и достаточное условие, при выполнении которого данный элемент определителя можно менять без изменения величины определителя.

2.14. a) Доказать, что определитель третьего порядка, каждый из элементов которого равен ± 1, не может сам равняться ± 1;

b) То же — для определителя любого порядка.

2.15. Пусть Δ_n — определитель порядка *n*, в котором главная диагональ и соседняя с ней сверху заняты единицами, а соседняя снизу — числами (-1), остальные элементы — нули. Показать, что $\Delta_{n+2} = \Delta_n + \Delta_{n+1}$, и найти Δ_{10}.

2.16. Показать, что последовательность $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$,... — периодическая.

2.17. Не раскрывая определителей, показать, что каждый из них равен нулю:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$;

b) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix}$;

c) $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$;

d) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$;

e) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\lambda & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

2.18. Доказать, что если система уравнений $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$

совместна, то $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

2.19. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \ldots + 9x_9 + 10x_{10} = 55, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 + \ldots + 9x_{10} + 10x_1 = 55, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{10} + 2x_1 + 3x_2 + \ldots + 9x_8 + 10x_9 = 55. \end{cases}$$

2.20. Вычислить определитель порядка $2n$, если элементы его главной диагонали равны a, элементы побочной диагонали равны b, а остальные элементы равны нулю.

2.21. Вычислить определитель порядка n, элементы главной диагонали которого равны p, а остальные элементы равны q.

2.22. Какие наибольшее и наименьшее значения может принять определитель порядка n, главная диагональ которого состоит из чисел $1,2,3,...,n$ (в любом порядке), а все элементы, стоящие в первой строке, а также ниже главной диагонали, равны 1?

2.23. Вычислить:

a) определитель 4-го порядка, в котором каждый элемент a_{ij} равен меньшему из двух чисел i, j;

b) такой же определитель порядка n;

c) определитель порядка n, в котором каждый элемент a_{ij} равен $|i-j|$.

2.24. Определитель порядка n состоит из цифр от 0 до 9. Если каждую его строку прочитать как n-значное число, то оно делится на 17. Доказать, что сам определитель делится на 17.

2.25. Найти все корни уравнений:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ . & . & . & . & . \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$;

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ x & x & x & x & 1988 \end{vmatrix} = 0$;

c) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 & x^2 \\ x+3 & x+4 & x+5 & x^3 \\ x+6 & x+7 & x+8 & x^4 \\ x+9 & x+10 & x+11 & x^5 \end{vmatrix} = 0$.

2.26. Магический квадрат «С Новым годом!»

8	14,	2	12
18	33,	4,5	27
2	3,7	0,5	3
10	18,	2,5	15

Объясните следующее свойство квадрата: произведение любых четырех чисел, выбранных «по принципу определителя», т.е. по одному в каждой строке и в каждом столбце, постоянно.

3. Векторная алгебра

О б о з н а ч е н и я: $\mathbf{ab}$ — скалярное, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ — векторное произведения двух векторов, $\mathbf{abc}$ — смешанное произведение трех векторов.

3.1. Дано: $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Найти сумму углов между **a** и **b**, **b** и **c**, **c** и **a**.

3.2. Длины трех ненулевых векторов образуют геометрическую прогрессию, а их сумма равна нулевому вектору. Найти наибольшее и наименьшее возможные значения знаменателя прогрессии.

3.3. 6 векторов совпадают со сторонами и диагоналями квадрата со стороной 1. Учитывая, что каждый из них может иметь одно из двух направлений, найти все возможные значения модуля суммы всех шести векторов.

3.4. Доказать, что для любого 4-угольника вектор, соединяющий середины противоположных сторон, равен полусумме векторов, идущих вдоль двух других сторон.

3.5. Дан треугольник OAB. Описать геометрическое место концов векторов вида $\alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}$, где $\alpha\geq 0, \beta\geq 0, \alpha+\beta=1$.

3.6. Пусть ABC — треугольник, M — точка пересечения его медиан, O — произвольная точка плоскости. Доказать, что $\overline{OM}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC})$.

3.7. Вычислить $\cos 7^\circ+\cos 79^\circ+\cos 151^\circ+\cos 223^\circ+\cos 295^\circ$.

3.8. Пусть $A_1A_2\ldots A_{19}$ — правильный 19-угольник, O — его центр, M — произвольная точка пространства, причем $\left|\overline{MO}\right|=1$. Вычислить $\left|\overline{MA_1}+\overline{MA_2}+\ldots+\overline{MA_{19}}\right|$.

3.9. а) Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулевому вектору. b) Правильный n-угольник вписан в окружность радиуса 1. Найти модуль суммы векторов, идущих из одной его вершины в остальные.

3.10. Доказать, что если сумма векторов, совпадающих с биссектрисами углов треугольника (от вершины до противоположной стороны), равна нулевому вектору, то треугольник — правильный.

3.11. a) На каждой стороне многоугольника взят вектор внешней нормали, длина которого равна длине этой стороны. Доказать, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

b) На каждой грани тетраэдра взят вектор внешней нормали, длина которого равна площади этой грани. Доказать, что сумма этих векторов равна нулевому вектору.

3.12. В трапеции *ABCD* даны векторы, совпадающие с основаниями $\overline{AB}=\mathbf{a}, \overline{CD}=\mathbf{c}$ и с одной из боковых сторон $\overline{BC}=\mathbf{b}.$ Найти сумму векторов, идущих из точки пересечения диагоналей трапеции в ее вершины.

3.13. a) *ABCDEF* — правильный шестиугольник. Разложить по базису $\mathbf{a}=\overline{AB}, \mathbf{b}=\overline{AF}$ векторы, направленные вдоль остальных сторон и диагоналей шестиугольника.

b) То же — для правильного восьмиугольника.

3.14. Пусть *A,B,C,D* — последовательные вершины правильного 12-угольника. Выразить вектор $\overline{CD}$ через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$.

3.15. На стороне *AD* параллелограмма *ABCD* выбрана точка *K*, а на диагонали *AC* — точка *M* так, что $\overline{AK}=\frac{1}{5}\overline{AD}, \overline{AM}=\frac{1}{6}\overline{AC}$. Доказать, что точки *K, M, B* лежат на одной прямой.

3.16. В параллелограмме *ABCD* на стороне *AD* выбрана точка *M*. Известно, что $|AM|=t\cdot|AD|$ и что *P* есть точка пересечения отрезков *AC* и *BM*. Разложить вектор $\overline{AP}$ по базису $\mathbf{a}=\overline{AB}, \mathbf{b}=\overline{AD}.$

3.17. *ABCD* — параллелограмм, точка *O* лежит вне его плоскости. Выразить вектор $\overline{OD}$ через $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$.

3.18. Единичные векторы **a**, **b**, **c**, **d**, **e** приложены к началу координат и оканчиваются в верхней полуплоскости. Доказать, что $|\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}+\mathbf{e}|>1$.

3.19. Точка в пространстве движется так, что каждая из ее координат выражается через время как квадратный трехчлен. Доказать, что траектория точки лежит в некоторой плоскости.

3.20. Решить предыдущую задачу при условии, что проекция точки на каждую из осей координат совершает гармоническое колебание типа $x(t)=A\sin\omega(t-t_0)$ с одной и той же частотой ω.

3.21. Вывести формулу для вычисления кратчайшего расстояния по поверхности Земли между двумя точками, если заданы их широта и долгота. (П р и м е ч а н и е. Землю считать шаром данного радиуса R, широта φ меняется в пределах $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, долгота ψ — в пределах $(-\pi,\pi]$).

3.22. Доказать неравенство:

$$\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}+\ldots+\sqrt{a_n^2+b_n^2+c_n^2}\geq$$
$$\geq\sqrt{(a_1+a_2+..a_n)^2+(b_1+b_2+..b_n)^2+(c_1+c_2+..c_n)^2}$$

и установить, при каком условии в нем достигается равенство.

3.23. В последовательности векторов $\mathbf{a}_0,\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3,\ldots$ каждый следующий повернут относительно предыдущего на 90° против часовой стрелки. Длины векторов образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем q, причем $|\mathbf{a}_0|=1$.

a) Найти длину вектора $\mathbf{s}=\mathbf{a}_0+\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3+\ldots$

b) Какую линию составят концы векторов $\mathbf{s}$, если вектор $\mathbf{a}_0$ фиксирован, а q меняется в интервале (0,1)?

3.24. Груз подвешен к потолку на трех пружинах, образующих между собой углы по 60° и растянутых с силой 1, 2 и 3 Н. Найти вес груза.

3.25. Доказать, что в пространстве не существует пяти векторов, образующих попарно тупые углы.

3.26. Дан тетраэдр. Известно, что две пары его непересекающихся ребер перпендикулярны. Доказать, что для третьей пары это также верно.

3.27. В треугольнике OAB из вершины O проведены медиана **M**, биссектриса **B** и высота **H**. Разложить указанные векторы по базису $\mathbf{a}=\overline{OA}, \mathbf{b}=\overline{OB}.$

3.28. Дано: $\mathbf{a}_0=\mathbf{i}, \mathbf{a}_1=2\mathbf{j}$. Далее, при $n=2,3,4,\ldots$ $\mathbf{a}_n=\mathbf{a}_{n-2}\times\mathbf{a}_{n-1}$. Найти длину вектора $\mathbf{a}_{10}$.

3.29. Доказать, что для любых векторов **a**, **b**, **c** верно равенство $((\mathbf{a}\times\mathbf{c})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}))\times\mathbf{c}=\mathbf{0}$.

3.30. При каких (ненулевых) векторах **a** и **b** векторное уравнение $\mathbf{a}\times\mathbf{x}=\mathbf{b}$ имеет решения? Найти общий вид решения.

3.31. При каком расположении векторов $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}$ уравнение $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{x}=\mathbf{d}$ имеет решения?

3.32. Доказать, что уравнение $\mathbf{X}=\mathbf{A}\times\mathbf{X}+\mathbf{B}$ имеет единственное решение при любых векторах **A** и **B**. Выразить это решение через **A** и **B.**

3.33. Чему равна сумма $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$, если известно, что векторы **a**, **b**, **c** не коллинеарны, но каждый из них коллинеарен сумме двух других?

3.34. При каком значении h векторы $\mathbf{a}=h\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+h\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+h\mathbf{k}$ компланарны, но не коллинеарны?

3.35. Дан параллелепипед объема V. Найти объем параллелепипеда, построенного, как на ребрах, на диагоналях граней первого параллелепипеда, выходящих из одной вершины.

3.36. Сравнить объемы параллелепипедов, построенных на векторах $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ и на векторах $\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}, \mathbf{b}-\mathbf{a}, \mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c}$.

3.37. Известно, что $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$. Доказать, что:

a) векторы **a, b, c** компланарны;

b) если их отложить от одной точки, то их концы лежат на одной прямой.

3.38. Известно, что векторы $\mathbf{a}\times\mathbf{b}, \mathbf{b}\times\mathbf{c}, \mathbf{c}\times\mathbf{a}$ компланарны. Доказать, что они коллинеарны.

3.39. Доказать тождество: $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c})=\mathbf{a}(\mathbf{abc})$.

3.40. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора **a**, **b**, **c**. Доказать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна к вектору $\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}$.

3.41. Доказать неравенство:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)(a_3^2+b_3^2+c_3^2)} \, .$$

3.42. Доказать, что если $ab + bc + ca = 0$, то

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = (a^2+b^2+c^2)^3.$$

3.43. Пусть S — пирамида, в одной из вершин которой сходятся треугольники с прямыми углами. Доказать, что сумма квадратов площадей граней, примыкающих к этой вершине, равна площади четвертой грани (аналог теоремы Пифагора).

4. Аналитическая геометрия на плоскости

4.1. Вывести следующие формулы для площади плоского треугольника с вершинами $A(x_1, y_1),\ B(x_2, y_2),\ C(x_3, y_3)$:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_1 \end{matrix}\right\|$$

и объяснить их геометрический смысл.

4.2. а) Даны координаты середин сторон многоугольника с нечетным числом сторон $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), .. M_{2n-1}(x_{2n-1}, y_{2n-1})$. Найти координаты вершин.

b) Показать, что для многоугольника с четным числом вершин задача не имеет однозначного решения.

4.3. Показать, что при любом значении a линия $x^2 - y^2 = axy$ состоит из двух прямых.

4.4. Доказать, что для треугольника с рациональными координатами вершин центр описанной окружности также имеет рациональные координаты.

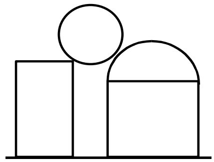
4.5. Прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ пересекаются под углом 30°. Доказать, что хотя бы одно из чисел A_1, B_1, A_2, B_2 иррационально.

4.6. Доказать, что на плоскости не существует треугольника, все вершины которого имеют целочисленные координаты, а один из углов равен 60°.

4.7. Найти вершины треугольника, если известно, что его площадь равна 12, а его высоты лежат на прямых $y = 0,\ y = -x,\ y = 2x$.

4.8. Биссектрисы внутренних углов треугольника лежат на прямых $2x + 11y + 6 = 0$ и $9x - 13y + 27 = 0$. Составить уравнение прямой, на которой лежит сторона треугольника, не проходящая через вершину A(-2,-7).

4.9. Составить уравнение геометрического места точек, отстоящих от точки $A(x_1, y_1)$ на расстояние, вдвое большее, чем от точки $B(x_2, y_2)$.



4.10. Составить уравнение геометрического места точек плоскости, из которых отрезок [-1,1] оси OY виден под углом 45°.

4.11. Даны точки A и B. Какую линию составляют такие точки M, что $\angle MAB = 2\angle MBA$?

4.12. Воздушный шарик, из которого постепенно выходит воздух (причем он сохраняет строго сферическую форму), находится между ящиком и сундуком с полукруглой крышкой (см. рисунок). По какой линии движется центр шарика?

4.13. Какую линию образуют центры всех окружностей:

a) касающихся данной окружности и проходящих через данную точку;

b) касающихся данной прямой и данной окружности?

4.14. Какую линию составляют точки плоскости, равноудаленные от двух данных окружностей (исследовать различные случаи расположения окружностей)?

4.15. На столе лежат двое плоских часов. По какой линии движется середина отрезка, соединяющего концы минутных стрелок?

4.16. Разговаривая по телефону с приятелем, находящимся за 1 *км* от него, человек услышал гром, повторившийся через 2 *с* по телефону. Может ли он определить, где вспыхнула молния? Рассмотреть также случай, когда он успел засечь направление на молнию.

4.17. Отрезок длины 3 движется так, что его концы остаются на положительных полуосях OX и OY. Какую линию описывает точка, находящаяся на расстоянии 1 от одного из концов отрезка?

4.18. Микки-Маус прислонил к стене лестницу и поднялся на 3/4 ее высоты, когда основание лестницы стало скользить по полу. По какой линии движется ступенька, на которой он стоит?

4.19. Какую линию составляют основания перпендикуляров, опущенных из начала координат на отрезок постоянной длины, концы которого перемещаются по осям *OX* и *OY*?

4.20. Сфера катится по двум горизонтальным пересекающимся прямым. По какой линии движется центр сферы?

4.21. Точки *P* и *Q* перемещаются по двум перпендикулярным прямым так, что периметр треугольника, отсеченного отрезком *PQ*, не меняется. Доказать, что середина этого отрезка движется по гиперболе.

4.22. Равносторонние треугольники со сторонами 1, 3, 5,... поставлены в ряд на горизонтальном основании вплотную друг к другу. Доказать, что вершины треугольников находятся на одной параболе и удалены на целочисленные расстояния от ее фокуса.

4.23. Составить уравнения всех окружностей, проходящих через точки $A(-2,4)$, $B(6,-4)$.

4.24. Составить уравнения всех прямых, касающихся окружности $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

4.25. Какую область плоскости заполняют прямые $ax+\sqrt{1-a^2}\,y=1$, если параметр *a* возрастает от 0 до 1?

4.26. Какую линию составляют вершины парабол $y=x^2-\dfrac{4m}{1+m^2}x+\dfrac{1+4m^2+m^4}{(1+m^2)^2}$, если *m* — любое действительное число?

4.27. На плоскости построить множество таких точек (k,b), что прямая $y=kx+b$ не пересекает параболу $y^2=4x$.

4.28. Парабола с вершиной на оси *OY* проходит через точки $A(1,0)$ и $B(4,3)$. Составить уравнение параболы, если известно, что оно не содержит произведения *xy*.

4.29. Построить кривую, заданную уравнением $(|x|-a)^2+(|y|-b)^2=R^2$ (исследовать возможные случаи в зависимости от a, b, R).

4.30. Доказать, что середины всех хорд параболы, параллельных одному направлению, составляют прямую.

4.31. Дан ненулевой вектор **a.** Какую линию составляют концы таких векторов **b**, что векторы **b** и **a**+3**b** перпендикулярны?

4.32. По какой линии движется конец вектора $\overline{OM}\times\mathbf{k}$, откладываемого от начала координат, если точка M пробегает линию $F(x,y)=0$, лежащую в плоскости OXY?

4.33. Построить график функции $y=\sqrt{3x^2+x-1}$.

4.34. Построить линии, заданные уравнениями:

a) $4x^4-y^4-4x^2+1=0$;

b) $x^2-2x=4y^2-4y$;

c) $x^4-x^2=y^2-y$;

d) $(xy)^2+(xy)^4=x^6+y^6$;

e) $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & y^3 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ y & 0 & 0 & x \end{vmatrix}=0$;

f) $2(x^4-2x^2+3)\times$
$\times(y^4-3y^2+4)=7$;

g) $y=\sqrt{xy+y-x}$;

h) $|x+y|+|x-y|=2$;

i) $x^2+y^2-18|x|-19=0$;

j) $(x-|y-1|)(y-|x-1|)=0$;

k) $y=\dfrac{1+\sqrt{4-x^2}}{2}+\dfrac{\left|1-\sqrt{4-x^2}\right|}{2}$;

l) $y^2=x^2+|x^2-1|+2|x^2-4|$;

m) $\sin x=\cos y$;

n) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=\cos 2t \end{cases}$.

4.35. Построить множество точек плоскости, заданное:

a) неравенством $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{xy}$;

b) неравенством $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}>1$;

c) уравнением $2[x]+[y]=9$.

4.36. Решить систему уравнений $\begin{cases} 5[x]+2[y]=19, \\ 3x+4y=21. \end{cases}$

4.37. Найти точку самопересечения линии $\begin{cases} x = t^6 + t^3 + 3t^2 - 4t, \\ y = \sqrt{1+10t^4}. \end{cases}$

4.38. В полярной системе координат построить эскизы линий:

a) $\rho^2 + \varphi^2 = 1;$

b) $\rho^2 + \varphi^2 = 10;$

c) $\rho = 10\sin\dfrac{\varphi}{3};$

d) $\rho = 5 - 3\cos 6\varphi - 2\cos 3\varphi;$

e) $\rho = 1 + \sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi;$

f) $\rho = 1 + \sin 3\varphi + \cos 3\varphi + \sin 3\varphi\cos 3\varphi$.

4.39. Единичный вектор на плоскости закреплен в некоторой точке и вращается с постоянной угловой скоростью. Какую линию описывает конец второго единичного вектора, закрепленного в конце первого и вращающегося:

a) с той же скоростью в противоположную сторону;

b) в ту же сторону со скоростью, вдвое большей?

В начальный момент направления векторов совпадают.

4.40. На какой угол надо повернуть оси координат, чтобы в новых осях в уравнении $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ отсутствовал член, содержащий $x'y'$?

4.41. Из начала координат проведены все хорды окружности $x^2 + y^2 = 2ax$, которые продолжены до пересечения с прямой $x = 2a$. Части продолжений от окружности до прямой отложены на тех же хордах от начала координат. Составить уравнение линии, состоящей из концов этих отрезков.

4.42. Из некоторой точки O на плоскости проведен луч. Через каждую его точку проведена окружность с центром в O, по которой отложена от точки пересечения с лучом против часовой стрелки дуга длины 1. Составить уравнение и построить эскиз линии, образованной концами дуг.

4.43. Две прямые вращаются в одной плоскости вокруг своих закрепленных точек A и B в одну и ту же сторону, одна вдвое быстрее другой. В начальный момент обе прямые перпендикулярны отрезку AB. Составить уравнение линии, по которой перемещается точка пересечения прямых.

5. Функции и графики

5.1. Найти области определения функций:

a) $y=\dfrac{5}{4-\dfrac{3}{2-\dfrac{1}{x}}}$;

b) $y=\log_2\log_3\log_4\log_5 x$;

c) $y=\sqrt{\left|\left|x-1\right|-2\right|-2}$;

d) $y=\sin\sqrt{x}$.

5.2. Четна или нечетна функция $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$?

5.3. Пусть $\varphi(x)$ — нечетная функция. Доказать, что функция $f(x)=\operatorname{arctg}2^{\varphi(x)}-\dfrac{\pi}{4}$ — также нечетная.

5.4. Функцию $y=\dfrac{1}{1+x}$ представить в виде суммы четной и нечетной функций.

5.5. Показать, что любая функция, определенная на всей оси, единственным образом представляется в виде суммы четной и нечетной функций.

5.6. На интервале (-1,1) задана функция $f(x)=\dfrac{x}{1-|x|}$. Найти обратную функцию.

5.7. Найти $f(f(f(x)))$, если $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$.

5.8. Дана функция $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$. Найти область определения функции $\underbrace{f(f(f(\ldots(f}_{n\text{ раз}}(x))\ldots)))$.

5.9. Верно ли, что $f(g(x))=g(f(x))$, если:

a) $f(x)=2^x,\ g(x)=x^2$;

b) $f(x)=1+\sqrt{x},\ g(x)=\dfrac{1}{1+x}$;

c) $f(x)=[x],\ g(x)=\{x\}$?

5.10. Показать, что если функция $f(x)$ определена при всех действительных x и $f(x+a)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ при некотором $a>0$, то эта функция — периодическая, и найти ее период.

5.11. Доказать, что если для функции $f(x)$, определенной при $-\infty<x<+\infty$, выполняется равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k, T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция.

5.12. Дано: $f(x)=f(2x)=f(\sqrt{2}x+2)$ при любом x. Доказать, что $f(x)$ — периодическая функция, и найти ее наименьший период.

5.13. Определим следующие функции: $\mathrm{sh}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус), $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус), $\mathrm{th}x=\dfrac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x}$ (гиперболический тангенс), $\mathrm{cth}x=\dfrac{1}{\mathrm{th}x}$ (гиперболический котангенс). Докажите следующие формулы: $\mathrm{ch}^2x-\mathrm{sh}^2x=1$, $\mathrm{sh}2x=2\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x$, $\mathrm{ch}2x=\mathrm{ch}^2x+\mathrm{sh}^2x$ и сравните их с обычными тригонометрическими формулами. Выведите формулу для $\mathrm{th}2x$ и другие формулы гиперболической тригонометрии.

5.14. Найти $f(x)$, если:

a) $f(2^x+1)=3^x$;

b) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$;

c) $f(x)-2f\left(\dfrac{1}{x}\right)=2^x$;

d) $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}(y>0)$;

e) $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=x^2$;

f) $f(2^x+2^{-x})=2^x-2^{-x}$.

5.15. Найти $\dfrac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{f(x)}$, если $f\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=x+\sqrt{1+x^4}$ при $x>0$.

5.16. а) Найти $f(x)$, если $f(x)\cdot f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^4+\dfrac{1}{x^4}+2$.

b) Существует ли такая функция $f(x)$, что $f(x)\cdot f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4-\frac{1}{x^4}+2$?

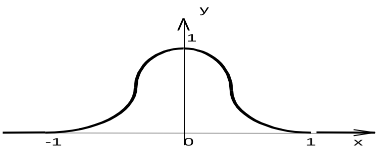
5.17. Известно, что $f(1)=2$ и что при любых x,y $f(xy)=f(x)f(y)-f(x+y)+1$. Найти $f(n)$ для любого целого n.

5.18. Доказать, что не существует таких функций $f(x)$ и $g(y)$, что неравенство $|xy-f(x)-g(y)|<0{,}25$ выполняется для всех x и y из отрезка [0,1].

5.19. a) $f(x)$ — неубывающая функция и $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Доказать, что $f(x)=kx,\ k>0.$

b) Пусть $f(x+y)=f(x)+f(y),\ f(xy)=f(x)f(y),\ f(0)=0,\ f(1)=1.$ Доказать, что $f(x)=x.$

5.20. Дан график функции $y=f(x)$. Построить график функции $y=3-3f(3x-3)$.



5.21. Построить графики функций:

a) $y=\cos(2\arccos x)$;

b) $y=\mathrm{tg}(3\,\mathrm{arctg}\,x)$;

c) $y=100^{\lg\sin x}$;

d) $y=\dfrac{\sqrt{x\sin^2 x}}{\sin x}$.

5.22. Дано: $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\ge 0,\\ 1 & x<0.\end{cases}$ Построить график функции $y=f(f(x))$.

5.23. Описать линию $\cos(x+y)=|x+y|$.

5.24. Сравнить графики функций:

a) $y=x$;

b) $y=\sin(\arcsin x)$;

c) $y=\arcsin(\sin x)$;

d) $\sin x=\sin y$ (рассмотреть как неявную функцию).

5.25. Построить эскизы графиков:

a) $y=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{x-1}}}$;

b) $y=\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{1-x}$;

c) $y=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x+3}\right)$;

d) $y=\sin x+|\sin x|$;

e) $y=[x]\sin \pi x$;

f) $y=\min\{2|x|,|1+x|\}$;

g) $y=x^{x}$;

h) $y=x^{\frac{1}{x}}$.

5.26. Построить графики функций: $y=[x],\ y=\{x\},\ y=\sqrt{[x]},\ y=[\sqrt{x}]$.

5.27. Пусть $a>0$. Какое уравнение имеет больше решений: $a^{x}=x$ или $a^{a^{a^{x}}}=x$?

5.28. Сколько решений имеют уравнения:

a) $x=12{,}6\cos x$;

b) $x=\pi\cos 998x$;

c) $\sin x=\lg x$;

d) $\sin x+|\sin x|=0{,}12x$?

5.29. Функция $f(x)$ определена на всей оси и для любых различных x,y выполнено неравенство $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. Доказать, что если $f(f(f(0)))=0$, то $f(0)=0$.

5.30. Доказать, что в интервале $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ найдутся такие два числа c и d, что $\sin(\cos c)=c,\ \cos(\sin d)=d,$ причем $c<d$.

6. Пределы и непрерывность

6.1. Доказать, что последовательности периметров и площадей правильных n-угольников, вписанных в одну и ту же окружность, возрастают.

6.2. Доказать, что из двух правильных многоугольников с одинаковым периметром большую площадь имеет многоугольник с большим числом сторон.

6.3. a) Верно ли, что $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin x)=\infty$?

b) При каких значениях A найдется такая последовательность значений $x_n\to\infty$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\sin x_n)=A$?

6.4. Существует ли $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{[\mathrm{ctg}x]}$?

6.5. Вычислить следующие пределы или установить, что они не существуют:

a) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$ (рассматривать как два различных предела!);

d) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sqrt{\sin^2\dfrac{1}{x}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}x\sqrt{\sin\dfrac{1}{x^2}}$.

6.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$.

6.7. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$ Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

6.8. Составить такую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \infty$.

6.9. Доказать, что при любом значении x последовательность $y_n = \dfrac{1}{n^2}\big([x] + [2x] + \ldots + [nx]\big)$ имеет предел, и найти его.

6.10. Дана последовательность «биномиальных коэффициентов»:
$v_1 = m,\ v_2 = \dfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}, \ldots, v_n = \dfrac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}, \ldots,$ где m — положительное целое число. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} v_n.$

6.11. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\nu(n)}{n},$ где $\nu(n)$ — число простых множителей числа n.

6.12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $x_1 = 1983$ и $x_{n+1} = \dfrac{2}{2^{x_n}}$ при $n \ge 1$.

6.13. Пусть $x_1 = 0,\ x_{n+1} = \dfrac{1 - x_n^2}{2}$ при $n \ge 1.$ Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.$ Существует ли такой предел при $x_1 = 3$?

6.14. Пусть $c_0{}^2 + c_1{}^2 > 0$ и $c_n = \sqrt{c_{n-1}} + \sqrt{c_{n-2}}$ при $n \ge 2$. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$ существует, и найти его.

6.15. Пусть x_n, y_n — последовательные положительные корни уравнений $x = \mathrm{tg} x$ и $y\,\mathrm{tg} y = 1$ соответственно. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - y_n)$.

6.16. Найти значение выражения $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\ldots}}}}}}$

6.17. Найти значение дроби $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$.

6.18. Найти положительное число a из уравнения $\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a+\ldots}}}=a$.

6.19. Пусть AB — данный отрезок, $M_0 = A, M_1 = B,$ а при $n \geq 2$ M_n — середина отрезка $M_{n-2}M_{n-1}$. Какая точка является пределом последовательности точек M_n?

6.20. Найти предел при $n \to \infty$ отношения проекций сторон AB и BC правильного $2n$-угольника на его большую диагональ, проходящую через вершину A.

6.21. Вычислить:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1^n + 2^n + 3^n + \ldots + 1986^n}$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=n^3}^{(n+1)^3} \dfrac{1}{\sqrt[3]{k^2}}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right)$;

e) $\lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{(x+1)^{100} + (x+2)^{100} + \ldots + (x+N)^{100}}{x^{100} + N^{100}}$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+e^x + e^{2x} + e^{3x} + \ldots + e^{100x})}{\ln(1+e^x)}$.

6.22. Найти значение k, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k - (n-1)^k}{n^{1999}} = 2000$.

6.23. Доказать следующее утверждение: если $p_1 \geq p_2 \geq \ldots \geq p_m \geq 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p_1^n + p_2^n + \ldots + p_m^n} = p_1$.

6.24. Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\cos(\cos(\ldots(\cos x)\ldots))}_{n \text{ раз}}$ существует при любом x и не зависит от x.

6.25. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin(\sin(\ldots(\sin x)\ldots))}_{n \text{ раз}}$ для любого x.

6.26. Вычислить пределы (в каждом случае n корней):
$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1}}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{c+\sqrt{c+\ldots+\sqrt{c}}}$ $(c>0)$.

6.27. Известно, что последовательность $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастает и стремится к числу e. Доказать, что последовательность $y_n = \sqrt[n]{n}$ убывает, начиная с $n = 3$, и найти ее предел.

6.28. Между какими целыми числами лежит число $6(1-1{,}001^{-1000})$?

6.29. Доказать, что при любом x $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{x}{n}\right)^n = 1$.

6.30. Дана последовательность функций: $\varphi_0(x) = |x|$, $\varphi_{n+1}(x) = |\varphi_n(x-1)-1|$ при $n \geq 0$. Построить график функции $F(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(x)$.

6.31. Построить графики функций:

a) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{1+x^n}$;

b) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$;

c) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x^{2n}}{2+x^{4n}}$;

d) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2+x^n}{2-x^n}$;

e) $y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x+e^{tx}}{1+e^{tx}}$;

f) $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{n\cos x}}{1+e^{n\cos x}}$;

g) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1990-2^{nx}}{n+2^{nx}}$;

h) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\,(x\ge 0)$;

i) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n}\,(x\ge 0)$;

j) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$;

k) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln(2^n+x^n)}{n}(x\ge 0)$;

l) $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2-e^{nx}}$;

m) $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\operatorname{arctg}x^n$.

6.32. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2^2}\cos\dfrac{\alpha}{2^3}\ldots\cos\dfrac{\alpha}{2^n}\right)$.

6.33. Вычислить следующие пределы:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\log_n 1990$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{100^n}{n!}$;

e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

f) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+x\sqrt[3]{x^2}}-\sqrt[3]{x}}{\sin x}$;

h) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$;

j) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin(\pi\sqrt[3]{n^3+n})\right)$;

k) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)}{\sin(\sin x)}$;

m) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}6x(\sin x-\cos x)$;

n) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{ax}{a+x}\right)^x\ (a>0)$;

o) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

p) $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}}$;

q) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^2]{\cos x}$;

r) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$;

s) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2^{\frac{1}{x}}}{x+3^{\frac{1}{x}}}\right)^{x^2}$;

t) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left[\dfrac{1}{e}-\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{x}\right]$.

6.34. Дано: $f(x)=\dfrac{a3^x+b3^{\frac{1}{x}}}{c3^x+d3^{\frac{1}{x}}}$ (a, b, c, d — ненулевые числа). Проверить, что $A+B=0$, если $A=\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)-\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

6.35. Что происходит с корнями трехчлена ax^2+bx+c, если $a\to 0$, b и c не меняются, причем $b\neq 0$?

6.36. Что происходит с эллипсом $\dfrac{(x-a)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{2a}=1$ при $a\to\infty$?

6.37. Дана парабола $y=x^2$.

a) Найти центр окружности, пересекающей ее в точках с абсциссами 0, h, $-h$.

b) Что происходит с этим центром при $h\to 0$?

6.38. Трехчлен $f(x)=ax^2+bx+c$ при всех целых x принимает значения, являющиеся квадратами целых чисел. Доказать, что $f(x)=(px+q)^2$, где p и q — целые числа.

6.39. Найти точки разрыва и односторонние пределы функции $y=\dfrac{1}{1+3^{\frac{1}{x}}}$.

6.40. Функция $f(x)$ непрерывна на всей оси и $|f(x)|\le\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]}$. Найти $f(0)$.

6.41. Найти непрерывные на всей оси функции, удовлетворяющие условию $f(x)=f(ax)$, где $a\neq 1$.

6.42. Найти непрерывные на всей оси функции, удовлетворяющие условию $f(x)=f(\sin x)$.

6.43. Найти непрерывную в точке $x=0$ функцию $f(x)$, удовлетворяющую равенству $f(x)-\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{x}{2}\right)=x^2$.

6.44. Функция $f(x)$ непрерывна на всей оси. Известно, что для любой арифметической прогрессии a, b, c, d $|f(a)-f(d)|\geq\pi|f(b)-f(c)|$. Доказать, что $f(x)=\mathrm{const}$.

6.45. Функция $f(x)$ непрерывна на некотором отрезке и среди хорд ее графика нет параллельных. Доказать, что эта функция — линейная.

6.46. Верно ли, что квадрат разрывной функции — разрывная функция?

6.47. Пусть точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат промежутку, на котором функция $f(x)$ непрерывна. Доказать, что на этом промежутке найдется такая точка x_0, что $f(x_0)=\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)$.

6.48. Существует ли непрерывная на всей оси функция, принимающая каждое действительное значение:

a) ровно 2 раза;

b) ровно 3 раза?

6.49. Доказать, что если функция непрерывна и имеет обратную функцию на некотором промежутке, то она монотонна на нем.

6.50. Доказать, что если функция монотонна и имеет обратную функцию на некотором промежутке, то она непрерывна на нем.

6.51. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — взаимно обратные убывающие функции, определенные при $x>0$. Доказать, что уравнение $\varphi(x)=\psi(x)$ имеет решения.

6.52. Доказать, что для любого действительного числа a уравнение $12x^3+12ax^2-8ax-3=0$ имеет решения в интервале $(0,1)$.

6.53. а) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на всей оси и принимает значения разных знаков. Доказать, что найдется арифметическая прогрессия a, b, c с ненулевой разностью такая, что $f(a)+f(b)+f(c)=0$.

b) То же — для прогрессии из n членов.

6.54. Для любой ли непрерывной на всей оси функции $f(x)$ можно подобрать такие непрерывные функции $g(x)$ и $h(x)$, что $f(x) = g(x)\sin x + h(x)\cos x$?

6.55. На плоскости даны произвольный несамопересекающийся многоугольник и точка M. Доказать, что через эту точку можно провести прямую, делящую пополам площадь многоугольника.

6.56. Функция $f(P)$ определена и непрерывна во всех точках окружности. Доказать, что найдутся такие диаметрально противоположные точки A и B, что $f(A) = f(B)$.

6.57. Доказать, что около Каспийского моря можно описать квадрат.

7. Производная

7.1. Вычислить $\lim\limits_{b\to a}\dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$, если $f(x)$ — дифференцируемая функция.

7.2. Построить график производной функции:

a) $y=\dfrac{1}{3}x^2|x|$; b) $y=[x]\sin^2\pi x$.

7.3. Доказать, что функция $f(x)=\left|(x-1)^2(x-2)^3\right|$ всюду дифференцируема, а функция $f(x)=\left|(x-1)(x-2)\right|$ не имеет производной при x=1 и x=2.

7.4. При каком значении a функция $f(x)=\left(|x|-a\right)^3-3|x|$ имеет производную в точке $x=0$?

7.5. Вычислить левую и правую производные в точке x=0 функций:

a) $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$;

b) $y=\dfrac{1}{2}[\varphi(x)+|\varphi(x)|]$, где $\varphi(x)=x^2+x$.

7.6. Даны следующие функции: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $\varphi(x)=xg(x),\ \psi(x)=x^2g(x),\ \chi(x)=\sqrt[3]{x}g(x).$

Являются ли они непрерывными и дифференцируемыми при $x=0$? Построить эскизы графиков $y=g(x),\ y=\varphi(x)$.

7.7. Дифференцируема ли функция $y=\begin{cases}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\end{cases}$ при $x=0$?

7.8. При каких a, b функция $f(x)=\begin{cases} a, & x=0, \\ b, & x=1, \\ \dfrac{x\ln x}{x^2-1}, & x>0,\ x\neq 1, \end{cases}$

a) непрерывна справа при $x=0$;

b) дифференцируема при $x>0$?

7.9. Проверить, что производные всех порядков функции $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ в точке $x=0$ равны нулю.

7.10. Доказать, что производная четной функции нечетна, а производная нечетной — четна. Верны ли обратные утверждения?

7.11. Функция $f(x)$ определена при всех действительных x. Известно, что для любых x_1, x_2 справедливо неравенство $|f(x_2)-f(x_1)|\leq k|x_2-x_1|^2$, где k — положительное число. Доказать, что $f(x)=\mathrm{const}$.

7.12. Пусть при любых x и y выполняется неравенство $|f(x)-f(y)|\leq 1997|x-y|^{\frac{1998}{1997}}$. Доказать, что $f(x)=\mathrm{const}$.

7.13. Найти производные функций:

a) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

b) $y=x^{x^x}$;

c) $\arccos(\cos^2 x)$ (ответ упростить).

7.14. a) Проверить, что $\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x+a}{1-ax}\right)'=(\operatorname{arctg}x)'$.

b) Объяснить результат, не вычисляя производных.

7.15. Найти $\dfrac{y'}{y}$, если $y=\left(\dfrac{a}{b}\right)^x\left(\dfrac{b}{x}\right)^a\left(\dfrac{x}{a}\right)^b$.

7.16. Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$, если $x^y=y^x$.

7.17. Проверить, что $y''' = y'(y'-1)(2y'-1)\ln^2 A$, если $A^x + A^y = A^{x+y}$.

7.18. Найти $\frac{dy}{dx}$ в точке (0;0), если $(1+y)(1+x|x|) = y^7 + 2\sin y.$

7.19. Вычислить производные гиперболических функций (см. задачу 5.13).

7.20. Найти все многочлены $P(x)$, для которых $P\big(P'(x)\big) = P'\big(P(x)\big) \equiv 1$.

7.21. Доказать, что не существует многочлена $P(x)$, удовлетворяющего на всей оси неравенству $P'(x)P''(x) > P(x)P'''(x)$.

7.22. Найти $f(x)$, если $f(x) + f(x-1) = x$ и $f'(x-1) = f'(x)$.

7.23. Дано: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ и для некоторых положительных чисел $x_1,\ x_2$ $f(x_1) = f(0),\ f'(x_2) = 0$. Найти $\frac{x_1}{x_2}$.

7.24. Найти многочлен $P(x)$ и число A из равенства $\left(P(x)e^{x^2}\right)' = (x^6 + A)e^{x^2}$.

7.25. Известно, что $y'' + y' + y = 0$, где $y = e^{px}\cos qx$. Найти p и q.

7.26. Дано: $y = x\sin x$. Найти многочлены $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ из равенства $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0$.

7.27. Вычислить $y^{(10)}, y^{(n)}$:

a) $y = \sqrt{x}$;

b) $y = \dfrac{1}{2-x}$;

c) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$;

d) $y = \dfrac{1}{x^2 - x}$;

e) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$;

f) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt[3]{1-x}}$;

g) $y = \dfrac{x}{e^x}$;

h) $y = x^2 e^x$;

i) $y = x^2\cos 2x$.

7.28. Вычислить производную 30-го порядка от функции $y = x\cos x$.

7.29. Построить график функции $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1})$.

7.30. Показать, что $(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

7.31. Вычислить $y^{(100)}$, если:

a) $y = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$;

b) $y = \dfrac{x^{100}}{1-x}$.

7.32. Найти отношение сотых производных функций $u = \dfrac{1}{x-1}$ и $v = \dfrac{x^{100}}{x-1}$.

7.33. Вторая производная некоторой функции равна разности ее первой производной и самой функции. Найти отношение этой функции и ее 1998-ой производной.

7.34. Вычислить:

a) $(x^{1983}\ln x)^{(1984)}$;

b) $(\sin x \sin 2x \sin 4x)^{(1985)}$;

c) $(\cos^4 x)^{(1988)}$.

7.35. Вычислить $y^{(1987)} - 2y^{(1986)} + y^{(1985)}$, если $y = (Mx + N)e^x$.

7.36. Показать, что если $y = \cos^3 x$, то $\left|y^{(k)}(x)\right| \le \dfrac{3^k + 3}{4}$.

7.37. Доказать, что:

a) $\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$;

b) $\left(x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^{(n)} = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

7.38. Доказать, что выражение $\frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$ не изменится при замене y на $\frac{1}{y}$.

7.39. Точка движется по прямой так, что скорость v и пройденный путь s связаны равенством $v = s^2 - 2s + 2$. Найти ускорение точки:

a) в начальный момент;

b) при $s = 1$ и $s = 2$.

7.40. Составить параметрические уравнения вида $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ (φ и ψ — дифференцируемые функции), задающие на плоскости границу квадрата.

7.41. Объяснить геометрический смысл формул:

a) $\frac{d}{da}\left(a^3\right) = 3a^2$;

b) $\frac{d}{dr}\left(\pi r^2\right) = 2\pi r$;

c) $\frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2$.

Доказать их, исходя из определения производной.

7.42. Пусть AB — диагональ куба с ребром 1, M — точка на ней, причем $|AM| = x$. Построить графики функций $y = S(x)$ и $y = V(x)$, где $S(x)$ — площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точку M перпендикулярно к диагонали, $V(x)$ — часть объема куба, отсеченного этой плоскостью. Убедиться и объяснить, что $S(x) = V'(x)$.

8. Приложения дифференциального исчисления

8.1. Проверить, что все параболы $y = px^2$ пересекают эллипс $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ под прямым углом.

8.2. Доказать, что при любых a и b гиперболы $xy = a$ и $x^2 - y^2 = b$ пересекаются под прямым углом.

8.3. Пусть точка $A(2,1)$ лежит внутри гладкой замкнутой кривой $F(x, y) = 0$, а точка $B(-1,3)$ — ближайшая к A точка кривой. Записать уравнение касательной к кривой в точке B.

8.4. Доказать, что из каждой точки своей директрисы парабола видна под прямым углом.

8.5. Составить уравнения касательных, проведенных из точки $(4;-1)$ к эллипсу $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$.

8.6. Составить уравнение параболы, касающейся эллипса $4x^2 + y^2 = 5$ в точках с ординатой -1.

8.7. Найти площадь прямоугольника, описанного около эллипса $\frac{x^2}{16} + 15y^2 = 1$, если одна из точек касания имеет абсциссу 1.

8.8. Под каким углом спираль Архимеда $\rho = \varphi$ первый раз пересекает полярную ось?

8.9. Найти расстояние от параболы $y = x^2$ до прямой $x - y = 2$.

8.10. Найти кратчайшее расстояние от эллипса $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ до прямой $2x + y = 5$.

8.11. Какая точка параболы $y^2 = 2p(x+1)$ находится ближе всех к началу координат?

8.12. Построить график функции $y = d(x)$, где $d(x)$ —

расстояние от точки $(x,0)$ до ближайшей к ней точки параболы $x=y^2$.

8.13. Пусть P — точка, лежащая на гиперболе $xy=4$, а Q — точка эллипса $x^2+4y^2=4$. Доказать, что $|PQ|\geq 1$.

8.14. На графиках функций $y=x^3$ и $y=(x-8)^3$ найти по точке, расстояние между которыми минимально.

8.15. Найти расстояние между графиками функций $y=e^{1988x}$ и $y=\dfrac{1}{1988}\ln x$.

8.16. Пусть $M_0(x_0,y_0)$ — данная точка эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Найти на нем такую точку M, чтобы треугольник OM_0M имел наибольшую возможную площадь. Зависит ли эта площадь от M_0?

8.17. Доказать, что все прямоугольники, описанные около данного эллипса, имеют одинаковую площадь.

8.18. Найти длину наибольшего вертикального отрезка, находящегося внутри:

a) кардиоиды $\rho=1+\cos\varphi$;

b) лемнискаты $\rho^2=2a^2\cos 2\varphi$.

8.19. Пусть $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos x & \cos 3x & \cos 101x \\ u(x) & v(x) & w(x) \end{vmatrix}$, где функции u, v, w дифференцируемы на отрезке $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. Доказать, что на этом отрезке существует корень уравнения $f'(x)=0$.

8.20. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[a,b]$. Доказать, что внутри отрезка найдется такая точка c, что $\dfrac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix}=f(c)-cf'(c)$.

8.21. («Обращение» теоремы Лагранжа). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке интервала (a,b). Верно ли, что для любого $c \in (a,b)$ найдутся такие x_1, x_2, что $f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$?

8.22. Показать, что для любой дважды дифференцируемой на всей оси функции $f(x)$ и любой точки x найдется такое $c \in (x; x+2)$, что $f(x) - 2f(x+1) + f(x+2) = f''(x)$.

8.23. (Теорема о промежуточных значениях производной). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка $[0,1]$ и $f'(0)f'(1) < 0$. Доказать, что $f'(x)$ обращается в нуль в некоторой точке отрезка.

8.24. Показать, что функция $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ возрастает при $x > 0$.

8.25. Дано: $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+1986}$.

a) Сколько экстремумов имеет функция $f(x)$?

b) Сколько решений имеет уравнение $f(x) = 0$?

8.26. Доказать, что уравнение $x^4 - 4x - 1 = 0$ имеет ровно два действительных корня.

8.27. Даны числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Найти такое число a, чтобы величина $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a)^2$ была наименьшей.

8.28. Найти наибольшее число в последовательности $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+150}$.

8.29. Найти наибольшее число в последовательности $x_n = \frac{n^2}{1{,}001^n}$.

8.30. При каком a линии $y = ax^2$ и $y = \ln x$ касаются?

8.31. При каком значении a параболы $y = x^2$ и $x = y^2 + a$ касаются?

8.32. Найти все положительные числа a, такие, что неравенство $a^x \geq ax$ справедливо для всех x.

8.33. При каких значениях a уравнение $x^a = \ln x$ имеет ровно одно решение?

8.34. При каком основании системы логарифмов в ней могут существовать числа, равные своим логарифмам?

8.35. Определить число решений следующих уравнений в зависимости от числа a:

a) $x^3 = a + x$;

b) $x = a^x$;

c) $\ln x = ax$.

8.36. При каких условиях уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет:

a) один корень;

b) два корня?

8.37. Найти область определения функции $y = \sqrt{1 + x - e^x}$.

8.38. Найти экстремумы функции $y = \arcsin \dfrac{2x}{1+x^2}$.

8.39. Сколько экстремумов имеет функция $y = x^2 + \pi|\cos x|$?

8.40. Найти наименьшее значение функции $y = \left|x^2 - 10\right| + 6|\sin x|$ на отрезке [3;4].

8.41. При каком значении a уравнение $(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = a$ имеет единственное решение?

8.42. Доказать, что если $0 \leq x \leq 1$ и $p > 1$, то $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leq x^p + (1-x)^p \leq 1$.

8.43. Пусть x, y, α, β — положительные числа, причем $\alpha + \beta = 1$. Доказать неравенство $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$.

8.44. Доказать, что:

a) $x > \ln(1+x)$ при всех $x > 0$;

b) $1 + 2\ln x \leq x^2$ при всех $x > 0$;

c) $e^x > 1 + (1+x)\ln(1+x)$ при всех $x > 0$;

d) $\ln x > 2\dfrac{x-1}{x+1}$ при $x > 1$;

e) $\dfrac{\ln x}{x-1} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ при $x>0, x\ne 1$;

f) $\sin x \ge \dfrac{2}{\pi}x$ при $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

g) $\sin x + \mathrm{tg}x > 2x$ при $x \in \left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

h) $x\cos x < 0{,}6$ при всех $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

i) $\cos^2 x \sin x < 0{,}4$ при всех $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$;

j) $\arcsin x \arccos x \le \dfrac{\pi^2}{16}$ при всех $x \in [-1,1]$;

k) $\dfrac{\sin x}{\sin y} > \dfrac{x}{y}$ при $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$.

8.45. Найти числа *a*, *b*, *c*, *d* из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x + ax + bx^3 + cx^5}{x^7} = d$.

8.46. Найти числа a, b, c из равенства $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(\sqrt{1+x^2} - bx - \dfrac{c}{x}\right) = a.$

8.47. Вычислить:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x - \ln^{10} x)$;

b) $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x^3]{1-x+\sin x}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}(\sin x) - \sin(\mathrm{tg}x)}{\mathrm{tg}x - \sin x}$.

8.48. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0+0} x^{x^{\varepsilon}} = 1$ при любом положительном ε.

8.49. Доказать, что уравнение $x = 1992 + (\ln x)^{1992}$ имеет хотя бы одно решение.

8.50. Сколько решений имеет уравнение $x = 1{,}001^x$?

8.51. Сколько положительных корней имеет уравнение

$x^{x+1} + x^x = 1$?

8.52. Дано: $0 < x < y,\ x^y = y^x$. Доказать: $1 < x < e < y$.

8.53. Что больше: e^π или π^e; 99^{101} или 101^{99}?

8.54. Найти все действительные решения уравнения $xe^{-x} + e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - 1 = 0$.

8.55. a) Известно, что $x + e^x = y + e^y$. Верно ли, что $\sin x = \sin y$?

b) Известно, что $x^2 + e^x = y^2 + e^y$. Верно ли, что $\mathrm{arctg} x = \mathrm{arctg} y$?

8.56. Доказать неравенства:

a) $\dfrac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$ при $x \geq 0, y \geq 0, n \geq 1$;

b) $\dfrac{e^a - e^b}{a - b} < \dfrac{e^a + e^b}{2}$ при $a \neq b$;

c) $e^{px_1 + qx_2} \leq pe^{x_1} + qe^{x_2}$ при $p + q = 1$ и любых x_1, x_2.

8.57. Что больше: $\sqrt{1998} + \sqrt{2000}$ или $2\sqrt{1999}$ (вычисления на калькуляторе не являются доказательством!)?

8.58. При каких значениях a график функции $y = e^x + ax^3$ имеет точки перегиба?

8.59. Показать, что все точки перегиба линии $y = x \sin x$ лежат на кривой $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

8.60. Доказать, что график любого многочлена третьей степени имеет точки перегиба.

8.61. Может ли график многочлена четвертой степени иметь ровно одну точку перегиба?

8.62. Функцию $y = \sin x$ представить как разность двух выпуклых на всей оси функций.

8.63. Верно ли, что произведение двух выпуклых (вогнутых) на некотором интервале функций — также выпуклая (вогнутая) на этом интервале функция?

8.64. Функция $f(x)$ вогнута при $x \geq 0$ и $f(0) = 0$. Доказать, что функция $\frac{f(x)}{x}$ возрастает при $x \geq 0$.

8.65. Пусть для дважды дифференцируемой вектор-функции $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ при любом t будет $\mathbf{r}(t)\mathbf{r}''(t) > 0$. Доказать, что годограф этой вектор-функции — кривая не замкнутая.

8.66. Доказать, что кривизна плоской кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, выражается формулой: $k = \frac{\left|\rho''\rho - 2(\rho')^2 - \rho^2\right|}{\left((\rho')^2 + \rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. Пользуясь этой формулой, найти кривизну линий $\rho = \frac{a}{\cos\varphi}$, $\rho = 2a\cos\varphi$, $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$ в любой точке, спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ в полюсе.

8.67. Доказать, что уравнение $(x+y)\ln(x+y) = 1$ задает прямую.

8.68. Построить график функции $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$.

8.69. Найти многочлен наименьшей степени, принимающий максимальное значение 6 при $x = 1$ и минимальное значение 2 при $x = 3$.

8.70. Найти многочлен наименьшей степени, график которого имеет три точки перегиба: $M_1(-1,1)$, $M_2(1,1)$ и точку M_3 с абсциссой 0, в которой график наклонен к оси абсцисс под углом 60°.

8.71. Стальной брус имеет в поперечном сечении фигуру $2(1-x^2) \geq y \geq x^2 - 1$. Можно ли хранить такой брус на стеллаже, расстояние между полками которого равно $\frac{3\sqrt{7}}{4}$?

8.72. Скорость вылета артиллерийского снаряда равна v. Определить наибольшую дальнобойность на ровной местности орудия (сопротивлением воздуха пренебречь):

a) стоящего на земле;

b) поднятого на высоту h.

8.73. Даны три пункта A, B, C, причем $\angle ABC = 60^\circ$ и $AB = 200$

км. Из п. A в п. B со скоростью 80 км/ч выезжает автомобиль и одновременно из п. B в п. C со скоростью 50 км/ч — поезд. Найти наименьшее расстояние между автомобилем и поездом и время, когда оно реализуется.

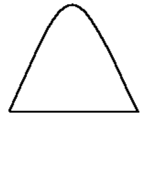
8.74. Сигнал с корабля можно различить в море на расстоянии одной мили. Корабль A идет на юг, делая 6 миль в час, корабль $Б$ движется на запад со скоростью 7 миль в час. В настоящий момент A находится в 5 милях к западу от $Б$. Увидят ли на кораблях сигналы друг друга? Решить задачу в общем виде при скоростях кораблей v_1, v_2 и начальном расстоянии между ними d.

8.75. Две лампы мощностью 50 и 100 Вт висят на высоте 15 м над дорогой на расстоянии 10 м друг от друга. Найдется ли на дороге точка, одинаково освещенная обеими лампами, если считать, что освещенность пропорциональна мощности лампы и обратно пропорциональна квадрату расстояния до нее?

8.76. Освещенность площадки, находящейся на расстоянии r от точечного источника света, при условии, что нормаль к ней составляет угол α с направлением лучей, равна $\frac{I\cos\alpha}{r^2}$, где I — сила света источника. На какой высоте надо подвесить лампу над центром круглого стола радиуса 1 м, чтобы освещенность на его краю была наибольшей?

8.77. Батарейка с ЭДС E и внутренним сопротивлением R нагружена электронагревательным прибором. При какой величине сопротивления прибора выделяемое в нем тепло будет наибольшим?

8.78. Сферическое яйцо надо сварить в цилиндрической кастрюле данного радиуса. При каком радиусе яйца потребуется больше воды, чтобы закрыть его целиком?



8.79. Тоннель имеет горизонтальное основание и параболический свод. Ширина основания и высота равны по 4 м. Найти наибольший диаметр трубы, которую можно разместить внутри тоннеля.

8.80. Поле граничит с лесом по прямой линии. В поле на расстоянии 200 м от леса находится заяц, а посередине между ним и лесом — волк. Какова длина наиболее короткого прямолинейного (безопасного) маршрута зайца к лесу, если его скорость вдвое больше скорости волка?

8.81. По краю леса проходит прямолинейная дорога. Человек находится в лесу в 5 км от дороги и в 13 км от своего дома, стоящего у дороги. Он может идти со скоростью 3 км/ч по лесу и 5 км/ч по дороге. Как ему быстрее добраться домой?

8.82. Поселки А и Б находятся на расстоянии 1 км друг от друга и на таком же расстоянии каждый из них находится от прямолинейного водовода. Как соединить оба поселка с водоводом при минимальном расходе труб?

8.83. Вертолет должен пролететь 25 км на север, затем 200 км на восток при постоянном по скорости и направлению ветре, причем скорость ветра равна собственной скорости вертолета. При каком направлении ветра на полет уйдет наименьшее время?

8.84. Корабль А бросил якорь в 9 км от ближайшей к нему точки О прямолинейного берега. Корабль Б стоит в 3 км от берега напротив точки берега, расположенной в 6 км от О. Моторная лодка отчаливает от корабля А, плывет к некоторой точке на берегу, забирает там пассажира и кратчайшим путем доставляет его на борт Б. Один километр пути обходится владельцу лодки в 5 долларов, а пассажир платит 10 долларов за 1 км пути. Где следует владельцу лодки назначить встречу с пассажиром?

8.85. Затраты на 1 час движения поезда при скорости v км/ч исчисляются по формуле $C = 1000 + v^3/1000$. При какой скорости затраты на 1 км пути будут наименьшими?

8.86. Один экскаватор может вырыть котлован нужного размера за 4 недели, а один бульдозер — засыпать его за 1 неделю. Сколько надо экскаваторов и бульдозеров для скорейшего выполнения всей работы, если всего разрешено использовать n машин?

8.87. Завод находится в 100 км к северу от железной дороги, по которой с востока доставляется сырье. Как следует проложить автомобильную дорогу от завода до железной дороги, чтобы затраты на доставку сырья были наименьшими, если перевозка 1 т груза на 1 км по автомобильной дороге обходится вдвое дороже, чем по железной дороге?

8.88. Один робот стоимостью 2000 долларов выполнит всю работу за 1000 дней. Сколько надо купить роботов для выполнения всей работы с наименьшими затратами, если технику-контролеру надо платить 50 долларов в день независимо от числа роботов?

8.89. Кооператив «Грузовик» подрядился перевезти груз на расстояние 480 км не более чем за 20 часов, получая 2500 рублей за каждый сэкономленный час. Затраты (в рублях) на 1 час перевозки численно равны квадрату скорости (в км/ч). Какую наибольшую прибыль может получить кооператив?

8.90. Пилот самолета, летящего прямолинейно с удвоенной скоростью звука, видит впереди себя под углом α к курсу самолета вспышку молнии. Каковы значения α, при которых он услышит и гром? Считать, что свет распространяется мгновенно.

8.91. Найти наибольшую площадь равнобедренной трапеции, если ее основание равно 13 см, а периметр — 28 см.

8.92. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади при данной сумме гипотенузы и большего катета.

8.93. Найти круговой сектор наименьшего периметра при данной площади S.

8.94. Найти наибольший объем цилиндра, вписанного в данный шар.

8.95. Найти наибольший объем конуса при данной длине образующей.

8.96. Чему равна наименьшая боковая поверхность конуса объема 1?

8.97. Какое сечение кругового конуса плоскостью, проходящей через его вершину, имеет наибольшую площадь?

8.98. Оконная ниша имеет форму прямоугольника, на который опирается полукруг. Периметр ниши должен равняться P. При какой ширине ниши она будет иметь наибольшую площадь?

8.99. В данную окружность вписан круговой сектор (с вершиной, лежащей на окружности) наибольшей возможной площади. Острым или тупым является внутренний угол сектора?

8.100. Из данного квадратного листа жести вырезать развертку правильной четырехугольной пирамиды наибольшего объема.

8.101. Из куба вырезать круговой конус наибольшего объема (ось конуса должна совпадать с диагональю куба).

8.102. На оси достаточно глубокого параболического зеркала, фокус которого удален от вершины на 10 см, на расстоянии 80 см от вершины находится муха, желающая поскорее сесть на зеркало. Куда ей лететь?

8.103. (Задача Кеплера.) Отверстие в цилиндрической бочке находится на половине высоты. Наибольшая длина палки, входящей через отверстие в бочку, равна 1 м. Каков наибольший возможный объем бочки?

8.104. Два коридора ширины a и b пересекаются под прямым углом. Найти наибольшую длину трубы, которую можно пронести горизонтально из одного коридора в другой.

8.105. В оптике известен следующий *принцип Ферма*: из всех возможных путей между двумя точками световой луч выбирает тот путь, для которого время движения минимально. Выведите из принципа Ферма закон преломления света на прямолинейной границе двух сред со скоростями света в каждой c_1 и c_2.

9. Функции нескольких переменных

9.1. Найти и построить области определения функций:

a) $z=\sqrt{\sin x\sin y}$;

b) $z=\sqrt{\sin x}\sqrt{\sin y}$;

c) $z=\sqrt{\dfrac{\sin x}{x-y}}$;

d) $z=\sqrt{y\sin\sqrt{x^2+y^2}}$;

e) $z=\sqrt{y\,\mathrm{tg}(x-y^2)}$;

f) $z=\arcsin\dfrac{x}{x+y}$;

g) $z=\sqrt{\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2-1}}$;

h) $z=\sqrt{\dfrac{x^2-y-2}{x^2-y^2}}$;

i) $z=\sqrt{1-x^4-y^2+2x^2y}$;

j) $z=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2-1}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}}$;

k) $z=\dfrac{1}{\sqrt{2-x^2}-\sqrt{1-y^2}}$;

l) $z=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{1-y^2}}$;

m) $z=\sqrt{2^{x+1}-y^2-4}+$
$+\sqrt{y-2^{x-1}}$;

n) $z=\ln\dfrac{1-x^2-4y^2}{4x^2+y^2-1}$.

9.2. Составить элементарную функцию двух переменных, область определения которой состоит:

a) из двух точек;

b) из прямой и точки.

9.3. Найти $f(x,y)$, если $f(x+y,x-y)=xy-y^2$.

9.4. Верно ли, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0{,}0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0{,}0)$, если

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0\,? \end{cases}$$

9.5. В выражении $\dfrac{\left(x\dfrac{\partial f}{\partial y}-y\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)}{x^2+y^2}$ перейти к полярным координатам.

9.6. a) Существует ли $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$?

b) Имеет ли функция $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x=y=0,\end{cases}$ частные производные в точке (0,0)? Непрерывна ли она в этой точке?

9.7. Построить пример функции, непрерывной в точке (x_0, y_0) и имеющей в этой точке локальный минимум на любой прямой, проходящей через эту точку, но не имеющей в этой точке минимума по совокупности переменных.

9.8. a) Сколько различных производных третьего порядка имеет функция пяти переменных?

b) Сколько различных производных порядка k имеет функция n переменных?

9.9. Найти du, если:

a) $u = x^{y^z}$;

b) $u=(x^y)^z$.

9.10. Функция $z = f(x,y)$ называется однородной степени s, если $f(kx,ky)=k^s f(x,y)$ для любого положительного числа k. Доказать, что для такой функции верно тождество $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=sz$.

9.11. Найти $a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если неявная функция z задана уравнением $\varphi(cx-ay, cy-bz)=0$, где $\varphi(u,v)$ — дифференцируемая функция двух переменных.

9.12. Функция $f(x,y)$ обращается в 0 в точке (0,0), всюду непрерывна, а обе ее частные производные в любой точке (x,y) не превосходят $|x-y|$. Доказать, что $|f(5,4)|\le 1$.

9.13. Найти линейную функцию $\bar{y}=ax+b$, являющуюся наилучшим приближением функции $y=x^2$ на отрезке [2,4]:

a) по критерию наибольшего отклонения (т.е. требуется минимизировать величину $\max\limits_{x\in[2;4]}\left|x^2-(ax+b)\right|$);

b) по критерию наименьших квадратов (т.е. требуется минимизировать величину $\int\limits_2^4 (x^2-(ax+b))^2 dx$).

9.14. Веревку длиной 12 м разрезать на 3 части длиной x, y, z так, чтобы величина xy^2z^3 приняла наибольшее возможное значение.

9.15. Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, h — высота, проведенная к ней. Доказать, что $a+b<c+h$.

9.16. При построении трансформатора переменного тока важно, чтобы внутренность катушки круглого сечения была по возможности заполнена ядром крестообразного сечения (крест полностью лежит внутри круга). Найти наибольшее возможное значение отношения площади креста к площади круга.

9.17. Вдоль прямого шоссе на расстоянии 500 метров друг от друга стоят два дома, в каждом можно поселить до 20 человек. Как следует расселить 30 человек и где сделать на шоссе остановку автобуса, чтобы минимизировать ежедневную суммарную ходьбу от дома до остановки?

10. Неопределенный интеграл

10.1. Найти все функции $f(x)$, для которых:

a) $f''' = 0$;

b) $f'' = |x|$;

c) $f''' = |x|$.

10.2. Построить график $y = f(x)$, если $f'(x) = |\sin x|$.

10.3. Решить уравнение $y(x) = 0$, если $y'(x) + y(1) = 0,\ y(0) = 0$.

10.4. Доказать, что если приращение непрерывной функции зависит только от h и не зависит от x: $f(x+h) - f(x) = \varphi(h)$, то $f(x)$ — линейная функция.

10.5. Для каких функций справедлива «формула» $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g'}$ (выразить f через g).

10.6. a) Доказать, что производная периодической функции — периодическая функция.

b) Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно (первообразная периодической функции может быть непериодической).

c) При каком дополнительном условии обратное утверждение верно?

10.7. Найти $f(x)$, если:

a) $f'(\cos^2 x) = \sin^2 x$;

b) $f'(\sin^2 x) = \cos 2x + \mathrm{tg}^2 x$.

10.8. Последовательность функций $\varphi_n(x)$ построена по правилу: $\varphi_{n+1} = (x\varphi_n)'$. Известно, что $\varphi_{1987}(x) \equiv 0$. Найти общий вид $\varphi_0(x)$.

10.9. Найти ошибку в следующем вычислении:

$$\int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \frac{\sin x}{\sin x} - \int \sin x d\left(\frac{1}{\sin x}\right) = 1 - \int \sin x\left(-\frac{\cos x}{\sin^2 x}dx\right) =$$

$$= 1 + \int \frac{\cos x}{\sin x}dx,$$ из которого следует, что 0=1.

10.10. Вычислить:

a) $\int xf''(x)dx$; b) $\int x^2 f'''(x)dx$; c) $\int x^n f^{(n+1)}(x)dx$.

10.11. Вычислить неопределенные интегралы:

a) $\int \frac{x^{2n-1}}{x^n+1}dx$;

b) $\int \frac{x^2}{(3-x)^7}dx$;

c) $\int \sqrt[3]{x^{13}-x^9}\,dx$;

d) $\int x^3(x^2-10)^{500}dx$;

e) $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$;

f) $\int \frac{dx}{x(x^{100}+1)}$;

g) $\int \frac{1+x^4}{1+x^6}dx$;

h) $\int \frac{x^5dx}{x^6+x^3+1}$;

i) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

j) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{\sin^3 x\cos^{17} x}}$;

k) $\int \frac{\sin x\sin 2xdx}{\sin^4 x+\cos^4 x+1}$;

l) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x}dx$;

m) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

n) $\int \sqrt{\frac{e^x+1}{e^x+2}}dx$;

o) $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$;

p) $\int x\mathrm{tg}^2 xdx$;

q) $\int x^{10}e^{-x}dx$;

r) $\int x\ln(4+x^4)dx$;

s) $\int \frac{\ln(\ln x)}{x\ln^2 x}dx$;

t) $\int \cos(\ln x)dx$;

u) $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}dx$;

v) $\int x\mathrm{arctg}^2 xdx$;

w) $\int \left(\frac{\mathrm{arctg}\,e^x}{e^x}\right)^2 dx$.

10.12. Вывести формулы понижения показателя n для следующих интегралов:

a) $I_n=\int \mathrm{tg}^n x$;

b) $I_n=\int (x^2-1)^n dx$;

c) $I_n=\int \frac{dx}{(1+x^7)^n}$;

d) $I_n=\int \sin^n x$;

e) $I_n=\int \cos^n x$;

f) $I_n=\int \arcsin^n x$.

11. Определенный интеграл и его приложения

11.1. Функция $f(x)$ интегрируема на отрезке [0,1], причем $\int_0^1 f(x)dx > 0$. Доказать, что существует отрезок $[a,b] \subset [0,1]$, на котором функция положительна.

11.2. Вычислить следующие пределы, рассмотрев их как пределы интегральных сумм:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\pi\right)$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right)$;

c) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2 + i^2}$;

d) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(n+i)^2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{n+i}{n^3}}$;

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n^2} e^{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{4}{n^2} e^{\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \frac{6}{n^2} e^{\left(\frac{3}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{2n}{n^2} e^{\left(\frac{n}{n}\right)^2}\right)$;

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}$ (при каких k предел существует?).

11.3. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n}$.

11.4. Функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке [0,1]. Доказать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{f\left(\frac{1}{n}\right) f\left(\frac{2}{n}\right) \ldots f\left(\frac{n}{n}\right)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}$.

11.5. Вычислить:

a) $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\cos 2x}\,dx$;

b) $\int\limits_0^{2\pi} \arcsin(\sin x)\,dx$;

c) $F(x) = \int\limits_0^{x} (t + \int\limits_0^{t} z dz)dt$;

d) $\Phi(z) = \int\limits_{-z}^{z} (t^2 + \int\limits_0^{\sqrt{t}} xe^{-x^2} dx)dt$.

11.6. При каком b будет $\int\limits_b^{b+2} xdx = 6$?

11.7. При каком значении параметра a интеграл $\int\limits_0^{3} |x-a|dx$ имеет наименьшее значение?

11.8. Дано: $a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3} + \ldots + \frac{a_n}{n+1} = 0$. Доказать, что многочлен $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ имеет корни на интервале (0,1).

11.9. Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, удовлетворяющий равенствам $\int\limits_{-1}^{1} P(x)dx = \int\limits_{-1}^{1} x^{10} P(x)dx = 4$.

11.10. Пусть $I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x dx$ при $n = 0,1,2,\ldots$ Показать, что при $n>2$ будет $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$. Вывести отсюда неравенства $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)}$.

11.11. Найти коэффициенты c_1, c_2, c_3 квадратурной формулы $\int\limits_0^{3h} f(x)dx \approx c_1 f\left(\frac{h}{2}\right) + c_2 f\left(\frac{3h}{2}\right) + c_3 f\left(\frac{5h}{2}\right)$, точной для всех многочленов второй степени. Будет ли эта формула точной для многочленов третьей степени?

11.12. Найти все непрерывные функции, удовлетворяющие равенству $\int\limits_0^1 f(\alpha x)dx = f(\alpha)$ для любого числа α.

11.13. Найти все функции $\varphi(x)$, определенные на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющие равенству $\varphi(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — данная функция.

11.14. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $(0,\infty)$ и при всех положительных a, b, k $\int\limits_{ka}^{kb} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$. Найти $f(x)$.

11.15. Вычислить:

a) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_0^x \dfrac{dt}{\ln(1+t)}$; b) $\dfrac{d}{dx}\int\limits_{x^3}^{\sin x} f(u)du$.

11.16. Доказать, что функция $f(x)$ — периодическая, если она непрерывна на всей оси и $\int\limits_x^{x+1} f(t)dt = 0$ для любого x.

11.17. Найти dz, если:

a) $z(x,y) = \int\limits_x^{x^2+y^2} f(t)dt$; b) $z(x,y) = \int\limits_x^{y\cos x} f(t)dt$.

11.18. Вычислить:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 \cos x^n dx$;

b) $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{\delta}\int\limits_{-\delta}^{\delta}\dfrac{\sin x}{x}dx$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int\limits_0^x \dfrac{\sin t}{\sqrt[3]{t}}dt}{x\sqrt[3]{x^2}}$.

11.19. Найти область определения функции $F(x)=\sqrt{\int\limits_0^x \sqrt[3]{\cos t}\,dt}$.

11.20. Доказать, что:

a) $\int\limits_0^{10} \frac{xdx}{x^3+16} \le \frac{5}{6}$;

b) $\frac{1}{20\sqrt[3]{2}} < \int\limits_0^1 \frac{x^{19}dx}{\sqrt[3]{1+x^6}} < \frac{1}{20}$;

c) $1 < \int\limits_0^1 e^{x^2}dx < \frac{e+1}{2}$;

d) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}dx > 0$;

e) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\cos x}{x+1}dx > 0$;

f) $1 < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\pi}{2}$;

g) $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ при $a > b > 0$.

11.21. Какой знак имеет:

a) $\int\limits_{-0,001}^{0,001} \sqrt[3]{x}e^x dx$;

b) $\int\limits_0^{\sqrt{2\pi}} \sin(x^2)dx$;

c) $\int\limits_0^2 \sqrt[3]{x^2-1}dx$?

11.22. Что больше:

a) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\sin x dx$ или $\int\limits_0^1 \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}dx$?

b) $\int\limits_0^{\pi} e^{\sin^2 x}dx$ или $\frac{3}{2}\pi$?

c) $\int\limits_a^b \min\bigl(f(x), g(x)\bigr)dx$ или $\min\left(\int\limits_a^b f(x)dx, \int\limits_a^b g(x)dx\right)$?

11.23. На отрезке $[a,b]$ $0 < f(x) < 1$. Доказать, что при любых $x \in (a,b]$ будет $a + \int\limits_a^x f(t)dt < x$.

11.24. Функция $f(x)$ не возрастает на отрезке $[0,1]$.Доказать, что для любого $\alpha \in [0,1]$ выполняется неравенство $\int\limits_0^\alpha f(x)dx \geq \alpha \int\limits_0^1 f(x)dx$.

11.25. Функция $f(x)$ положительна на отрезке $[0,1]$. Доказать, что $mM\int\limits_0^1 \frac{dx}{f(x)} \leq m+M-\int\limits_0^1 f(x)dx$, где m и M — наименьшее и наибольшее значения функции на $[0,1]$.

11.26. Доказать неравенство $\left[\int\limits_a^b f(x)dx\right]^2 \leq (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)dx$ при $a<b$.

11.27. Функция $f(x)$ положительна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что $\int\limits_a^b f(x)dx \int\limits_a^b \frac{dx}{f(x)} \geq (b-a)^2$.

11.28. Функция $f(x)$ непрерывна и выпукла кверху на отрезке $[a,b]$. Доказать неравенства: $(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

11.29. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и положительна на отрезке $[0,1]$. Доказать, что внутри отрезка найдется такая точка c, что $\int\limits_0^1 f^2(x)dx = f(c)\int\limits_0^1 f(x)dx$.

11.30. Доказать, что при $a \geq 1, b \geq 1$ выполняется неравенство $ab \leq e^{a-1} + b\ln b$.

11.31. Доказать, что при $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq b \leq 1$ выполняется неравенство $\int\limits_0^b \arcsin x dx \geq ab + \cos a - 1$.

11.32. Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ — возрастающие при $0 \le x < +\infty$ взаимно обратные функции, $f(0) = 0$. Показать, что при любых положительных a и b справедливо неравенство $ab \le \int\limits_0^a f(x)dx + \int\limits_0^b \varphi(x)dx$, причем равенство достигается лишь при $b=f(a)$.

11.33. Найти связь между первообразными прямой и обратной функций.

11.34. Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int\limits_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \max\limits_{[a,b]}|f(x)|$.

11.35. Вычислить $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^7 - 3x^5 + 7x^3 - x + 1}{\cos^2 x} dx$.

11.36. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^1 x^2(1-x)^n dx = 0$.

11.37. Можно ли в интеграле $\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x}$ заменить $u = \mathrm{tg}x$? Как это сделать правильно?

11.38. Доказать, что:

a) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(a+b-x)dx$;

b) $\int\limits_{-a}^a f(\cos x)\sin x dx = 0.$

11.39. Доказать, что для любой непрерывной при $-1 \le x \le 1$ функции $f(x)$ справедливы равенства:

a) $\int\limits_0^{2\pi} f(\sin x)dx = \int\limits_0^{2\pi} f(\cos x)dx$;

b) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx$.

11.40. Доказать, что $\dfrac{\int_0^{\infty} \frac{\sin x^p}{x} dx}{\int_0^{\infty} \frac{\sin x^q}{x} dx} = \frac{q}{p}$ при любых $p > 0, q > 0$.

11.41. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(1+e^x)(1+x^2)}$.

11.42. Показать, что величина $\int_{0,1}^{10} \frac{dx}{(1+x^{\alpha})(1+x^2)}$ не зависит от α.

11.43. Дана функция $\varphi(x) = -\int_0^x \ln(\cos x)dx$. Показать, что $\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) - x\ln 2$.

11.44. Дано: $I(a,b) = \int_a^b \frac{(1-x^2)dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}$. Доказать:

a) $I(a,b) = I(-b,-a)$;

b) $I(a,b) = I\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$;

c) $I\left(a,\frac{1}{a}\right) = 0.$

11.45. Вычислить $\int_a^{a+T} f(x)f'''(x)dx$, если T — период функции $f(x)$.

11.46. Доказать, что:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{d^{10}}{dx^{10}}\left((x^2-1)^{10}\right)\frac{d^7}{dx^7}\left((x^2-1)^7\right)dx = 0$;

b) $\int_{-1}^{1} \frac{d^9}{dx^9}\left((x^2-1)^9\right)\frac{d^{15}}{dx^{15}}\left((x^2-1)^{15}\right)dx = 0$.

11.47. Доказать, что $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1001x}{\sin x} dx = \frac{\pi}{2}$.

11.48. Вычислить:

a) $\int\limits_0^a (\sqrt[3]{a^2 - x^2} + \sqrt[3]{x^2 - 2ax}) dx$;

b) $\int\limits_0^1 (x^2 e^{x^2} + x e^{x^4}) dx$;

c) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{xe^x} - \int\limits_e^{e^2} \frac{\ln(\ln x)}{x^2} dx$;

d) $\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (a > 0, b > 0)$;

e) $\int\limits_{0,5}^2 \left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x + \frac{1}{x}} dx.$

11.49. Доказать, не вычисляя, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

11.50. Доказать, что 4 фигуры, образованные линиями $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, равновелики.

11.51. Доказать:

a) $\int\limits_0^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{\ln x} + \int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{e^t}{t} dt = 0$;

b) $\int\limits_0^1 \frac{\ln x dx}{1+x^2} = -\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$;

c) $\int\limits_0^1 \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}} = \int\limits_1^{\infty} \frac{dt}{(1+t^\alpha)^{\frac{2}{\alpha}}}$ при любом $\alpha \ge 2$.

11.52. Доказать сходимость интеграла $\int\limits_2^{\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{\ln x}}$.

11.53. Сходится ли $\int\limits_0^1 x^{-\ln x - 1} \ln x dx$?

11.54. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x^2}\int\limits_x^\infty e^{-t^2}\,dt$.

11.55. Вычислить:

a) $\int\limits_1^\infty (t-1)\ln t e^{-t}dt$;

b) $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\pi x}}{x}dx$;

c) $\int\limits_{-\infty}^\infty (\operatorname{arctg} e^{x+1}-\operatorname{arctg} e^{x})dx$.

11.56. Дано: $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$ при $p>0$. Доказать, что $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$. Вывести формулу $\Gamma(n+1)=n!$ для целого положительного *n*.

11.57. Доказать: $\int\limits_0^\infty \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx=0.$

11.58. Дано: $f(x)$ — четная функция, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f''(x)\le 2$ при $x\in[-1,1]$. Найти $f(x)$.

11.59. Трамвай проходит путь *S* между двумя остановками за время *T*. Доказать, что его ускорение в некоторый момент времени будет не меньше $\frac{2S}{T^2}$.

11.60. Найти площадь области, заключенной между синусоидой и косинусоидой.

11.61. Вычислить площадь, ограниченную линией:

a) $y^2=x^2-x^4$;

b) $(y-\arcsin x)^2=x-x^2$.

11.62. Найти площадь области определения функции $y=\arcsin(1-y)+\arcsin\frac{x}{y^2}$.

11.63. Точки *M* и *N* лежат на линии $xy=k\ (x>0, k>0)$. Доказать, что площадь криволинейного сектора, образованного дугой *MN* и отрезками *OM, ON*, равна площади криволинейной трапеции, лежащей под той же дугой.

11.64. Найти площадь фигуры, образованной при касании парабол $y=x^2, y=-x^2, x=y^2+a$.

11.65. Найти длину кривой $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ от $x=-\frac{\pi}{2}$ до $x=\frac{\pi}{2}$.

11.66. Вычислить объем тора, образованного вращением окружности $(x-a)^2+y^2=R^2 (R\geq a)$ вокруг оси OY.

11.67. Эллипс вращается вокруг своей малой, а затем большой оси. Какой из эллипсоидов вращения имеет больший объем?

11.68. Цилиндрический стакан наполнили водой, а затем наклоняли до тех пор, пока не обнажилась половина дна. Какая часть воды осталась в стакане?

11.69. Найти объем шарового сегмента с радиусом основания 4 и высотой 2.

11.70. По диаметру шара просверлено сквозное отверстие высоты *H*. Вычислить объем оставшейся части шара.

11.71. Треугольник с вершинами *O*(0,0), *A*(6,2), *B*(0,-4) вращается вокруг оси *OX*. Найти объем тела вращения.

11.72. Найти объем тела, образованного вращением куба вокруг его диагонали.

11.73. Найти объем общей части двух круговых цилиндров радиуса *r*, оси которых пересекаются под прямым углом.

11.74. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *OY* области, лежащей между осью *OX* и кривой $y=e^{-x^2}$.

11.75. Два непересекающихся ребра тетраэдра перпендикулярны и имеют длину *a* и *b*. Длина их общего перпендикуляра равна *h*. Вычислить объем тетраэдра.

11.76. На каждой хорде круга радиуса *r*, параллельной одному и тому же диаметру, построен равносторонний треугольник, плоскость которого перпендикулярна плоскости круга. Вычислить объем полученного тела.

11.77. На каждой хорде круга радиуса *r*, параллельной одному и тому же диаметру, построен равнобедренный треугольник (хорда служит основанием) одной и той же высоты h, причем плоскости треугольников перпендикулярны плоскости круга и все треугольники лежат с одной стороны от плоскости круга. Получившееся тело называется коноидом. Найти его объем.

11.78. Показать, что прямая, проходящая через точки перегиба графика $y=x^4-6a^2x^2$, образует вместе с графиком три области, площадь одной из которых равна сумме площадей двух других.

11.79. Показать, что площади областей, образованных спиралью Архимеда $\rho=a\varphi$ и полярной осью, составляют арифметическую прогрессию.

11.80. Вычислить полную массу атмосферы сферической планеты радиуса R, если ее плотность на высоте h равна $\gamma_0 e^{-kh}$, где γ_0 — плотность атмосферы на поверхности планеты, $k>0$.

11.81. При каких значениях t из отрезка [0,1] сумма двух площадей, ограниченных линиями $x=0,\ x=1,\ y=x^2,\ y=t,$ будет наименьшей и наибольшей?

12. Дифференциальные уравнения

12.1. Проверить, что уравнение $y'=2\sqrt[3]{xy}$ имеет по меньшей мере два решения, удовлетворяющих начальному условию $y(0)=0$.

12.2. Описать семейство интегральных кривых уравнения $\sin y'=0$.

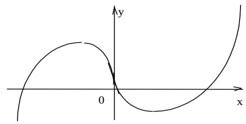
12.3. Дан график любого решения уравнения $4x^2\sin\dfrac{y'}{y^4+1}=(y')^3$. Доказать, что кривые, полученные из него отражением относительно обеих осей и начала координат — также графики некоторых решений.

12.4. Имеет ли уравнение $y' = \sin x + x^2 + y^3$ четные решения?

12.5. Показать, что любое решение уравнения $y' = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^8 + 1}$ имеет ровно один максимум и ровно один минимум.

12.6. Доказать, что все решения уравнения $y' = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ ограничены на всей оси.

12.7. Может ли уравнение $y'' = 1 + x^2 + y^2$ иметь решение, график которого показан на рисунке?



12.8. Найти геометрическое место точек экстремума всех решений уравнения $y' = x^4 - 4y^2 - 2x^2 + 1$.

12.9. Найти геометрическое место точек максимума всех решений уравнения $y' = 4 - 5x^2y^2 + x^4y^4$.

12.10. Составить уравнение геометрического места точек перегиба всех решений уравнения $y' = -\dfrac{2}{3}x^3 + xy$.

12.11. Найти необходимое и достаточное условие, при котором существует непрерывное решение уравнения $x(t) - \int\limits_0^t x(s)ds = f(t)$, где $f(t)$ — заданная на отрезке $[0;1]$ функция.

12.12. Найти функцию $\varphi(x)$, определенную на отрезке $[a,b]$ и удовлетворяющую равенству $\varphi(x) = \int\limits_a^b \varphi(x)dx + \psi(x)$, где $\psi(x)$ — данная функция.

12.13. Найти все интегральные кривые уравнения $y' + x(y')^2 - y = 0$, являющиеся прямыми линиями.

12.14. Построить интегральную линию уравнения $y' = e^{|y|}$, проходящую через точку (0,1).

12.15. Найти $y(2)$, если $y(x)$ — решение дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{|1-x|+x} + x$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0$.

12.16. Может ли функция $y = x^2$ быть решением уравнения вида $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ с непрерывными на всей оси функциями P и Q?

12.17. Уравнение $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ имеет два частных решения, произведение которых равно 1. Найти связь между функциями P и Q.

12.18. Дано уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$, в котором $P(x) \geq c > 0$, $Q(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Доказать, что любое решение стремится к нулю при $x \to +\infty$.

12.19. Пусть y_1, y_2, y_3 — частные решения линейного уравнения первого порядка. Доказать, что $\dfrac{y_3 - y_1}{y_2 - y_1} = \mathrm{const}$.

12.20. Имеют ли уравнения $y' = x - y^4$ и $y'' = 1 + 4y^3$ одинаковые решения?

12.21. a) Доказать, что уравнения $xyy' = \sin x - \ln x + y^2$ и $xy'' - y' = \dfrac{\cos x}{y}$ не имеют одинаковых решений.

b) То же — для уравнений $y'' + (xe^{-x} + 1)y' + e^{-x}y = 0$ и $y'' + e^x y' + xy = 1$.

12.22. Показать , что функция вида $u(x,y) = f(x)g(y)$ удовлетворяет уравнению $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial y}$. Сформулировать и доказать обратное утверждение.

12.23. Найти общие решения уравнений:

a) $y' = \dfrac{1}{2x - y^2}$;

b) $xy'' + 2y' + 1 = 0$;

c) $yy'' + (y')^2 = 3x$;

d) $y = xy' + x^2 y''$;

e) $xy' + \mathrm{tg}\, y = \dfrac{2x}{\cos y}$.

12.24. Решить уравнение $\int\limits_0^{\frac{dy}{dx}} \frac{\cos u du}{16+9\sin^2 u} = \frac{1}{12}\operatorname{arctg} x$.

12.25. Решить систему уравнений $\begin{cases} y'' + \dfrac{(y')^2}{y} = x' + \dfrac{xy'}{y}, \\ x'y + xy' = 1, \end{cases}$ где x, y — функции от t.

12.26. Дано уравнение $y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Какой должна быть функция φ, чтобы это уравнение общим решением имело функцию $y = \frac{x}{\ln|Cx|}$?

12.27. Найти все функции вида $u = \varphi(x^2 + y^2)$, удовлетворяющие уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

12.28. Составить дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$, которому удовлетворяет функция $y = \sin \int\limits_{e^{-x}}^{e^x} \frac{dt}{(\ln t)^2 + 1}$.

12.29. Составить дифференциальное уравнение первого порядка по его общему решению:

a) $y = x^2 + Cx$;

b) $y = \frac{1}{Cx+1}$;

c) $y = 2\operatorname{arctg}(C + x) - x$.

12.30. Составить дифференциальное уравнение второго порядка по его общему решению: $y = C_1 x + C_2 \sin x$.

12.31. Составить уравнение вида $y''' = f(x, y, y', y'')$, общее решение которого имеет вид $y = C_1 + C_2 x^2 + C_3 e^x$.

12.32. Найти $\sqrt[i]{-1}$.

12.33. Найти общие решения уравнений:

a) $y^{\mathrm{IV}} + y' = 0$;

b) $y^{\mathrm{IV}} + y'' = \sin^4 x$.

12.34. Составить линейное уравнение с постоянными коэффициентами без правой части наименьшего возможного порядка, имеющее своим частным решением функцию:

a) $y = x^2 10^x$;

b) $y = x^3 - e^x + \sin x$;

c) $y = \cos^2 x$;

d) $y = \operatorname{ch}^3 x$, где $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

12.35. Составить линейное уравнение с постоянными коэффициентами с правой частью, для которого функция $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + x^3$ является общим решением.

12.36. При каких p и q все решения уравнения $y'' + py' + qy = 0$ стремятся к нулю при $x \to +\infty$?

12.37. Найти все функции, для которых:

a) вторая производная совпадает с пятой;

b) сумма первой и второй производных совпадает с суммой первой и четвертой;

c) вторая производная равна разности первой производной и самой функции;

d) при любом значении x функции $y, y', y'', y''', \ldots$ образуют арифметическую прогрессию.

12.38. Найти все функции, удовлетворяющие одновременно уравнениям $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ и $y'' - 4y' + 3y = e^{2x}$.

12.39. Найти все решения уравнений:

a) $f''(x) + f(x) = 1$;

b) $f'(x) + f(\pi - x) = 1$;

c) $f''(x) + f(\pi - x) = 1$.

12.40. Показать, что функция $y = \int\limits_0^{\infty} \dfrac{e^{-xz}}{1+z^2} dz$

удовлетворяет уравнению $y'' + y = \frac{1}{x}$.

12.41. Найти $y(1)$ и $y\left(\frac{1}{2}\right)$, если $x^3 y' \sin y = 1$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \frac{\pi}{2}$.

12.42. Непрерывная функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению $y' = 1 + x^2 + y^2$ и начальному условию $y(0)=0$. Найти $y(2)$.

12.43. Известно, что $f(0) = 1/4$ и что производная функции $f(x)$ совпадает с ее кубом. Найти $f(10)$.

12.44. Найти $y(x)$, если:

a) $\int\limits_{x}^{y'} z dz = x + \frac{1}{2}$;

b) $y(x) = \int\limits_{0}^{x} y(t)dt + x - 1$.

12.45. Найти $f(x)$, если:

a) $e^{\int_0^x f(t)dt} = f(x)$;

b) $e^{-\int_0^x f(t)dt} = f(x)$;

c) $\int\limits_{1}^{f(x)} e^{u^2} du = \int\limits_{0}^{x} \frac{udu}{f(u)}$.

12.46. Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет функция $f(x) = e^{x^2} \int\limits_{0}^{x} e^{-t^2} dx$?

12.47. Решить уравнение $y(x) = x - \int\limits_{0}^{x} e^{x-t} y(t)dt$.

12.48. Найти функцию $f(x)$, если $xf(x+y) = f(x)f(y)$ и $f'(0) = 1$.

12.49. Доказать, что линия, все нормали к которой проходят через одну точку, есть окружность.

12.50. Какие линии пересекают все гиперболы $xy = a$ под прямым углом?

12.51. Для какой линии производная в любой точке равна сумме ее координат?

12.52. Найти линию, каждая точка которой делит пополам отрезок нормали, заключенный между осями координат.

12.53. Составить уравнение линии, состоящей из точек касания окружностей с центром в начале координат и интегральных кривых уравнения $(y')^2 = x^2 + y^2$.

12.54. Найти линию, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, этой линией и двумя ординатами, одна из которых постоянна, а другая переменная, равна отношению куба переменной ординаты к соответствующей абсциссе.

12.55. Найти линию, обладающую тем свойством, что площадь криволинейной трапеции, лежащей под любой ее дугой, равна полуразности ординат начальной и конечной точек.

12.56. Найти линию, в каждой точке которой угол между касательной и радиус-вектором этой точки равен 45°.

12.57. Найти линию, в каждой точке которой равны отрезок касательной до ее пересечения с осью абсцисс и отрезок от начала координат до этой точки пересечения.

12.58. Какие линии обладают следующим свойством: отрезок любой касательной от точки касания до пересечения с осью ординат делится осью абсцисс пополам?

12.59. Найти линию, в каждой точке которой треугольник, образованный касательной, вертикалью, проходящей через эту точку, и осью *OX*, имеет площадь 2 ед^2.

12.60. Найти кривую, заданную уравнением вида $r = r(\varphi)$, для которой площадь Q, ограниченная этой кривой и полярными радиусами $\varphi = 0, \varphi = \varphi_1$, вычисляется по формуле $Q = \frac{1}{4} r^2(\varphi_1)$.

12.61. В бак, содержащий 100 л кислоты, начинает поступать вода со скоростью 5 л в минуту, а образующийся раствор с той же скоростью выливается (при непрерывном перемешивании). Когда в баке окажется 40%-ный раствор кислоты?

12.62. Точка движется прямолинейно так, что скорость в каждый момент численно равна пройденному пути. В данный момент их общее значение равно 0,001. Когда началось движение?

12.63. Движение материальной точки замедляется так, что квадрат ускорения в каждый момент численно равен скорости. Какой будет скорость через 10 секунд после того, как она равнялась 4 м/с?

12.64. В начальный момент тяжелая цепь длиной 10 м свисает на 1 м с края плоской крыши небоскреба и неподвижна. Трение отсутствует. Когда вся цепь соскользнет с крыши?

12.65. Тяжелый резиновый шнур, подвешенный за середину, достиг первоначальной длины. Во сколько раз он растянется, если его подвесить за конец?

12.66. Вычислить наименьший вес каната длины L (м) и переменного сечения, изготовленного из материала с прочностью на разрыв μ (Н/см^2) и удельного веса d (Н/см^3), способного выдержать вес P (Н).

12.67. В 12 часов дня снегоуборочная машина начала сбрасывать снег с дороги. За первый час работы и за следующие три часа она прошла одинаковое расстояние. Когда начался снегопад, если он был равномерным, дорога до его начала была чистой, а машина перерабатывает поровну снега за одинаковое время?

12.68. Студент встал 51-м в очередь в столовой. Каждую минуту обслуживается 8 человек, из них 3 вне очереди. Кроме того, к каждому человеку, стоящему в очереди, раз в 10 минут подходит знакомый, который присоединяется к очереди. Составить дифференциальное уравнение, описывающее движение студента в очереди. Когда он пообедает? Рассмотреть задачу в общем виде при произвольных значениях параметров.

13. Матрицы и системы линейных уравнений

13.1. Дана матрица $A=\{a_{ij}\}$. Что больше: $\max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ или $\min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$?

13.2. Доказать, что любая квадратная матрица есть сумма симметричной и антисимметричной матриц. (Симметричной называется матрица, элементы которой удовлетворяют условию $a_{ij}=a_{ji}$; для антисимметричной $a_{ij}=-a_{ji}$.)

13.3. a) Существуют ли такие ненулевые матрицы *A*, что A^2=0?

b) Найти все такие 2×2 матрицы.

13.4. Найти $\det A$, если *A* — матрица 2×2 и $A^2+E=0$.

13.5. Пусть *A* — любая матрица 4×2. Найти такую матрицу *B*, что при умножении на нее слева первая и третья строки матрицы *A* меняются местами, вторая заменяется нулями, а элементы четвертой меняют знак.

13.6. Пусть $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Найти такую матрицу *B*, что $BAB=\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$.

13.7. Доказать, что матрица $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению $X^2-(a+d)X+(ad-bc)E=0$.

13.8. Пусть $ABC=E$, где *A*, *B*, *C* — квадратные матрицы. Найти *BCA* и *CAB*.

13.9. Известно, что A — матрица 3×2, B — матрица 2×3 и что $AB = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найти BA.

13.10. Дано: $A(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

a) Доказать: $A(\alpha+\beta) = A(\alpha)A(\beta)$.

b) Вычислить A^n.

c) Найти A^{1994}, если $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

13.11. Следом квадратной матрицы $\mathrm{tr}(A)$ называется сумма ее диагональных элементов: $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B верно равенство $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

13.12. Доказать следующее утверждение: матрица $A(m\times n)$ есть произведение столбца на строку в том и только в том случае, если верно равенство $a_{ij}a_{kl} = a_{il}a_{kj}$ для любых i, j, k, l.

13.13. Пусть X — столбец, а Y — строка одинаковой длины. Доказать равенство $\det(E + XY) = 1 + YX$.

13.14. Вычислить $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}^2$ (матрица $n\times n$).

13.15. Вычислить:

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{99}$;

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{100}$;

c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{100}$;

d) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}^{100}$;

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{1984}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{1984}$;

g) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^{-1}$.

13.16. Дано: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

a) Вычислить A^n.

b) Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}A^n\right)$.

13.17. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}A^n$ и $\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left(A^n-E\right)\right)$, если $A=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{x}{n}\\ -\dfrac{x}{n} & 1\end{pmatrix}$.

13.18. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ (т.е. такие матрицы *B*, что *AB*=*BA*).

13.19. Для всякой ли матрицы *A* второго порядка можно найти такие числа *p* и *q*, что $A^2+pA+qE=0$?

13.20. Решить систему уравнений: $\begin{pmatrix}x(t) & y(t)\\ u(t) & v(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'(t) & y'(t)\\ u'(t) & v'(t)\end{pmatrix}=(xv-uy)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

13.21. Найти квадратную матрицу $A=A(t)$ порядка 3, удовлетворяющую уравнению $\dfrac{dA}{dt}=A^2$ и начальному условию $A(0)=A_0$.

13.22. Найти матрицу *X*, если $\dfrac{dX}{dt}=AX(t)-X(t)A, X(0)=B$, где $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

13.23. Найти матрицу *X* из равенства

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

13.24. Может ли система уравнений $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \\ a_3x+b_3y=c_3 \end{cases}$ быть несовместной, если известно, что:

a) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$;

b) кроме того, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

13.25. Исследовать совместность и решить систему уравнений $\begin{cases} (3-2\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=\lambda, \\ (2-\lambda)x_1+(2-\lambda)x_2+x_3=1, \\ x_1+x_2+(2-\lambda)x_3=1. \end{cases}$

13.26. Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n = \frac{1}{2}x_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n = \frac{1}{2}x_n \end{cases}$$

при целых a_{ij} не имеет ненулевых решений.

13.27. Даны r, s, t, u, v, w — последовательные целые числа. Доказать, что система уравнений $\begin{cases} rx+sy=t, \\ ux+vy=w \end{cases}$ имеет единственное решение, и найти его.

13.28. Коэффициенты системы n уравнений с n

неизвестными
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$
образуют арифметическую прогрессию: $a_{11}, a_{12}, .. a_{1n}, b_1, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{nn}, b_n$. Известно, что $n \geq 2$ и что система имеет единственное решение. Найти его.

13.29. Найти многочлен $P(x)$ третьей степени с целочисленными коэффициентами такой, что

$$\int_0^1 xP(x)dx = \int_0^1 x^3 P(x)dx = \int_0^1 x^5 P(x)dx = 0.$$

14. Аналитическая геометрия в пространстве

14.1. Что произойдет с лучом, отразившимся по разу от каждого из трех взаимно перпендикулярных зеркал?

14.2. Можно ли четырьмя круглыми экранами полностью заслонить в пространстве точечный источник света?

14.3. Найти расстояние между скрещивающимися диагоналями граней куба.

14.4. Показать, что сечение куба, проведенное через концы трех ребер, начинающихся в одной вершине, отсекает одну треть от его диагонали.

14.5. Какое множество составляют точки пространства, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна?

14.6. Какую поверхность образуют центры шаров, касающихся:

a) данного шара и данной плоскости;

b) двух данных прямых, перпендикулярных, но не пересекающихся?

14.7. Какое множество образуют центры сфер, проходящих через данную точку и касающихся:

a) данной плоскости;

b) двух данных плоскостей?

14.8. Какую форму имеет область пространства, в которой лунное притяжение превосходит земное?

14.9. Определить площадь эллипса, образованного пересечением цилиндра $\pi x^2 + \dfrac{y^2}{e^2} = 1$ и плоскости $x + 2y + 2z = 5$.

14.10. Доказать, что все сечения параболоида вращения плоскостями, проходящими через его вершину, проектируются на плоскость, перпендикулярную оси параболоида, в окружности.

14.11. Круг $x^2 + (z-1)^2 \le 1$, находящийся в плоскости OXZ, освещен источником света, расположенным в точке $(0,-1,2)$.

Какую форму имеет тень круга в плоскости OXY?

14.12. Доказать, что касательные к линии $\begin{cases} x = a(\sin t + \cos t), \\ y = a(\sin t - \cos t), \\ z = be^{-t} \end{cases}$

пересекают плоскость OXY по окружности $x^2 + y^2 = 4a^2$.

14.13. В 4-мерном пространстве сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 9$ пересекается с гиперплоскостью $x_1 = 2$. Найти центр и радиус пересечения.

14.14. Четырехмерный единичный куб, ограниченный гиперплоскостями $x_i = 0,\ x_i = 1,\ i = 1, 2, 3, 4,$ пересечен гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Что получилось в сечении?

14.15. Какую поверхность образует диагональ куба, вращающегося вокруг своего ребра, не пересекающегося с этой диагональю?

14.16. Составить уравнения поверхностей, образованных вращением кривой $y = e^x$, лежащей в плоскости OXY, относительно осей OX, OY.

14.17. Кривая $F(x, y) = 0$ вращается вокруг оси OX. Написать уравнение поверхности вращения.

14.18. Составить уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси OZ линии, заданной уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = \psi(z). \end{cases}$

14.19. Линия $x^2 + y^2 = 1$, находящаяся в плоскости OXY, перемещается, не поворачиваясь, параллельно вектору $\mathbf{a} = \{1,2,3\}$. Составить уравнение получившейся поверхности.

14.20. Эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ переносится параллельно себе так, что его центр остается в плоскости OXZ на параболе $z^2 = 2px$. Составить уравнение полученной поверхности.

14.21. Составить уравнение поверхности, которая состоит из прямых, проходящих через точку (0,0,1), и пересекается с плоскостью OXY по:

а) параболе $y = x^2$;

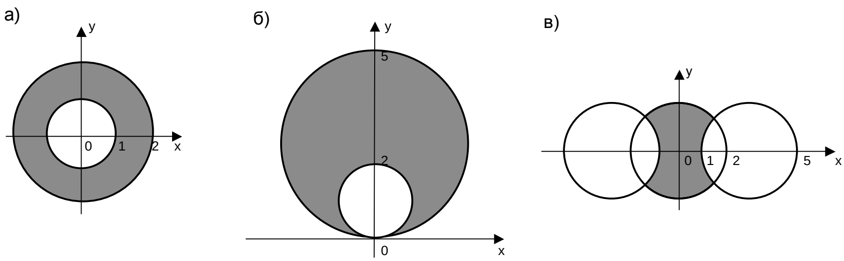
b) линии $F(x,y)=0$.

14.22. Горизонтальная прямая, перемещаясь вверх с постоянной скоростью v, одновременно вращается вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью ω. В начальный момент прямая совпадает с осью OX. Составить уравнение полученной поверхности.

14.23. Через точку (0,0,1) проведены все прямые с направляющими векторами $\mathbf{l}_a = \{a; a^2; -1\}$, где a — любое действительное число. Составить уравнение поверхности, состоящей из этих прямых.

15. Двойные интегралы

2.27. Расставить пределы в двойных интегралах по областям *а,б,в* в декартовых и полярных координатах:



2.28. Доказать, что $0{,}98\pi \le \iint\limits_{x^2+y^2\le 100} \dfrac{dxdy}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \le \pi$.

2.29. Вычислить $\lim\limits_{\delta\to 0}\dfrac{1}{\delta^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le\delta^2} f(x,y)dxdy,$ если $f(x,y)$ — непрерывная в точке (0, 0) функция.

2.30. В следующих интегралах перейти к декартовым координатам:

a) $\int\limits_0^{\frac{3}{2}\pi} d\varphi \int\limits_2^3 \dfrac{d\rho}{\ln\rho};$

2.31. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \dfrac{\rho d\rho}{\ln\rho}.$

b) $\int\limits_0^{\frac{3}{4}\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi} \dfrac{d\rho}{\ln(\rho+2)};$

2.32.

2.33. В следующих интегралах перейти к полярным координатам:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)dy;$

b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{1-x^2} f(x,y)dy;$

c) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,y)dy;$

d) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f(x,y)dy;$

e) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^4}^{x^2} f(x,y)dy.$

2.34. Изменить порядок интегрирования в следующих интегралах:

a) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)dy;$

b) $\int\limits_0^{\pi} dx \int\limits_0^{1+\cos x} f(x,y)dy;$

c) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^{x^2-4x+5} f(x,y)dy.$

2.35. Преобразовать двойной интеграл $\int\limits_a^b dx \int\limits_a^x (x-y)^n f(y)dy$ в однократный.

2.36. Вычислить $\int\limits_a^b dx \int\limits_A^B \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy,$ где $f(x,y)$ — известная функция.

2.37. Вычислить $\iint\limits_G \frac{xdxdy}{x^2+y^2},$ где область G ограничена линиями $y = x$ и $y = x\,\mathrm{tg}\,x.$

2.38. Вычислить двойные интегралы:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^{10}}^{\sqrt[10]{x}} \frac{dy}{y^{10} - \sqrt[10]{y}};$

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y^2}} dy;$

c) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{\sqrt{|x|}}^1 \cos\frac{x}{y^2} dy;$

d) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \int\limits_{\sin x}^1 e^{y^2} dy;$

e) $\int\limits_{-3}^1 dx \int\limits_{x+2|x|}^3 \sin\frac{x}{y} dy;$

f) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^2 [xy]dy.$

2.39. Вычислить площадь, ограниченную четырьмя линиями: $y = x^2$, $y = 8x^2$, $x = y^2$, $x = 8y^2$.

2.40. Построить область, площадь которой задана интегралом $S = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_0^{4\sec\varphi} \rho d\rho.$

2.41. Вычислить объемы тел, образованных поверхностями: $x = 0,\ x^2 + y^2 = 2,\ z = y - 1.$

2.42. Найти объем тела, ограниченного плоскостью OXY и поверхностью $x^3 + y^2 + z = xy(x+1).$

2.43. Найти центр тяжести однородного полушара.

2.44. Найти все функции, удовлетворяющие уравнению:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(\alpha x, \beta y)\,dxdy = f(\alpha, \beta).$$

2.45. Функции $f(x), g(x)$ непрерывны и не убывают на отрезке [0; 1]. Доказать, что $\int\limits_0^1 \int\limits_0^1 f(x)g(y)\,dxdy \ge \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

2.46. Доказать, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на [0; 1], верно равенство

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_y^x f(x)f(y)f(z)\,dz = \frac{1}{6}\left(\int\limits_0^1 f(x)\,dx\right)^3.$$

2.47. Вычислить $\int\limits_0^1 dx_1 \int\limits_0^{x_1} dx_2 \int\limits_0^{x_2} dx_3 \ldots \int\limits_0^{x_{1993}} dx_{1994}.$

16. Числовые ряды

16.1. Написать общий член ряда:

a) $-4+7-4+7-4+7-\ldots$;

b) $1+1-1-1+1+1-1-1+\ldots$;

c) $1-\frac{1}{2}+3-\frac{1}{4}+5-\frac{1}{6}+\ldots$.

16.2. Подсуммой ряда называется сумма любого конечного числа его членов (не обязательно взятых подряд).

a) Найти подсумму гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, состоящую из 5 членов и являющуюся арифметической прогрессией.

b) Существует ли такая подсумма, состоящая из 1995 членов?

16.3. В окружность радиуса 1 вписан правильный 8-угольник. Середины его сторон являются вершинами второго 8-угольника, середины сторон второго — вершинами третьего и т.д. Найти сумму длин сторон всех 8-угольников.

16.4. Может ли сходиться ряд, являющийся почленной суммой двух расходящихся рядов; сходящегося и расходящегося?

16.5. Верно ли, что из неравенств $a_n \le b_n$ и из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

16.6. Доказать, что ряд с положительными членами, сходящийся по признаку Даламбера, сходится и по признаку Коши. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

16.7. Доказать, что для любой арифметической прогрессии ряд, составленный из величин, обратных ее членам, расходится.

16.8. a) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Обязан ли сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$? b) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ сходится. Обязан ли сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$?

c) Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся. Обязан ли сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$?

16.9. Верно ли, что для любого сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами $\lim_{n\to\infty}(na_n) = 0$?

16.10. Составить такой сходящийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln n$ расходится.

16.11. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с неотрицательными членами и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n{a_n}^2$ сходятся или расходятся одновременно.

16.12. Пусть последовательности положительных чисел a_n и b_n возрастают. Известно, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$.

Верно ли, что $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n + b_n} = \infty$?

16.13. Последовательность $\{x_n\}$ состоит из положительных чисел, не убывает и ограничена. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$ сходится.

16.14. Пусть числовой ряд $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ имеет сумму S, а ряд $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$, где b_n — среднее арифметическое первых n членов первого ряда, сходится. Показать, что $S = 0$. Достаточно ли этого для сходимости второго ряда?

16.15. Доказать, что если $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots > 0$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty}(na_n) = 0$.

16.16. Между кривыми $y = \frac{1}{x^2}$ и $y = \frac{1}{x^3}$ справа от точки их пересечения построены вертикальные отрезки, отстоящие один от другого на одинаковом расстоянии. Конечна ли сумма длин всех этих отрезков?

16.17. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$— последовательные корни уравнения $x = \operatorname{tg} x$?

16.18. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$— последовательные корни уравнения $x \sin x = 1$?

16.19. Найти суммы рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+2^n}{6^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-1)^n n+1{,}5}$;

d) $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$;

e) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$;

f) $\frac{4}{1\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 7}+\ldots$;

g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$;

h) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$;

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}$;

k) $\sum\limits_{m,n=2}^{\infty}\frac{1}{m^n}$.

16.20. Сходится ли ряд $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+$ $+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+..$? (У к а з а н и е. Использовать формулы тригонометрии.)

16.21. Дано: $a_0=1$ и $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{3}{4}+(-1)^n\frac{1}{2}$ при $n\ge 0$. Показать, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$ сходится, и найти его сумму.

16.22. Зная, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$, найти $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$.

16.23. Вычислить $\dfrac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}}{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}}$.

16.24. Можно ли составить из кубиков башню, которая имела бы конечный объем, но бесконечную площадь стен?

16.25. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_1+2u_2+..nu_n}{n(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\ .$$

16.26. Функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема на $[1;\infty)$. Доказать, что если $\int_1^{\infty}xf(x)dx$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{\infty}f(x)dx$.

16.27. Доказать равенство $\int_0^1 x^{-x}dx=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-n}$.

16.28. Доказать, что:

a) $\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}<\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{i^2}<\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ при целых положительных $m<n$;

b) $\ln 994<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1987}<\ln 1987$;

c) $\frac{1}{\sqrt{1000}}+\frac{1}{\sqrt{1001}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1999}}>\frac{20\sqrt{10}}{\sqrt{2}+1}$;

d) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}>\ln n-\frac{1}{2n}+\frac{1}{2}$ при любом $n>1$.

16.29. Доказать неравенство $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)<3$.

16.30. Известно, что x_1, x_2,..., x_n — положительные целые числа и что $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}=2$. Доказать, что среди этих чисел есть одинаковые.

16.31. Указать такой сходящийся числовой ряд, что ряд, составленный из кубов его членов, взятых в том же порядке, расходится.

16.32. Можно ли составить такой знакочередующийся ряд

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$, что $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, а ряд расходится?

16.33. Выполняется ли признак Лейбница для ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+100}$?

16.34. Члены сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ переставить так, чтобы он стал расходящимся.

16.35. Доказать, что можно так расставить знаки между членами гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, что его сумма обратится в ноль.

16.36. Исследовать на сходимость следующие ряды:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\ldots$;

b) $1+2^{\frac{1}{0{,}002}}+3^{\frac{1}{0{,}003}}+4^{\frac{1}{0{,}004}}+\ldots$;

c) $1+2^{-\frac{2}{1001}}+3^{-\frac{4}{1002}}+4^{-\frac{6}{1003}}+\ldots$;

d) $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{4}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}+\ldots$;

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{2}{3}\right)^9+\left(\frac{3}{4}\right)^{16}+\left(\frac{4}{5}\right)^{25}+\ldots$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}2^{(-1)^n-n}$;

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{8^{\ln n}}}$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-3}{10^{\ln n}}$;

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{2}{3}}$;

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$;

m) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 100\ln n}$;

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$;

o) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n + \sqrt{\ln^3 n}}$;

p) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$;

q) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n!}{2^{n!}}$;

r) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$;

s) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n + (-1)^n \sqrt{n}}$;

t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \cos^2 n}$;

u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{\sqrt{n}}$;

v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2} - (-1)^n n}$;

w) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int\limits_{n}^{n+1} e^{-x^2}\,dx$;

x) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\int\limits_{n^2-1}^{n^2} \frac{dx}{\sqrt[10]{x}-1}$.

16.37. При каком целом m сходится ряд $\frac{1}{(\ln 2)^m}+\frac{1}{(\ln 3)^m}+\ldots$ $+\frac{1}{(\ln n)^m}+\ldots$?

16.38. При каких значениях α сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10+(-1)^n n^{\alpha}}$?

16.39. При каких значениях p сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n}\right)^p$?

16.40. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin(\pi n!e)$.

17. Функциональные ряды

17.1. Доказать, что уравнение $x+4x^2+9x^3+16x^4+\ldots=1$ имеет ровно один положительный корень.

17.2. Сколько решений имеет уравнение $x+\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{2n}=0$?

17.3. Найти сумму ряда $a-bx+cx^2-ax^3+bx^4-cx^5+ax^6-\ldots$

17.4. Коэффициенты ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ образуют периодическую (с некоторого места) последовательность. Доказать, что сумма ряда — рациональная функция, найти радиус его сходимости.

17.5. Найти область сходимости рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2+\cos n)x^n$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{x+\sqrt{n}}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{2\cos x}$.

17.6. Доказать, что $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

17.7. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})}$.

17.8. Разложить функции:

a) $e^{\frac{x}{2}}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ в ряд Маклорена;

b) $\cos^3 x$ в ряд Маклорена;

c) $\ln x$ по степеням $\dfrac{1-x}{1+x}$;

d) $\ln(2-5x)$ по степеням $(2x+3)$;

e) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$ по степеням $\dfrac{x}{1+x}$;

f) $\dfrac{x+1}{x+2}$ по степеням $\dfrac{x}{1+x}$.

17.9. Найти:

a) $y^{(10)}(0)$, если $y=(x^4+x^2)\cos 5x$;

b) $y^{(1001)}(0)$, если $y=\sin^3 x$;

c) $y^{(30)}(0)$, если $y=\dfrac{1}{x^5+a}+\dfrac{1}{x^6+b}$;

d) $y^{(10)}(0)$, если $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}$;

e) $y^{(100)}(1)$, если $y=e^{x^2-2x}$.

17.10. Используя разложение в ряд Маклорена, вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

17.11. Найти:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}=L$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{e^x-1}{x}-L\right)$.

17.12. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin(\pi\sqrt{n^4+2n^3})\right)$.

17.13. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n}$.

17.14. Найти числа *a*, *b*, *c*, *d*, *A* из равенства $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x+x^2}-a-bx-cx^2-dx^3}{x^4}=A$.

17.15. Найти числа *a*, *b*, *c*, *d* из равенства $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^5\left(\sqrt{x^2+1}-bx-\dfrac{c}{x}-\dfrac{d}{x^3}\right)\right)=a$.

17.16. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}-\sin\dfrac{1}{x}}{\operatorname{tg}\dfrac{1}{x}-\arcsin\dfrac{1}{x}}$.

17.17. Найти область сходимости и сумму рядов:

a) $1-3x^2+5x^4-7x^6+9x^8-\ldots$;

b) $1+2x-3x^2-4x^3+5x^4+6x^5-7x^6-8x^7+\ldots$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n x^n$, где $\beta_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$;

d) $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\ldots$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)2^n}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+6n^2+11n+5}{(n+3)!}$;

g) $\frac{1}{10}+\frac{1}{200}+\frac{1}{3000}+\frac{1}{40000}+\frac{1}{500000}+\ldots$;

h) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^n x}{n}$;

i) $\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}+\frac{3}{x^4}+\ldots$;

j) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^n+\frac{1}{n\cdot 2^n x^n}\right)$;

k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$;

l) $e^x+2e^{2x}+3e^{3x}+\ldots$;

m) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(2k+1)!}$;

n) $\frac{3!}{6!}+\frac{6!}{9!}+\frac{9!}{12!}+\ldots$;

o) $1-\frac{\pi^2}{2!}+\frac{\pi^4}{4!}-\frac{\pi^6}{6!}+\ldots$;

p) $1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}+\ldots$;

q) $x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^7}{7!}+\ldots$;

r) $1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\ldots$;

s) $x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\frac{x^{10}}{10!}+\ldots$;

t) $\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\frac{x^{11}}{11!}+\ldots$;

u) $1+\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4\cdot 5}+\frac{x^3}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$;

v) $\frac{x}{3}+\frac{x^2}{2\cdot 3^2}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 3^n}+\ldots$;

w) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\operatorname{arctg}x)^{n+1}}{n+1}$;

x) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}\right)^{(n)}$.

17.18. Проверить, что $|f(x)-f(y)|\le|x-y|$, если $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin kx}{k^2(k+1)}$.

Ответы

1.1. a) 121. У к а з а н и е: такое может быть только в троичной системе счисления.

b) $2\frac{2}{5}$ (какое здесь основание системы счисления?).

1.2. 14 (значения $m=4$ и $m=178$ считаем посторонними корнями). У к а з а н и е: выразите m через n и выделите целую часть.

1.4. ГОДЗЮЁН, КОКОНОЦУ, ЯЦУ (полная расшифровка: 2×4, 5×5, 8×9, 5×8, 9×3, 3×6, 9×6, 9×9, 4×8).

1.5. 75%.

1.7. В шестой.

1.8. Восемью. У к а з а н и е: разложите на множители разность этих чисел.

1.12. Восемь.

1.15. При любом N достаточно рассмотреть дроби $\frac{1}{N!},\frac{2}{N!},\ldots,\frac{N}{N!}$.

1.16. Например, 0,101001000100001…

1.17. Да, например, $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$.

1.21. Возведите данное целое число в квадрат.

1.23. a) $(n+1)!-1$. У к а з а н и е: $k\cdot k!=(k+1)!-k!$

b) $\left(3^{2^{n+1}}-1\right):2$. У к а з а н и е: домножьте на $(3-1)$.

1.24. a) $2^{100}>(2^{10})^{10}>1000^{10}>999^{9}$.

b) Возведите в 72-ю степень.

d) При $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ $\sin\alpha<\alpha$ (хорда тригонометрического круга меньше соответствующей дуги). Учитывая убывание косинуса в первой четверти, имеем: $\sin(\cos\alpha)<\cos\alpha<\cos(\sin\alpha)$.

1.26. а) У к а з а н и е: $u+|u|=0 \Leftrightarrow u \leq 0.$

е) Учесть, что $|\mathrm{tg} x+\mathrm{ctg} x| \geq 2,$ а $2+\sin y \geq 1.$

1.28. Подставьте $x=1.$

1.29. Ни одного. У к а з а н и е: выделите полный квадрат.

1.30. $\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2=0.$ Корни $\sqrt[3]{\frac{q}{2}}$ (дважды) и $-\sqrt[3]{4q}$.

1.32. $3-x.$

1.34. Сравните значения трехчлена при $x=0$ и при $x=1.$

1.38. Рассмотрите значение $x=-\frac{b}{2a}.$

1.39. По диаметру большей окружности.

1.42. Ответ не зависит от поворота квадрата.

1.44. Докажите, что эта сумма постоянна для всех таких прямых.

1.45. Доказать формулу $S_{\text{трап.}}=\frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$ (φ — угол между диагоналями), затем учесть неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел.

1.47. n-угольная пирамида имеет $2n$ ребер; срезав одну из вершин основания, получим многогранник с ($2n$+3)-мя ребрами. Если B (число вершин) = 4, то P (число ребер) не превосходит 6. Если $B \geq 5,$ то в каждой вершине сходится не менее трех ребер, причем каждое считается дважды, так что $P \geq \frac{5 \cdot 3}{2} > 7.$

1.48. $2+\frac{\sqrt{2}}{2}.$

1.49. Можно.

1.51. Не менее 6 раз (формального доказательства я не знаю!).

1.53. Предположим, что для некоторого значения d таких точек нет. Тогда 3 вершины любого равностороннего треугольника со стороной d выкрашены в 3 разных цвета. Тогда любые 2 точки, расстояние между которыми равно $\sqrt{3}d,$ выкрашены в один цвет (примем этот отрезок за диагональ ромба, состоящего из двух равносторонних треугольников). Теперь достаточно рассмотреть треугольник со сторонами $d, \sqrt{3}d, \sqrt{3}d.$

1.57. Пусть я знаком хотя бы с тремя из остальных пяти (в противном случае я незнаком хотя бы с тремя, далее аналогично). Если хотя бы двое из этих троих знакомы, то мы втроем образуем искомый треугольник. Если все они незнакомы между собой, то они втроем образуют его.

2.1. a) $4ab$;

b) $\cos(\alpha-\beta)$;

c) 1;

d) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+1$;

e) $-2.$

2.2. Если все элементы определителя положительны, то имеем три плюса и три минуса. С изменением знака любого элемента определителя меняют знак два элемента разложения, и число плюсов и минусов остается *нечетным.*

2.3. 121 (учесть результат предыдущей задачи).

2.5. Достаточно одной из формул Виета: $\alpha+\beta+\gamma=0.$

2.7. Транспонируйте определитель.

2.13. Минор данного элемента равен нулю.

2.14. Определитель второго порядка равен $1+1=2$, $1-1=0$ или $-1-1=-2.$ Определитель любого порядка, разлагая по строкам, можно представить как алгебраическую сумму определителей второго порядка, т.е. *четное* число.

2.15. Разложите по первой строке.

2.19. Решение ($x_1 = x_2 = \ldots = x_{10} = 1$) очевидно. Необходимо доказать его единственность.

2.21. Прибавьте к первой строке все остальные.

2.22. Определитель может принять только одно значение.

2.23. b) 1. Вычитанием первой строки из остальных определитель порядка n приводится к такому же определителю порядка $n-1$.

2.25. a) Значения $x = 0, 1, \ldots, n-1,$ очевидно, являются корнями (совпадают две строки). С другой стороны, многочлен степени $n-1$ больше корней иметь не может.

b) При $x = -497$ сумма всех столбцов определителя дает нулевой столбец.

c) x — любое, т.к. второй столбец равен полусумме соседних.

3.1. 2π (сумма *внешних* углов треугольника).

3.3. $0; 2; 4; 2\sqrt{2}; 2\sqrt{5}.$

3.5. Отрезок *AB*.

3.7. 0. У к а з а н и е: рассмотрите проекции сторон правильного 5-угольника на направление, составляющее угол в 7° с одной из них.

3.12. $\dfrac{|\mathbf{c}| - |\mathbf{a}|}{|\mathbf{c}| + |\mathbf{a}|}(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + \mathbf{c}).$

3.18. Пусть **a** и **b** лежат по одну сторону от **c**, **d** и **e** — по другую. Покажите, что проекции на **c** векторов $\mathbf{a}+\mathbf{e}$ и $\mathbf{b}+\mathbf{d}$ положительны.

3.22. Рассмотрите n векторов с координатами $\{a_i, b_i, c_i\}$ и объясните геометрический смысл неравенства.

3.24. 5 Н. Достаточно вычислить скалярный квадрат суммы трех векторов.

3.27. $\mathbf{M} = \dfrac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$; $\mathbf{B} = \dfrac{|\mathbf{b}|\mathbf{a} + |\mathbf{a}|\mathbf{b}}{|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|}$; $\mathbf{H} = \dfrac{(\mathbf{b}^2 - \mathbf{ab})\mathbf{a} + (\mathbf{a}^2 - \mathbf{ab})\mathbf{b}}{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2}.$

3.28. 2^{55}.

3.29. Достаточно заметить, что каждый из векторов $\mathbf{a}\times\mathbf{c}$ и $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ перпендикулярен **c**.

3.30. Только при перпендикулярных; $\mathbf{x}=\dfrac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}+t\mathbf{a}$, где t — любое действительное число.

3.31. **a**, **b**, **d** компланарны; при этом, если $\mathbf{d}\neq\mathbf{0}$, то **a** и **b** не коллинеарны.

3.32. Пусть $\mathbf{x}=\alpha\mathbf{i}+\beta\mathbf{j}+\gamma\mathbf{k}$. Данное уравнение в координатной форме имеет вид: $\begin{cases}\alpha=A_y\gamma-A_z\beta+B_x,\\ \beta=A_z\alpha-A_x\gamma+B_y,\\ \gamma=A_x\beta-A_y\alpha+B_z.\end{cases}$

Единственность решения следует из того, что главный определитель этой системы равен $1+|\mathbf{A}|^2$. Решив ее, можно записать ответ в компактной векторной форме.

3.33. 0. Умножьте эту сумму векторно на каждый из данных векторов.

3.34. Уравнение $\begin{vmatrix}h & 1 & 1\\ 1 & h & 1\\ 1 & 1 & h\end{vmatrix}=0$ имеет корни $h_{1,2}=1, h_3=-2$.

Ответ: -2.

3.36. Раскрыв смешанное произведение $((\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a})\times(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\mathbf{a}+2\mathbf{b}-\mathbf{c})$, получим $-3\mathbf{abc}$.

3.38. Из трех компланарных векторов один линейно выражается через остальные. Пусть, например, $\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\alpha(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\beta(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Умножив это равенство скалярно на **b**, получим: $\mathbf{abc}=0$, т.е. $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ компланарны, откуда и следует требуемое.

3.41, 3.42. Вспомните геометрический смысл определителя 3-го порядка.

4.1. У к а з а н и я: 1) Добавьте ось OZ и рассмотрите векторное произведение $\overline{AB}\times\overline{AC}$. 2) Поднимите треугольник на 1 вверх и рассмотрите смешанное произведение $\overline{OA}\overline{OB}\overline{OC}$.

4.3. Покажите, что уравнение относительно $t=\frac{y}{x}$ при любом a имеет два корня.

4.5. Если все эти числа рациональны, то и $\operatorname{tg}30^\circ$ рационален (как вычисляется угол между прямыми?).

4.6. Аналогично предыдущей задаче.

4.9. Если точка $M(x,y)$ удовлетворяет условию, то $d(A,M)=2d(B,M)$, что сводится к уравнению *окружности*.

4.10. Пусть $A(0,-1)$, $B(0,1)$, $M(x,y)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи. Угловые коэффициенты прямых *AM* и *BM* равны соответственно $\frac{y+1}{x}$ и $\frac{y-1}{x}$. Подставив их в формулу $\operatorname{tg}\psi=\frac{k_1-k_2}{1+k_1k_2}=\pm1$, получим уравнения *двух* окружностей: $x^2+y^2\pm2x=1$ (геометрически очевидно, что каждая окружность входит в ответ не полностью).

4.11. Удобно расположить оси координат так, например, чтобы данные точки имели координаты $A(0,0)$, $B(0,1)$. Действуя далее, как при решении предыдущей задачи, и используя формулу тангенса двойного угла, получим уравнение *гиперболы* (нужна только одна ветвь — почему?).

4.12. Дуги гиперболы, параболы (вспомните их геометрические определения), затем отрезок прямой.

4.13. Необходимо не только вспомнить геометрические определения параболы, эллипса и гиперболы, но и рассмотреть различные расположения заданных объектов (точка вне, внутри или на окружности; прямая — относительно окружности), а также учесть возможность внешнего или внутреннего касания двух окружностей.

4.17. Четверть эллипса. Указание: уравнения удобно записать в параметрической форме, приняв за параметр острый угол между отрезком и одной из осей координат.

4.20. По эллипсу.

4.21. Если $P(2x,0), Q(0,2y),$ то по условию $x+y+\sqrt{x^2+y^2}=p$ (полупериметр треугольника); это уравнение можно преобразовать к виду $y=\frac{p}{2}\frac{2x-p}{x-p}$. Графиком дробно-линейной функции является *гипербола*.

4.23. $(x-t)^2+(y-t+2)^2=2t^2-8t+40,$ где t — любое действительное число.

4.25. Указание: все эти прямые касаются четверти окружности $x^2+y^2=1,$ находящейся в первом квадранте.

4.27. Указание: записать условие того, что система двух данных уравнений не имеет решений.

4.28. Три ответа: $5y=x^2-1;\ x=(y-1)^2;\ 9x=(y+3)^2.$

4.29. Достаточно построить часть окружности $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2,$ лежащую в первом квадранте, и отразить относительно обеих осей. В зависимости от a, b, R насчитывается по меньшей мере 21 существенно различный случай.

4.31. Окружность.

4.33. Линия представляет собой верхнюю половину гиперболы.

4.34. а)—е) Разложите на множители, приведя к виду $f(x,y)g(x,y)=0.$ Например, в первой задаче линия $(2x^2+y^2-1)(2x^2-y^2-1)=0$ является объединением эллипса и гиперболы.

f) Указание: найдите наименьшее значение каждой скобки.

h) Контур квадрата. У к а з а н и е: рассмотрите 4 части, на которые плоскость делится прямыми $x \pm y = 0$.

j) Линия состоит из прямой $x + y = 1$ и двух полупрямых $y = 1 + x\ (x > 0)$ и $x = 1 + y\ (y > 0)$.

m) Сетка из наклонных прямых. У к а з а н и е: запишите в виде $\sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 0$ и разложите левую часть на множители.

n) Часть (какая именно?) параболы $y = 2x^2 - 1$.

4.35. a), b) Приведите к виду $\frac{f(x, y)}{xy} > 0$. Левая часть меняет знак на линиях $f(x, y) = 0,\ x = 0,\ y = 0$ (две последние линии не входят в ответ).

c) У к а з а н и е: Если m, n— целые числа и $5m + 2n = 9$, то уравнению удовлетворяют все точки (x, y), где $m \le x < m + 1,\ n \le y < n + 1$.

4.37. $\left(76; \sqrt{161}\right)$. У к а з а н и е: если $y(t_1) = y(t_2)$ при $t_1 \ne t_2$, то $t_1 = -t_2$.

4.39. a) Отрезок прямой.

b) Линию $\rho = 2\cos\frac{\varphi}{3}$.

4.40. Искомый угол α определяется из равенства $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{A - C}{B}$.

5.1. a) $x \ne 0; \frac{1}{2}; \frac{4}{5}$.

b) $x > 625$.

c) $x \le -5, x = -1, x \ge 3$ (постройте график подкоренной функции последовательным преобразованием графика).

5.2. Нечетна.

5.4. $y = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x}{x^2 - 1}$ (Примечание: при $x = 1$ равенство, естественно, нарушается).

5.5. $f(x)=\frac{1}{2}\left(f(x)+f(-x)\right)+\frac{1}{2}\left(f(x)-f(-x)\right).$

5.7. Ответ: $-x$, *кроме* (без этого ответ неполон!) $x=0$ и $x=1$.

5.9. a), b) Нет.

c) Да.

5.10. $T=4a$.

5.11. Подберите такое число a, что функция $\varphi(x)=a^{-x}f(x)$ — периодическая.

5.12. Подставляя данные равенства друг в друга, получим: $f\left(2\left(\sqrt{2}x+2\right)\right)=f\left(\sqrt{2}(2x)+2\right)$, откуда видно, что $T=2$ является периодом. Наименьшего периода не существует (из первого равенства легко доказать, что если T — период, то $\frac{T}{2}$ — тоже период). Следствие: если данная функция непрерывна, то она — константа.

5.15. x.

5.16. b) Подставьте $\frac{1}{x}$ вместо x.

5.18. Достаточно сравнить значения функций в точках 0 и 1.

5.21. a) Сравните с задачей 4.34 n).

c) $y=\sin^2 x$, но только для тех x, для которых $\sin x>0$.

d) Неверно, что $y=\sqrt{x}$.

5.23. Графически очевидно, что уравнение $\cos t=|t|$ имеет два решения, отличающиеся знаком.

5.25. Обратите внимание на односторонние пределы функций в точках разрыва и на границах области определения.

a) $\lim\limits_{x\to\pm 0} y=\pm\infty;\ \lim\limits_{x\to 1-0} y=1;\ \lim\limits_{x\to 1+0} y=-0;\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} y=-1.$

c) $\lim\limits_{x\to\pm 0} y = \lim\limits_{x\to -3\pm 0} y = \pm\dfrac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \pm 0.$

e) Точек разрыва нет!

5.27. Поровну (воспользоваться монотонностью функции $y = a^x$).

5.28. Построить графики обоих частей уравнений.

a) 9 решений, т.к. $4\pi < 12{,}6 < 4{,}5\pi.$

c) 3 решения, т.к. $3\pi < 10 < 4\pi.$

5.29. Пусть $f(0) = A \neq 0,\ f(A) = B;$ тогда $f(B) = 0$ и, по условию, каждое следующее из чисел $|A-0|, |B-A|, |0-B|, |A-0|$ меньше предыдущего.

5.30. Обе функции $y = \sin(\cos x)$ и $y = \cos(\sin x)$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ убывают, а функция $y = x$ возрастает. Учесть также задачу 1.24 d).

6.3. a) Неверно.

b) При любых.

6.4. Существует и равен нулю.

6.6. 1.

6.7. Пример: $a_n = (-1)^n.$

6.10. $v_n = 0$ при всех n, начиная с $m+1.$

6.11. 0. У к а з а н и е: каждый из простых множителей $\geq 2,$ поэтому $2^{v(n)} \leq n \Rightarrow \dfrac{v(n)}{n} \leq \dfrac{\log_2 n}{n}.$

6.12. Значение предела $l = 1$ легко найти графически как точку пересечения графиков $y = x$ и $y = 2^{1-x}$, если учесть, что $l = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}.$ Для доказательства существования предела надо с помощью тех же графиков проследить за поведением последовательности $\{x_n\}.$

6.13. $\sqrt{2} - 1;$ не существует. См. указания к предыдущей задаче.

6.15. Оба предела равны π.

6.16. Если ответ равен l, то $l=\sqrt{3\sqrt{5l}}$. Аналогично решаются и две следующие задачи. (Примечание для буквоедов: не стоит требовать от решающего обоснование существования пределов, т.к. корректность формулировки задачи — на совести составителя, а он ни о каких пределах не говорил.)

6.20. Отношение проекций равно $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{3\pi}{2n}}$. Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

6.21. a) Вынесите $\sqrt{1986}$ и учтите, что при $0<q<1$ будет $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$, а число слагаемых под корнем фиксировано.

b)—d) Оцените суммы сверху и снизу (через наибольшее и наименьшее слагаемые).

f) Вынесите в каждой скобке наибольшее слагаемое.

6.23. Сравните с 6.21a).

6.24. Для любого начального значения x $x_1=\cos x\notin[-1{,}1]$. Далее полезно графически изучить приближение точек $x_{n+1}=\cos x_n$ к значению аргумента, при котором пересекаются линии $y=x$ и $y=\cos x$.

6.26. А здесь существование предела надо обосновать. Возрастание последовательности очевидно за счет добавления крайнего справа корня. Можно также по индукции доказать, что каждый член последовательности не превышает, например, $2+c$.

6.28. Последовательность $x_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ убывает к числу e^{-1} (см. зад. 6.27). Легко видеть, что $3=6(1-x_1)<6(1-x_{1000})<6(1-e^{-1})<6(1-3^{-1})=4.$

6.31. Во всех случаях (кроме j), m))требуется выяснить, какие слагаемые являются главными (т.е. растут быстрее) в различных областях изменения аргумента.

a) $y = \begin{cases} x, & |x| < 1, \\ \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$ (при $x = -1$ предел не существует).

e) У к а з а н и е: при положительных x существенны только вторые слагаемые в числителе и знаменателе дроби, при отрицательных — только первые.

i) На каждом из промежутков [0;1], [1;2], $[2;\infty)$ существенно только наибольшее из слагаемых (см. 6.23).

j) $y = 1,$ если $\sin x = \pm 1;$ $y = 0$ при остальных значениях x.

6.32. У к а з а н и е: домножить на $\sin\frac{\alpha}{2^n}$.

6.33. a), d) 0.

c) ∞.

e), b), i) 1.

f) $\frac{1}{2}$. У к а з а н и е: переведите иррациональность в знаменатель.

h) 0. У к а з а н и е: используйте неравенство $|\sin\alpha - \sin\beta| \le |\alpha - \beta|,$ для доказательства которого достаточно преобразовать левую часть в произведение.

j) 0. У к а з а н и е: вычтите $\sin\pi n$ и учтите два предыдущих указания.

k) π. У к а з а н и е: вычтите $n\sin 2\pi n$ и преобразуйте в произведение.

m) Замените $x = y + \frac{\pi}{4}$.

p) $e^{-\frac{1}{6}}$.

q) $e^{-\frac{1}{2}}$.

6.35. Один корень стремится к $-\frac{c}{b}$, второй — к ∞.

6.38. У к а з а н и е: рассмотрите поведение функции $\sqrt{f(x)}$ при $x \to \pm\infty$.

6.41. Для любого $x \neq 0$ рассмотрим убывающую геометрическую последовательность значений аргумента $x, ax, a^2x, \ldots$ или $x, \frac{x}{a}, \frac{x}{a^2}, \ldots$ Учитывая непрерывность функции и данное условие, получим: $f(x) = f(0)$, т.е. функция является *константой*.

6.43. Рассмотрите последовательность $f(1), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{1}{4}\right), f\left(\frac{1}{8}\right), \ldots$ и учтите, что она должна иметь конечный предел $f(0)$. Ответ: $\frac{8}{7}x^2$.

6.46. Неверно.

6.48. а) Нет. Пусть $f(a) = f(b) = A$. По условию, на отрезке $[a;b]$ функция больше нигде не равна *A*. Пусть $f(x) > A$ на (a,b). Тогда функция достигает наибольшего значения, равного *B*, в некоторой точке $c \in (a,b)$, а все значения, лежащие между *A* и *B*, принимаются по два раза. По условию, существует точка *d*, в которой $f(d) = B$. Оба варианта $d \in (a;b)$ и $d \notin [a;b]$ приводят к тому, что некоторые из промежуточных значений принимаются функцией еще раз.

b) Да, такую функцию можно построить.

6.52. Докажите, что левая часть не может иметь одинаковый знак в обоих концах отрезка.

6.54. Да.

6.57. Опишите любой прямоугольник и поверните его на 90°, все время сохраняя касание всех 4-х сторон. Разность сторон прямоугольника при этом изменяется непрерывно и меняет знак.

7.1. $f(a)-af'(a)$.

7.4. У к а з а н и е: функции $|x|^2$ и $|x|^3$ дифференцируемы при $x=0$.

7.5. a) $f'(0\pm 0)=\pm 1$.

7.6. Все функции, кроме $g(x)$, непрерывны, $f(x)$ и $\psi(x)$ дифференцируемы.

7.7. Да.

7.8. $a=0, b=\frac{1}{2}$.

7.10. Если производная четна, то функция может не быть нечетной (например, $f(x)=1+\sin x$).

7.14. b) Используйте формулу тангенса суммы.

7.16. Ответ $y'=\frac{x(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}$ можно записать и в других формах, используя данное равенство или эквивалентное ему: $y\ln x=x\ln y$.

7.18. Дифференцируйте как неявную функцию, учитывая, что $(x|x|)'(0)=0$.

7.19. $(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x,\ (\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x,\ (\mathrm{th}x)'=\frac{1}{\mathrm{ch}^2x},\ (\mathrm{cth}x)=\frac{1}{\mathrm{sh}^2x}$.

7.20. У к а з а н и е: какую степень может иметь этот многочлен?

7.22. $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$. У к а з а н и е: из условий задачи легко вывести равенство $2f'(x)=1$.

7.24. $P(x)=\frac{x^5}{2}-\frac{5}{4}x^3+\frac{15}{8}x;\ A=\frac{15}{8}$.

7.27. c) Выделите целую часть дроби.

d), e) Разложите по образцу $\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}$.

f) $1+x=2-(1-x)$.

7.29. Рассмотрите выражение в скобках как производную.

7.32. 1. Указание: $\frac{x^{100}}{x-1} = x^{99} + x^{98} + ..x + 1 + \frac{1}{x-1}.$

7.33. 1. Указание: покажите, что $y''' = -y.$

7.34. a) $\frac{1983!}{x}.$ Указание: учтите, что при $n > m$ $(x^m)^{(n)} = 0.$

b), c) Преобразуйте произведение в сумму.

7.35. 0.

7.36. См. 7.34 c).

7.39. Ускорение $a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = (2s-2)v.$

7.41. a) При малом увеличении длины ребра куба его объем возрастает в основном за счет граней, а не ребер.

8.3. Покажите, что эта касательная перпендикулярна отрезку *AB*.

8.4. Приведем решение, не использующее производных. Пусть парабола задана уравнением $y^2 = 2px,$ а $M\left(-\frac{p}{2};Y\right)$— любая точка директрисы. Прямая $y - Y = k\left(x + \frac{p}{2}\right)$ является касательной к параболе, если система уравнений прямой и параболы имеет единственное решение. Эта система сводится к уравнению $ky^2 - 2py + 2pY + kp^2 = 0.$ Приравняв нулю дискриминант, получим: $p^2 - 2kpY - k^2p^2 = 0.$ Последнее уравнение имеет два корня $k_1, k_2,$ причем по формуле Виета $k_1k_2 = -1.$

8.8. Дифференцируйте неявную функцию $\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ в точке $(2\pi;0).$

8.9. Очевидно, что ближайшей к данной прямой точкой параболы является та, в которой касательная параллельна этой прямой, т.е. $y' = 2x = 1.$

8.11. При $p \geq 1$ и при $p < 0$ вершина параболы; при $0 < p < 1$ точки с абсциссой $-p.$

8.13. Требуется найти *наименьшую* возможную длину отрезка вида PQ. Геометрически очевидно, что в этом случае касательные к гиперболе в точке P и касательная к эллипсу в точке Q параллельны, а прямая PQ к ним перпендикулярна.

8.16. Удобно использовать параметрические уравнения эллипса:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{OM_0} \times \overline{OM}\right| = \frac{1}{2}\left|\{a\cos t_0, b\sin t_0, 0\} \times \{a\cos t, b\sin t, 0\}\right| = \frac{ab}{2}\left|\sin(t - t_0)\right|,$$

откуда видно, что наибольшая площадь достигается при $t = t_0 \pm \dfrac{\pi}{2}$ и *не зависит* от $M_0.$ (Заметим, что это решение также не использует производных.)

8.18. а) Очевидно, что требуется найти точки, в которых касательные к кардиоиде горизонтальны (см. указание к зад. 8.8). Заметим, что эти точки *не* соответствуют значениям $\varphi = \pm\dfrac{\pi}{2}.$

8.19. Убедитесь, что для $f(x)$ выполнены условия теоремы Ролля.

8.21. Неверно. Рассмотрите $f(x) = x^3$ и $c = 0.$

8.22. Примените теорему Лагранжа к функции $\varphi(x) = f(x+1) - f(x)$ на отрезке $[x; x+1]$.

8.23. Пусть $f'(0) > 0, f'(1) < 0;$ тогда при малых положительных ε будет $f(\varepsilon) > f(0), f(1-\varepsilon) > f(1).$ Отсюда и из непрерывности функции следует, что наибольшее значение функции на отрезке [0,1] достигается в некоторой его *внутренней* точке c. По теореме Ферма, $f'(c) = 0.$

8.25. а) Убедитесь, что $f'(x) < 0$ всюду, где функция существует.

b) 1986. На каждом промежутке [-1986; -1985],…,[-1; 0] функция убывает от $+\infty$ до $-\infty$, а $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0.$

8.26. Найдите интервалы монотонности левой части уравнения.

8.27. Среднее арифметическое данных чисел.

8.28, 8.29. Замените n непрерывной переменной x и исследуйте на экстремум.

8.30. Если при $x=x_0$ линии касаются, то совпадают значения функций и производных: $ax_0^2=\ln x_0, 2ax_0=\frac{1}{x_0}.$

Ответ: $\frac{1}{2e}$. Аналогично решаются задачи 8.31—8.35.

8.37. {0}. У к а з а н и е: линии $y=e^x$ и $y=1+x$ касаются при $x=0.$

8.38. Экстремумы достигаются в точках $x=\pm 1.$ В этих точках производная меняет знак, т.к. $\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}=\left|1-x^2\right|.$

8.41. Исследуйте левую часть уравнения на монотонность на отрезке [-1; 1].

8.44. b) Достаточно доказать, что функция $f(x)=1+2\ln x-x^2$ имеет единственный максимум $f(1)=0.$

f) В концах отрезка достигается равенство, а функция $y=\sin x$ на нем выпукла.

i) Найдите наибольшее значение левой части на данном отрезке.

k) Для функции $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ убывание на интервале $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ сводится к известному неравенству $\operatorname{tg} x > x.$

8.45. Достаточно последовательно применять правило Лопиталя.

8.46. Аналогично предыдущей задаче, предварительно сделав замену $x=\frac{1}{y}$.

8.47. а) Ответ: $+\infty$. У к а з а н и е: докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{10}x}{x}=0$.

8.49. Докажите, что правая часть растет медленнее левой (ср. предыдущее указание).

8.50. 2 решения.

8.52. Приведите данное равенство к эквивалентному виду $\frac{\ln x}{x}=\frac{\ln y}{y}$ и исследуйте график функции $v=\frac{\ln u}{u}$.

8.53. Используйте результаты предыдущей задачи.

8.54. Найдите интервалы монотонности левой части уравнения.

8.55. а) Да. b) Нет. У к а з а н и е: учтите монотонность функций.

8.57. Используйте выпуклость графика функции $y=\sqrt{x}$.

8.58. Задача сводится к вопросу: при каких значениях a уравнение $e^x+6ax=0$ имеет более одного корня (ср. с зад. 8.30—8.35)?

8.61. Не может (если квадратный трехчлен обращается в ноль только один раз, то он не меняет знака).

8.63. Неверно.

8.65. Если кривая замкнута, то функция $D(t)=|\mathbf{r}(t)|^2$ достигает максимума при некотором значении t_0. Рассмотрите $\frac{d^2}{dt^2}D(t_0)$.

8.67. Докажите, что функция $f(t)=t\ln t-1$ имеет ровно один ноль.

8.71. Можно, если повернуть на определенный угол.

8.74. Не будут. В общем случае наименьшее расстояние между кораблями равно $\frac{dv_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}$.

8.76. На высоте $\frac{1}{\sqrt{2}}$ м.

8.78. Если R — данный радиус кастрюли, r — радиус яйца, то требуется минимизировать функцию $V(r) = 2\pi R^2 r - \frac{4}{3}\pi r^3$.

8.79. 3 м.

8.81. Надо идти по прямой к точке, находящейся на дороге в 8,25 км от дома, затем — по дороге.

8.83. Тангенс угла между направлением на север и оптимальным направлением ветра равен 2.

8.84. Пусть В — точка встречи. Так как лодочник терпит убыток в 5 долларов за 1 км пути без пассажира и имеет прибыль в 5 долларов за 1 км пути с пассажиром, то ему следует максимизировать разность длин отрезков ВБ и АВ. Легко доказать геометрически или аналитически, что эта разность в условиях задачи максимума не достигает, но может сколь угодно близко подойти к величине 6 км.

8.85. Требуется минимизировать функцию $\frac{C(v)}{v}$ (затраты на 1 км).

8.87. Автомобильная дорога должна составлять с железной дорогой угол 120°.

8.88. При N роботах потребуется $\frac{1000}{N}$ дней и общие затраты составят $2000N + \frac{1000}{N}\cdot 50$ долларов. Эта функция минимальна при $N = 5$.

8.92. Треугольник — равнобедренный (т.е. наибольшее значение достигается на границе области задания функции).

8.93. Сектор с центральным углом 2 радиана.

8.95. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}l^3$. Проще всего за неизвестную взять высоту конуса.

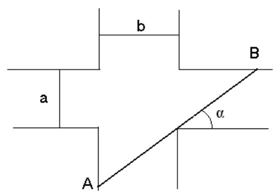
8.97. Если угол при вершине в осевом сечении конуса острый или прямой, то это сечение и является требуемым. Если этот угол тупой, то следует выбрать сечение с прямым углом при вершине.

8.99. Если радиус данной окружности равен *r*, а указанный угол равен 2α, то радиус сектора $R = 2r\cos\alpha$, а его площадь $S(\alpha) = 2r^2\alpha\cos^2\alpha$. Уравнение $S'(\alpha) = 0$ приводит к равенству $\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$. Графически очевидно, что $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (т.к. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} > \frac{\pi}{4}$). Таким образом, угол 2α — *тупой*.

8.102. Ср. с задачами 8.11, 8.12.

8.103. $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

8.104. Наибольшая длина трубы равна *наименьшей* длине отрезка вида *AB*. Эта длина как функция от α равна $\frac{a}{\sin\alpha} + \frac{b}{\cos\alpha}$ и достигает минимума при $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$.



Ответ: $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$.

9.1. Решение неравенств с двумя переменными сводится к построению линий, на которых достигаются равенства, и выбору нужных частей из тех, на которые плоскость разбивается этими линиями (при этом следует учитывать, что, как правило, на каждой линии в соответствующем неравенстве меняется знак). Сами линии включаются или не включаются в область определения в зависимости от вида неравенства: $\geq,\leq$ или $>,<$.

e) Подкоренное выражение меняет знак на параболах $x=y^2+\pi n$ и прямой $y=0$ (эти линии включены в область определения) и параболах $x=y^2+\pi n+\dfrac{\pi}{2}$ (не включаем в область определения, т.е. обозначаем пунктиром; однако было бы ошибкой вообще не рассматривать второе семейство парабол).

f) $-1\leq\dfrac{x}{x+y}\leq 1\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{y}{x+y}\geq 0,\\ \dfrac{2x+y}{x+y}\geq 0.\end{cases}$ Ответ: 2 части плоскости, разделенной прямыми $y=0$ и $2x+y=0,$ включая сами эти линии, *но исключая* начало координат.

k) Прямоугольник $|x|\leq\sqrt{2},|y|\leq 1,$ кроме двух отрезков гиперболы $x^2-y^2=1.$

9.2. b) Например, функция $f(x,y)=\sqrt{-x^2y^2}\sqrt{-y^2(y-1)^2}.$

9.3. $f(x,y)=\dfrac{1}{2}(xy-y^2).$

9.4. Неверно.

9.6. a) Нет, т.к. пределы по линиям $x=0,y=0,y=\pm x$ различны.

b) Да: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0{,}0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(0{,}0)=0,$ хотя функция в этой точке разрывна.

9.8. a) $C_7^3=35,$ в том числе: 5 производных вида $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^3}$; 20 производных вида $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}$; 10 производных вида $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z}$.

9.15. Исходите из соотношений $ab=ch,\ c>a,\ c>b.$

10.2. Вычисляйте $\int |\sin x| dx$ на промежутках $[n\pi; (n+1)\pi]$; константы интегрирования подбирайте так, чтобы в точках $x = n\pi$ функция была непрерывной.

10.6. b) $f(x) = 1 + \sin x.$

10.7. a) У к а з а н и е: $f(x) = 1 - x.$

10.8. $\frac{\ln x}{x} P_{1986}(x) + \frac{C}{x}$, где $P_k(x)$ — любой многочлен степени k.

10.10. c) Интегрируйте по частям: $I_n = \int x^n df^{(n)}(x) = x^n f^{(n)}(x) - nI_{n-1}.$

10.11. Вводите новую переменную: a) x^n; b) $3 - x$; c) $x^4 - 1$; d) $x^2 - 10$; e) $x^7 + 1$; h) x^3; j), o) tg$x$; l) $\ln x$; m) $\sqrt{1 + e^x}$.

g) $\frac{1 + x^4}{1 + x^6} = \frac{(1 - x^2 + x^4) + x^2}{1 + x^6}.$

p)—w) Интегрируйте по частям.

10.12. a) $I_n = \frac{1}{n-1} \mathrm{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$. У к а з а н и е: $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$.

c) $I_n = \frac{x}{7(n-1)(1 + x^7)^{n-1}} + I_{n-1}\left(1 - \frac{1}{7(n-1)}\right)$. У к а з а н и е:

$$\frac{dx}{(1 + x^7)^n} = \frac{(1 + x^7) - x^7}{(1 + x^7)^n} dx = \frac{dx}{(1 + x^7)^{n-1}} - \frac{1}{7} \frac{xd(1 + x^7)}{(1 + x^7)^n}.$$

e) $I_n = \frac{1}{n} \sin x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$

f) $I_n = x \arcsin^n x + n\sqrt{1 - x^2} \arcsin^{n-1} x + n(n-1)I_{n-2}.$

11.1. Если такого отрезка нет, т.е. на сколь угодно малом отрезке можно найти точку, в которой функция не положительна, то можно построить сколь угодно мелкое разбиение отрезка, для которого соответствующая интегральная сумма также не будет положительной.

11.2. a) $\int_0^{\pi} \sin x dx = 2.$

b) $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right)$ — интегральная сумма для функции $f(x)=\frac{1}{1+x}$ на отрезке [0; 1].

f) $\int_0^1 2xe^{x^2}dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = 1.$

g) $\int_0^1 x^k dx$ существует при $k>-1.$

11.3. Ответ: $\frac{4}{e}$. До вычисления предела прологарифмируем:

$$\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n} = \frac{1}{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ldots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)\to$$

$$\to\int_0^1 \ln(1+x)dx.$$

11.5. a) $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}|\cos x|$ (если не учесть модуль, то в ответе получится ноль, хотя подынтегральная функция положительна).

b) Ответ: 0. Достаточно учесть, что арксинус — функция нечетная. Полезно также для наглядности построить график функции $y=\arcsin(\sin x)$ (см. зад. 5.24.).

11.7. $a=\frac{3}{2}.$

11.10. См. зад. 10.12 а).

11.11. Ответ: $c_1=c_3=\frac{9}{8}, c_2=\frac{3}{4}$. Достаточно последовательно подставить $f(x)=1,$ $f(x)=x,$ $f(x)=x^2,$ считая данное приближенное равенство точным. Затем проверьте, что для $f(x)=x^3$ равенство сохраняется.

11.12. Только константы. У к а з а н и е: при $\alpha \neq 0$ замените $y=\alpha x;$ полученное равенство $\int_0^{\alpha} f(y)dy=\alpha f(\alpha)$ продифференцируйте по $\alpha.$

11.13. Проинтегрируйте данное равенство по данному отрезку.

11.15. b) $\cos x f(\sin x)-3x^2 f(x^3).$

11.18. a) При больших n x^n мало отличается от нуля *почти* на всем отрезке [0; 1].

c) Примените правило Лопиталя.

11.19. $2\pi n \le x \le \pi(2n+1),\ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

11.20. a) Достаточно разбить отрезок интегрирования на частичные отрезки [0; 2], [2; 4], [4; 10], заменив затем знаменатель наименьшим значением (в начальной точке каждого отрезка).

c) Учтите выпуклость подынтегральной функции.

d) Разбейте отрезок интегрирования пополам и замените на втором отрезке $x=y+\pi.$

f) Покажите, что подынтегральная функция убывает на данном отрезке.

11.21. a) Заменив на первой половине отрезка $x=-y$ и снова переобозначив $y \to x,$ получим: $\int_0^{0{,}001} \sqrt[3]{x}(e^x-e^{-x})dx>0$ (ср. с 11.20 d)).

b) Замените $x^2=y.$

11.22. a) Достаточно вычесть один интеграл из другого и учесть, что на $(0{,}1]$ $\sin x<x.$ Замечание: второй интеграл на самом деле является несобственным; для достижения

полной строгости подынтегральную функцию следует дополнить по непрерывности значением 0 при $x=0$.

11.24. Заменив во втором интеграле $\alpha x \to x$, придем к неравенству $\int\limits_0^\alpha \left(f(x) - f\left(\frac{x}{\alpha}\right)\right) dx \ge 0$. При $\alpha \in (0{,}1]$ будет $x \le \frac{x}{\alpha}$.

11.25. Проинтегрируйте неравенство $\frac{(M - f(x))(f(x) - m)}{f(x)} \ge 0$.

11.26. Проинтегрируйте (раскрыв предварительно скобки) неравенство $\left(f(x) - f_{\text{ср.}}\right)^2 \ge 0$, где $f_{\text{ср.}} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ — среднее значение функции на отрезке.

11.30. Рассмотрите геометрический смысл суммы интегралов $\int\limits_0^a e^{x-1}dx + \int\limits_{\frac{1}{e}}^b (1+\ln y)dy$, учитывая, что подынтегральные функции взаимно обратны. Аналогично рассматриваются и две следующие задачи.

11.33. Пусть $f(x)$ и $\varphi(y)$ — взаимно обратные функции, $F(x)$ и $\Phi(y)$ — их первообразные, $f(a)=b$, $f(x_0)=y_0$. Рассматривая сумму площадей двух криволинейных трапеций, примыкающих к осям координат, легко увидеть, что $\int\limits_a^{x_0} f(x)dx + \int\limits_b^{y_0} \varphi(y)dy = x_0 y_0 - ab$, откуда (заменив x_0, y_0 на x, y) имеем: $F(x) + \Phi(y) = xy + C$.

11.35. Чему равен интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля отрезку?

11.37. Правильно:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos^2 x} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{1+\cos^2 x} = \int_0^{\infty} \frac{du}{2+u^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{du}{2+u^2} = \ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{2+u^2}.$$

11.39. a) Достаточно заменить $x = y + \frac{\pi}{2}$, а затем учесть периодичность косинуса.

b) В обеих частях равенства разбейте отрезок интегрирования пополам и на второй половине замените $x \to \pi - x$ (подробнее: замените $x = \pi - y$ и снова переобозначьте переменную интегрирования $y \to x$; так же действуем далее в аналогичных случаях).

11.41. Замените $x \to -x$ и сложите полученный интеграл с исходным.

11.42. Так же, как в предыдущей задаче, с заменой $x \to \frac{1}{x}$.

11.44. a) $x \to -x$; b) $x \to \frac{1}{x}$; c) следует из b).

11.46. a) Достаточно использовать результат зад. 7.10.

b) Интегрируйте по частям, учитывая, что при $k < l$ функция $\frac{d^k}{dx^k}\left((x^2-1)^l\right)$ обращается в ноль в концах отрезка (докажите это).

11.47. Докажите, что $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 1001x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 999x}{\sin x}\,dx$ (рассмотрите разность левой и правой частей); повторяйте эту операцию.

11.48. a) Замените во втором слагаемом $a - x \to x$.

b) Заменим во втором слагаемом $x^2 \to x$; подынтегральное выражение примет вид

$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)e^{x^2}=\frac{1}{2}\left(xe^{x^2}\right)'.$

c) Во втором интеграле замените $x\to e^x$, затем интегрируйте по частям.

11.49. Во втором интеграле замените $x\to\frac{1}{x}$.

11.51. b) При интегрировании по частям обратите внимание на то, что при $x\to 0+0$ произведение $\ln x \operatorname{arctg} x$ представляет собой неопределенность.

c) Ср. с 11.49.

11.52. $(\ln x)^{\ln x}=\left(e^{\ln(\ln x)}\right)^{\ln x}=x^{\ln(\ln x)}>x^2$ при достаточно больших *x*.

11.57. Заменой $x\to\frac{1}{x}$ получим: $I=-I$.

11.58. Если *f*(*x*) — четная функция, то ее производная нечетна, в частности, $f'(0)=0$. Отсюда при $x\in[0;1]$ будет:

$$f'(x)=\int_0^x f''(x)dx\le 2x;\quad f(1)=\int_0^1 f'(x)dx\le\int_0^1 2xdx=1,$$

но по условию $f(1)=1$, следовательно, все предыдущие неравенства также обращаются в равенства, отсюда $f(x)=x^2$.

11.64. Площадь выражается, например, интегралом $2\int_0^{\frac{1}{\sqrt[3]{16}}}\left(y^2+\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}-\sqrt{y}\right)dy$ (используйте результат решения зад. 8.31).

11.66. $2\pi^2aR^2$.

11.68. Пусть радиус основания стакана равен *R*, высота — *H*. Сечения получившегося тела (цилиндрического клина) плоскостями, перпендикулярными диаметру дна, являются подобными друг другу треугольниками. Его объем получается интегрированием площадей этих сечений: $V=\int\limits_{-R}^{R}\frac{1}{2}\left(R^2-x^2\right)\frac{H}{R}dx=\frac{2}{3}HR^2$, что составляет $\frac{2}{3\pi}$ объема всего стакана.

11.70. $\frac{1}{6}\pi H^3$ независимо от радиуса шара.

11.73. Рассмотрите сечения плоскостями, параллельными осям обоих цилиндров.

11.74. $V=-\pi\int\limits_0^1 \ln y dy$ (интеграл несобственный!).

11.75. $\frac{1}{6}abh.$ Сечения, перпендикулярные к данному общему перпендикуляру двух ребер, являются прямоугольниками.

11.77. $\frac{1}{2}\pi r^2 h$ (половина объема цилиндра, т.к. площадь каждого треугольника равна половине площади соответствующего сечения цилиндра).

11.80. $\int\limits_0^{\infty}4\pi\gamma_0(r+h)^2e^{-kh}dh=4\pi\gamma_0\left(\frac{r^2}{k}+\frac{2r}{k^2}+\frac{2}{k^3}\right).$

11.81. Наибольшая сумма $\left(\frac{2}{3}\right)$ при $t=1$; наименьшая $\left(\frac{1}{4}\right)$ при $t=\frac{1}{4}$.

12.3. При отражении линии относительно любой оси координат производная меняет знак, а при отражении относительно начала координат — не меняет.

12.4. Если решение $y(x)$ —четная функция, то при изменении знака x уравнение принимает вид: $-y'=-\sin x+x^2+y^3$. Сложив его с исходным, получим: $y=-x^{\frac{2}{3}}$; эта функция — четная, но уравнению не удовлетворяет. Ответ: не имеет.

12.6.

$$|y(x)| = \left| y(0) + \int_0^x y'(t)dt \right| \le |y(0)| + \left| \int_0^x \frac{dt}{1+t^2+y^2(t)} \right| \le |y(0)| + \left| \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} \right| \le$$

$$\le |y(0)| + \frac{\pi}{2}.$$

12.7. Не может, т.к. из уравнения $y'' > 0$.

12.8. Из равенства $y' = 0$ имеем две параболы: $y = \pm\frac{x^2-1}{2}$. Экстремум (ввиду изменения знака производной при пересечении этих парабол в *горизонтальном* направлении) достигается во всех точках этих парабол, кроме точек $(\pm 1; 0)$, в которых производная не меняет знак, и точек $\left(0; \pm\frac{1}{2}\right)$ (в этих точках, дифференцируя уравнение, имеем: $y' = y'' = 0,\ \ y''' \ne 0$).

12.10. Линия $y = \frac{2x^2(x^2+3)}{x^2+1}$.

12.11. $f(t)$ непрерывна и $\int_0^1 f(t)dt = 0.$

12.13. Ответ: $y = 0;\ y = x+1.$

12.16. Не может по теореме о единственности решения (начальным условиям $x = y = y' = 0$ удовлетворяет также функция $y = 0$).

12.20. Не имеют. Дифференцируя первое уравнение, получим: $y'' = 1 - 4y^3y'$; сравнивая со вторым уравнением, имеем две возможности: $y = 0$ или $y' = -1$. При подстановке в данные уравнения оба равенства приводят к противоречию.

12.23. a) Уравнение станет линейным, если принять y за аргумент, x за функцию.

b) Левая часть равна $(xy' + x + y)'$; новое уравнение

$xy' + x + y = C$ является однородным относительно функции $y - C$.

d) Выразите $y'' = \dfrac{xy' - y}{x^2}$ и рассмотрите правую часть как производную дроби.

e) Вычислите $(x \sin y)'$.

12.26. $\varphi(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

12.28. $y' = \dfrac{\sqrt{1 - y^2}}{1 + x^2}\left(e^x + e^{-x}\right)$.

12.29. Выразите *C* через *x*, *y* и возьмите производную.

12.30, 12.31. Вычислите нужное количество производных и исключите из полученных равенств все константы.

12.32. Так как $e^{i\pi(1+2n)} = -1$, то $\sqrt[i]{-1} = e^{\pi(1+2n)}$ (бесконечное число решений).

12.33. b) Правую часть представьте как сумму функций.

12.34. b) $y^{(7)} - y^{(6)} + y^{(5)} - y^{(4)} = 0$ (рассмотрите корни характеристического уравнения).

d) Корни характеристического уравнения: $\pm 1; \pm 3$.

12.35. $y''' = 6$.

12.36. При положительных.

12.37. a) Общее решение уравнения $y'' = y^{(5)}$ есть

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

d) Достаточно (почему?) решить уравнение $y' = \dfrac{y + y''}{2}$.

12.39. a) $C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1$.

b) Сводится к a), если взять производную: $f''(x) - f'(\pi - x) = 0$ и учесть, что из данного равенства $f'(\pi - x) + f\left(\pi - (\pi - x)\right) = 1$.

12.41. Так как $\cos y = \dfrac{1}{2x^2}$, то $y(1) = \dfrac{\pi}{3}$, $y\left(\dfrac{1}{2}\right)$ не существует.

12.43. Не существует.

12.44. a) $y = C \pm \left(\dfrac{x^2}{2} + x\right)$.

b) Продифференцируйте: $y'(x) = y(x) + 1$. Общее решение этого уравнения подставьте в исходное равенство. Ответ: $y(x) = -1$.

12.45. a) Удобно перейти к равенству $\int\limits_0^x f(t)dt = \ln f(x)$; продифференцировав, получим: $f' = f^2$. Ответ: $\dfrac{1}{1-x}$.

12.46. $y' = 2xy + 1$.

12.50. Гиперболы $x^2 - y^2 = C$.

12.51. Уравнение $y' = x + y$ имеет общее решение $y = Ce^x - x - 1$.

12.53. Ответ: $(x^2 + y^2)y^2 = x^2$. Для окружностей $x^2 + y^2 = R^2$ будет $y' = -\dfrac{x}{y}$; из касания двух линий следует равенство производных.

12.55. Дифференцируя равенство $\int\limits_0^x y(t)dt = \dfrac{1}{2}\big(y(x) - y(0)\big)$, получим: $y' = 2y$.

12.58. $y = Cx^2$.

12.60. Логарифмическая спираль.

12.61. Пусть $v(t)$ — объем кислоты, оставшейся в баке через t минут. По условию, скорость вытекания кислоты пропорциональна ее текущей концентрации: $\dfrac{dm}{dt} = -0{,}05m$.

12.62. Движение было вечным.

12.64. Если $l(t)$ — длина вертикальной части цепи к моменту времени t, то сила, ускоряющая *всю* цепь, равна весу этой ее части: $\frac{dl}{dt} = g\frac{l}{10}$ (уравнение действует только до тех пор, пока $l \le 10$).

12.65. В 4 раза.

12.67. За полчаса до полудня. По условиям задачи скорость продвижения машины пропорциональна времени, прошедшему с начала снегопада: $\frac{ds}{dt} = \frac{k}{t+T}$; известно также, что $s(4) = 2s(1)$.

12.68. Никогда. Если через t минут после прихода впереди нашего студента стоят $x(t)$ человек, то, по условию, $\frac{dx}{dt} = -5 + \frac{x}{10}$; решая при начальном условии $x(0) = 50$, получим $x(t) = 50$ независимо от t. Если $x(0) > 50$, то очередь впереди студента экспоненциально растет.

13.1. Пусть элемент $m = \max_i \min_j a_{ij}$, элемент $M = \min_j \max_i a_{ij}$. Для элемента X, стоящего в одной строке с m и одном столбце с M, очевидны неравенства $m \le X \le M$.

13.2. $a_{ij} = \frac{1}{2}\left(a_{ij} + a_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(a_{ij} - a_{ji}\right)$ (сравните с решением задачи 5.5).

13.3. а) Да, например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

13.5. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

13.9. Прямым вычислением убеждаемся, что $(AB)(AB) = 9(AB)$. Умножим слева на B, справа на A: $(BA)^3 = 9(BA)^2$. Для получения ответа: $BA = 9E$ достаточно знать, что матрица BA обратима, а это так, потому что ранг произведения матриц не зависит от порядка сомножителей (факт, известный по учебникам).

13.11. Покажите, что $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} b_{ji}$.

13.14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & n-1 \\ . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

13.15. a) $A^{99} = A$.

b) $\begin{pmatrix} 2^{100} & 2^{100}-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

g) $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$.

13.16. b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

13.18. Все матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

13.19. См. зад. 13.7.

13.23. См. зад. 13.14.

13.24. a) Да; b) нет.

13.27. Система имеет вид $\begin{cases} rx + (r+1)y = r+2, \\ (r+3)x + (r+4)y = r+5. \end{cases}$
Ее главный определитель равен (-3), а решение $x=-1, y=2$ независимо от r.

13.28. Вычитая из каждого уравнения предыдущее, получим одно и то же уравнение, следовательно, ранг системы не превосходит 2. Из единственности решения теперь вытекает, что $n = 2,$ далее, как в предыдущей задаче.

13.29. Задача сводится к решению в целых числах однородной системы трех уравнений с четырьмя неизвестными. Достаточно найти любое решение (в дробях) и умножить на общий знаменатель.

14.2. Можно. Поместите источник *O* в центр правильного тетраэдра. Около каждой грани опишите окружность, которая вместе с *O* определит конус (эти конусы, конечно, перекрывают друг друга). Внутри каждого конуса возьмем поперечное сечение (круг) *на разных расстояниях* от *O*, чтобы эти экраны не мешали друг другу.

14.3. $1; \dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

14.5. Плоскость.

14.6. a) Ср. с зад. 4.13 b).

b) Пусть одна из прямых совпадает с осью *OX*, вторая задается уравнениями $\begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases}$ Для любой точки $M(x, y, z)$ приравниваем квадраты расстояний до двух прямых: $y^2 + z^2 = x^2 + (z-1)^2,$ что приводит к уравнению *гиперболического параболоида*.

14.8. Шар, центр которого *не совпадает* с центром Луны.

14.9. Если *S* — площадь эллипса, лежащего в основании цилиндра, β — угол между плоскостью *OXY* и данной, то искомая площадь равна $\dfrac{S}{\cos\beta} = \dfrac{3}{2} e\sqrt{\pi}.$

14.11. Тень ограничена параболой.

14.13. Центр (2, 0, 0, 0), радиус $\sqrt{5}.$

14.14. Правильный тетраэдр.

14.15. При вращении одной из двух жестко соединенных скрещивающихся прямых вокруг неподвижной другой всегда образуется *однополостный гиперболоид*.

14.17. $F\left(x, \sqrt{y^2+z^2}\right)=0.$

14.20. $\dfrac{\left(x-\dfrac{z^2}{2p}\right)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1.$

14.21. b) Прямая, проходящая через точку $M_0(0{,}0{,}1)$ и текущую точку донной поверхности $M(x,y,z)$, пересекает плоскость OXY в точке $\left(\dfrac{x}{1-z};\dfrac{y}{1-z};0\right)$. Ответ: $F\left(\dfrac{x}{1-z},\dfrac{y}{1-z}\right)=0.$

14.22. $y = x\,\mathrm{tg}\dfrac{\omega z}{v}.$

14.23. Исключив параметр a из канонических уравнений прямой $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{a^2}=\dfrac{z-1}{-1}$, получим: $x^2=y(1-z)$.

15.1. a) $\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_1^2 f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho=\int\limits_{-2}^{-1}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+$

$$+\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int\limits_{1}^{2}dx\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

15.3. $\pi f(0{,}0)$.

15.4. c) $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}dx\int\limits_{\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{3}x}\dfrac{2dy}{x^2+y^2}+\int\limits_{1}^{\sqrt{2}}dx\int\limits_{x}^{\sqrt{4-x^2}}\dfrac{2dy}{x^2+y^2}.$

15.5. a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

e) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{\sqrt[3]{\frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi}}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho.$

15.6. a) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_{\arcsin x}^{\pi-\arcsin x} f(x,y)dx.$

c) $\displaystyle\int_0^1 dy \int_0^3 f(x,y)dx + \int_1^5 dy \int_0^{2-\sqrt{y-1}} f(x,y)dx + \int_1^2 dy \int_{2+\sqrt{y-1}}^3 f(x,y)dx.$

15.7. Измените порядок интегрирования; после этого внутренний интеграл вычисляется.

15.10. a)—e) Измените порядок интегрирования.

f) Область интегрирования (квадрат) делится линиями $xy = -1; 0; 1$ на 4 части. Достаточно вычислить площадь каждой из них.

15.12. Треугольник, ограниченный линиями $y = x, y = 2x, x = 4.$

16.1. a) $1{,}5 + (-1)^n 5{,}5.$

b) Возможны различные варианты, например, $(-1)^{[n-1]}$; $(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}+1}$; $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n - \frac{\pi}{4}\right).$

c) $(-1)^{n+1} n^{(-1)^{n+1}}.$

16.2. См. зад. 1.15.

16.3. Периметры 8-угольников образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \cos\frac{\pi}{8}.$

16.4. Да, например, $a_n = 1, b_n = -1;$ нет, т.к. в этом случае расходящийся ряд был бы почленной разностью двух сходящихся.

16.5. Нет (забыто условие неотрицательности членов ряда).

16.6. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=q<1$ и $q'\in(q,1)$, то найдется такой номер N, что при $k=1,2,3,\ldots$будет $\dfrac{a_{N+k}}{a_{N+k-1}}<q'$; отсюда $a_{N+k}<(q')^k a_N$ и $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[N+k]{a_{N+k}}<q'<1.$

Пример: $1+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\dfrac{1}{64}+\ldots$

16.7. Примените интегральный признак.

16.8. a) Нет.

b) Да, т.к. $\left|\dfrac{a_n}{n}\right|\le\dfrac{1}{2}\left(a_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$ (неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим).

c) Нет, если не добавить условие неотрицательности членов обоих рядов.

16.10. Например, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln^2 n}.$

16.12. Неверно. Пусть первая последовательность будет 1;2;1;4;1;8;1; 16;…, а вторая — та же, начиная со второго члена.

16.15. Если утверждение задачи неверно, то найдется такое число $\varepsilon>0,$ что для бесконечного числа номеров n будет $a_n>\dfrac{\varepsilon}{n}.$ Пусть N —один из таких номеров, а $M\ge 2N$ — другой. Учитывая монотонность членов ряда, имеем: $\sum\limits_{n=N+1}^{M}a_n\ge(M-N)a_M\ge\dfrac{M}{2}\cdot\dfrac{\varepsilon}{2M}=\dfrac{\varepsilon}{4}.$ Повторим рассуждение, заменив N на M. Число слагаемых, больших, чем $\frac{\varepsilon}{4}$, будет бесконечным.

16.17. Да, т.к. графически очевидно, что $\lambda_n > \pi n$.

16.19. c) Напишите несколько первых членов ряда.

d) Данный ряд можно представить в виде $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\ +2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+..\right)+2\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+..\right)+\ldots$

e) $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)$; одинаковые дроби сокращаются. Ответ: $\frac{1}{3}$.

k) Просуммируйте сначала по n, как геометрическую прогрессию, далее — как в п. e).

16.22. $\frac{\pi^2}{8}$. У к а з а н и е: Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ разбейте на суммы по четным и нечетным n.

16.24. Можно. Поставьте друг на друга кубики с ребром $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{4}}, \ldots$ (Примечание: можно, переставляя кубики, поместить их, соблюдая условия задачи, внутри куба с конечным ребром.)

16.28. Используйте оценки площади ступенчатой фигуры сверху и снизу, как при доказательстве интегрального признака сходимости рядов.

16.29. Возьмите от левой части натуральный логарифм и учтите неравенство задачи 8.44 a).

16.30. Если все x_i различны, то их сумма меньше суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, а эта сумма меньше, чем 2, что легко доказать методами зад. 16.28.

16.31. Например,

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}+\ldots$$

16.32. Можно. В признаке Лейбница пропущено одно условие.

16.33. Да, начиная с $n=10000.$

16.35. Начинаем с $S_1=1.$ Далее для каждого значения n применяем следующее правило: если $S_n \geq \frac{1}{n+1},$ то следующее слагаемое $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ вычитаем, в противном случае его берем с плюсом. Этим гарантируется выполнение неравенств $0 \leq S_n \leq \frac{2}{n}$ для всех n (доказательство по индукции, начиная с $n=2$), откуда и получим требуемое: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=0.$

16.36. a) Расходится, т.к. все частичные суммы этого ряда больше, чем для ряда $\frac{1}{2}+0+0+\frac{1}{5}+0+0+\frac{1}{8}+0+0+\ldots$

b) Расходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$

c) Сходится. Найдите предел отношения общего члена ряда к n^2.

d) Расходится. Переведите иррациональность из числителя в знаменатель.

e) Сходится. Предел, вычисленный по признаку Коши, равен e^{-1}.

g) Сходится, т.к. $\ln 8>2.$

i) Расходится по признаку Даламбера.

k) Сходится. Общий член убывает как $n^{-\frac{4}{3}}$.

l) Сходится. Предел, вычисленный по признаку Коши, равен $e^{-\frac{1}{2}}$.

m) Сходится, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0.$

p) Расходится, т.к. $\ln(1+\alpha)\approx\alpha.$

q) Сходится. Можно применить признак Даламбера, но достаточно заметить, что данный ряд есть часть сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{2^n}.$

r) Расходится. Достаточно заметить, что $n!<n^n$ и что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ расходится.

s), t) Расходятся. Вторые слагаемые в знаменателях несущественны.

u) Расходится. Рассмотрите группы членов одного знака (от $n=k^2$ до $n=(k+1)^2-1$) и оцените их сумму снизу.

v) Сходится. Вычислите сумму двух соседних членов.

w) Сумма ряда равна несобственному интегралу.

x) Расходится. Сравните общий член ряда с $n^{-\frac{1}{5}}.$

16.37. Ни при каком.

16.39. $p>\dfrac{3}{2}.$ У к а з а н и е: домножьте до разности кубов.

16.40. Расходится. У к а з а н и е: по формуле Тейлора с остаточным членом $e=1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{e^{c_n}}{(n+1)!},$ где $0<c_n<1.$

17.1. Ряд, стоящий в левой части, сходится при $|x|<1.$ Пусть его сумма равна $S(x).$ Утверждение задачи следует из следующих очевидных фактов: $S(0)=0,\ S\left(\dfrac{1}{2}\right)>1,\ S'(x)>0$ при $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right).$

17.3. $(a-bx+cx^2)(1-x^3+x^6-\ldots)=\dfrac{a-bx+cx^2}{1+x^3}$ при $|x|<1.$

17.4. Аналогично предыдущей задаче.

17.5. a) $|x|<1.$ У к а з а н и е: $1\le 2+\cos x\le 3.$

b) Абсолютно расходится при любых x; условно сходится при всех значениях x, кроме $-1,-\sqrt{2},-\sqrt{3},\ldots$

c) Сводится к решению неравенства $2\cos x<-1.$

17.7. Домножьте числитель и знаменатель на $(1-x).$

17.8. a) Найдите периодичность в поведении производных.

b) Преобразуйте в сумму тригонометрических функций.

c)—f) Выполните соответствующую замену переменной.

17.9. Во всех случаях надо использовать формулу $y^{(n)}(0)=n!c_n,$ где c_n — коэффициент при x^n в разложении функции $y(x)$ в ряд Маклорена.

Дополнительные указания: d) упростите вид знаменателя, домножив его на $(1-x)$; e) введите новую переменную $(x-1)$.

17.12. $-3\pi.$ У к а з а н и е: $\pi\sqrt{n^4+2n^3}=\pi n^2\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}=$

$=\pi\left(n^2+n-1+\dfrac{3}{n}+\ldots\right)$; учтите, что число n^2+n всегда четно.

17.16. Замените $\dfrac{1}{x}=y\to 0$ и разложите все функции в ряд Маклорена до 3-ей степени.

17.17. a), b) Рассмотрите ряд как производную.

c) Группируя «по столбцам», имеем сумму геометрических прогрессий:

$$\left(x+x^2+x^3+\ldots\right)-\frac{1}{2}\left(x^2+x^3+x^4+\ldots\right)+\frac{1}{3}\left(x^3+x^4+x^5+\ldots\right)-\ldots=$$

$=\dfrac{1}{1-x}\left(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dots\right).$ Сумма в последней скобке равна $\ln(1+x)$.

e) Требуется вычислить сумму ряда $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ при $x=\dfrac{1}{2}.$ Домножьте ряд на x и дважды продифференцируйте. При обратном интегрировании не забывайте определять константу из условий $xf(x)=(xf(x))'=0$ при $x=0$.

h) Замените $\ln x=y$ и продифференцируйте по переменной y.

k) $(x+1)e^x-1.$ У к а з а н и е: Чтобы получить стандартное разложение функции e^x, проинтегрируйте ряд почленно и вынесите x.

n) Добавьте в каждое слагаемое $x^3, x^6, x^9, \dots$ и трижды продифференцируйте; в ответ подставьте $x=1.$

o) $\cos\pi=-1.$

p), q) Сумма ряда удовлетворяет уравнению $S''(x)=S(x).$

u) Пусть сумма ряда равна $S(x).$ Функция $U(x)=x^3S(x)$ удовлетворяет уравнению $U'(x)=3x^2+U(x).$ Ответ: $\dfrac{6}{x^3}\left(e^x-1-x-\dfrac{x^2}{2}\right)$ можно усмотреть и непосредственно.

x) См. зад. 7.37 a).

17.18. Используйте соотношения $|\sin kx-\sin ky|\le k|x-y|$ и $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k(k+1)}=1.$

Приложения

I. Цель и организация внутривузовской олимпиады

Речь пойдет об олимпиаде по математике в обыкновенном техническом или экономическом ВУЗе, рассчитанной на массовое участие «обычных» студентов. **Целью** такой олимпиады не может (как иногда считают) быть «пробуждение в студентах интереса к изучению математики в дополнительном объеме». Такая цель, по нашим наблюдениям, не достигается. За наш многолетний опыт мы знаем буквально единичные случаи, когда победитель олимпиады брался изучать математику всерьез и в конце концов достигал ученой степени (не по математике!). Очевидно, такой студент занялся бы наукой и без олимпиады. Поэтому олимпиада, по нашему мнению, есть только шаг в цепи мероприятий, призванных **выявить** студентов, способных к творческому мышлению, и обратить на них внимание специальных кафедр. Важно здесь то, что математическая олимпиада бывает для первокурсников **первым** таким массовым мероприятием. Победители могут прийти к выводу, что они способны на нечто большее, чем успешно сдавать сессию.

Итак, главным в организации олимпиады мы считаем создание **праздника** математики. Отсюда частные цели:

путем предварительной агитации обеспечить как можно большее число участников, ни в коем случае не принуждая никого к этому участию. Скажем, мы никогда не устанавливаем норм участия от групп и потоков и не требуем составлять команды из определенного числа участников (но и не запрещаем стихийное образование команд). На примерах задач прошлых лет мы показываем, что решить 3 — 4 из них доступно среднему студенту. Желательно, чтобы в этой агитации участвовали все преподаватели кафедры в своих группах и потоках. Как показывает опыт, это существенно эффективней обезличенных объявлений в многотиражке, по институтскому радио и на стенде у кафедры (хотя мы не пренебрегаем и этими формами). Чем больше мы привлекли участников, тем больше вероятность того, что мы не упустили возможных победителей;

создать во время олимпиады (обычно 3 астрономических часа) обстановку, ничем не напоминающую экзамен или контрольную работу. Каждый участник волен досрочно покинуть аудиторию. Разрешается пользоваться **любыми** материалами: конспекты, учебники, справочники (разумеется, это налагает особые требования к составлению задач). Каждый имеет право советоваться с соседом, хотя мы обычно заранее предупреждаем, что оригинальные решения будут оцениваться выше. Как правило, это оказывается излишним: победители работают в одиночку, им так интереснее. Впрочем, нередко призерами (но не первыми!) становятся команды — это тоже допускается. Конечно, в условиях такой свободы нельзя избежать того, что решение простейших задач оказывается одинаковым на всю аудиторию — ну и пусть, все равно не эти задачи определяют победителей;

после олимпиады как можно шире афишировать имена победителей, обеспечить их премирование как ректоратом, так и деканатами.

Олимпиада проводится в один день (в начале весеннего семестра) для студентов всех факультетов и специальностей, но с разделением на перво- и второкурсников. Всем выдаются размноженные экземпляры задач. После нескольких лет экспериментов мы пришли к выводу о ненужности указания предварительных баллов. Во-первых, задачи и так расположены в порядке возрастания трудности. Во-вторых, довольно часто «априорные» баллы не согласуются с итогами работы участников над задачами. В связи с этим проверка решений проводится по следующей схеме.

Первый этап — выявляем, кто из участников решил какие задачи и на сколько процентов. При этом удобно все решения оценивать, скажем, по трехбалльной шкале. Составляется таблица, из которой сразу видна не только сравнительная сложность задач по результатам участников, но и степень их самостоятельности в работе (в последние годы, естественно, вся работа над таблицей проводится на экране компьютера).

Второй этап — для каждой задачи устанавливается окончательный балл, присуждаемый за полное ее решение (обычно в диапазоне от 2 до 10 баллов). В литературе и по опыту различных олимпиад известны многочисленные формулы для вычисления этих баллов. Тем не менее мы считаем, что способ «на глазок» — самый лучший. Все баллы в таблице пересчитываются по новой шкале (удобно при этом работать над столбцами таблицы, т.е. разбираться до конца с каждой отдельной задачей). При этом присуждаются и дополнительные баллы — за красоту и оригинальность решения, за единственное решение трудной задачи или даже за наиболее плодотворную, пусть и не доведенную до конца, идею решения. Баллы, полученные на этом этапе, дальнейшему изменению не подлежат.

Третий этап — подсчет сумм баллов «по строкам» и выявление победителей. При большом числе участников победителей также будет много. Тем, кто набрали близкие суммы баллов, присуждается одно и то же место (поэтому мы не в силах заранее объявить, сколько у нас будет, скажем, первых мест). Кроме того, обычно дополнительно выявляются «лучшие математики» на каждом факультете, даже если они не попали в число призеров. Полная таблица результатов вывешивается у кафедры рядом с плакатом: «Поздравляем победителей!». Краткие резюме с указанием имен победителей представляются в ректорат и в деканаты.

II. Что такое олимпиадная задача?

Главным отличием втузовского курса математики от университетского является даже не уменьшенное во много раз количество «часов», а принципиально иная структура курса, направленного не «внутрь» математики, а практически исключительно на решение прикладных задач. Наши студенты не имеют возможности овладеть основными для студента-математика понятиями (структура действительной прямой, компактность, равномерная непрерывность, «эпсилон-дельта» техника, аксиоматика линейных и топологических пространств и т.д.) — даже если эти понятия упоминаются лектором. Начинающий преподаватель, получивший «классическое» математическое образование, становится в тупик: какие же задачи им можно дать? Данный сборник есть, в частности, попытка ответа на этот вопрос.

Попытаемся сформулировать требования к составителям задач.

1. Решение задач должно опираться на **базисные знания** студентов по **основам** преподаваемых им курсов, без излишних подробностей (например, можно использовать понятие выпуклости графика, но не следует требовать знание наизусть формулы кривизны).

В последние годы мы наблюдаем рост разнообразия учебных программ по различным специальностям и вообще номенклатуры специальностей. В частности, в нашем ВУЗе значительно различаются программы по общетехническим, экономическим специальностям, а также имеются группы усиленной математической подготовки, причем, что замечательно, на олимпиаде эти группы не выделяются, почему мы и не считаем необходимым проводить для них специальные олимпиады по «усиленной» программе. В результате приходится избегать задач по разделам, знакомым не всем студентам (приходится исключать, например, даже понятие векторного произведения). Разделы же, знакомые всем, должны быть представлены. Отсюда — сравнительно большое по сравнению со школьными олимпиадами количество задач (не менее восьми — десяти). В последние годы мы стали также активно применять задачи по «школьной» математике или даже «чисто логические» задачи, требующие для решения только приложения здравого смысла:

Доказать, что в любой группе из 6 человек найдутся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Показать, что для 5 человек это не так.

Кстати, все задачи, приведенные в качестве примеров, вы можете найти выше, в соответствующих главах, но автор счел неудобным для читателя, если он будет давать только ссылки на номера задач.

2. Задачи должны значительно **различаться по сложности** — от «почти стандартных» до достаточно сложных (прежде всего с логической точки зрения), чтобы, во-первых, никто не ушел «с нулем», а во-вторых, лучшие действительно были выявлены.

Наиболее простые задачи, с которых начинается задание, должны не только убедить каждого студента, что ему по силам эти задачи решить, но в идеале вызвать у него улыбку и создать хорошее настроение:

Пастух, которому вчера исполнилось m лет, пасет n коров. Он сосчитал в уме, что $3n(2n+5)-m(n+4)=1$. Сколько лет пастуху?

Вот пример «допустимой» трудной задачи, которую на олимпиаде никто не решил и даже не пытался:

Функция $f(x)$ определена на всей оси и для любых различных x,y $|f(x)-f(y)|<|x-y|$. Доказать, что если $f(f(f(0)))=0$, то $f(0)=0$.

Раз в три-четыре года появляется студент, справляющийся с подобной задачей; он-то нам и нужен для дальнейшей работы.

3. Задачи должны быть **разнообразными** как по математическому содержанию, так и по приемам решения: одни предпочитают рисовать:

Построить линию $x^4 - x^2 = y^2 - y$;

другие — вычислять:

Найти $y^{(1998)}$, *если* $y = e^{-x}\sin\sqrt{3}x$;

третьи — решать задачи с «жизненным» содержанием:

Один робот стоимостью 2000 долларов выполнит всю работу за 1000 дней. Сколько надо купить роботов для выполнения всей работы с наименьшими затратами, если технику-контролеру надо платить 50 долларов в день независимо от числа роботов?

и т.п.

4. Задача должна быть **нестандартной** (это слово вообще точнее выражает суть дела, чем «олимпиадная»). Во-первых, она не должна поддаваться тому, кто — пусть на пятерку — вызубрил материал. Это вовсе не значит, что задача действительно трудная. Во-вторых, задача в идеале должна самой формулировкой вызывать интерес, то есть быть нестандартной по форме:

Решить уравнение $x = \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \ldots}}}$.

Составить функцию двух переменных, область определения которой состоит из прямой и точки.

Для каких функций u, v *справедлива «формула»* $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'}{v'}$?

Какую форму имеет область пространства, в которой лунное тяготение превосходит земное?

Такое удается не всегда, но коллективными усилиями работников разных ВУЗов банк оригинальных задач пополняется.

5. Многие не придают значения категорическому императиву: ***задача должна формулироваться кратко.***

Ради краткости мы нередко идем на то, что придиры назовут неопределенностью формулировки:

В пещере живут сороконожки и трехголовые драконы — всего 14 голов и 330 ног. Сколько ног у дракона?

Неужели надо при этом объяснять, что ног у всех сороконожек именно по 40, а у драконов — поровну?

Нам известны многочисленные примеры, когда легкая в принципе задача не решалась только из-за громоздкости формулировки. Не могу не привести экстремальный, на мой взгляд, пример. Вот несложная задача из нашей олимпиады:

Доказать, что плоскость, проходящая через концы трех ребер куба, выходящих из одной вершины, отсекает от диагонали куба треть.

Эта формулировка уже требует определенных умственных усилий при чтении. Теперь посмотрим, что с этой задачей творит С.Барр в своей книге «Россыпи головоломок»:

*Какие две плоскости, проходящие через ребра и (или) вершины куба, делят одно из его измерений на три равные части? Доказательство должно быть максимально коротким (**Sic!— С.А.**), а вспомогательный рисунок должен изображать куб (прозрачный, если необходимо) не более чем с тремя дополнительными линиями. Куб можно изображать под любым удобным для вас углом. Чтобы объяснить рисунок, вы можете начертить вспомогательную схему, но при доказательстве должны ссылаться только на исходный рисунок.*

6. С.Барр (и многие другие) забывают правило: ***в математике достаточно естественных трудностей***, чтобы выдумывать искусственные. Поэтому мы считаем неприемлемыми, например, формулировки типа: «доказать, не используя скалярное произведение». Другое дело — подвохи, незаметные при первом чтении и выявляемые только очень внимательным решателем:

Сколько решений имеет уравнение $x^2 = 1{,}001^x$ *?*

О понятии «олимпиадная задача» автор может говорить еще долго, но боится наскучить читателю.

III. Задачи олимпиады СГУПС 2010 года

Для первого курса

1. Доказать, что многочлен $\frac{x^5}{120}-\frac{x^3}{24}+\frac{x}{30}$ при любых целых x принимает целые значения.
2. Построить линии: а) $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$;

   б) $\log_2(4x^2+y^2)=\log_2{}^2(x^2+0{,}25y^2)$.
3. Дано: $ABCD$ — прямоугольник, M — любая точка пространства. Доказать, что $\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MB}\cdot\overline{MD}$.
4. Дан куб с ребром 1. Найти наименьшее расстояние между его диагональю и не пересекающейся с ней диагональю грани.
5. Найти $\mathbf{A}^{2010}$, если $\mathbf{A}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & -1\\ 1 & \sqrt{3}\end{pmatrix}$.
6. Найти a и b, если $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^3+ax+b}=-3$.
7. Найти $f(x)$, если $\begin{cases} f'(x)=f'(x-1),\\ f(x)+f(x-1)=x.\end{cases}$
8. Две вершины треугольника фиксированы, а третья движется так, что один из углов при основании вдвое больше другого. Доказать, что она движется по гиперболе.
9. Доказать, что $\sin x+\operatorname{tg} x>2x$ при $0<x<\frac{\pi}{2}$.

Для второго курса

1. Найти площадь, ограниченную линией $|y|=(|x|-1)(|x|-3)$.
2. См. задачу 4 для первого курса.
3. Функция $f(x)$ положительна на всей оси. Вычислить $\int\limits_a^b\frac{f(x-a)dx}{f(x-a)+f(b-x)}$.

4. См. задачу 5 для первого курса.

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} y_1' = 2010y_1 + y_2, \\ y_2' = 2010y_2 + y_3, \\ y_3' = 2010y_3. \end{cases}$

6. Найти $y(x)$, если $y(x) = \int\limits_0^x y^2(t)dt + 4x$.

7. Сколько различных производных четвертого порядка имеет функция трех переменных?

8. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\int\limits_0^1 e^{nx^2} dx}$?

9. Привести пример сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами, для которого величины $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не ограничены сверху.

Оглавление